ΜΠΑΜΠΑΝΟΣ ΒΑΣΙΛΟΠΟΥΛΟΣ, ΑΡΧΙΠΡΕΣΒΥΤΕΡΟΣ ΓΩΑΝΝΙΝΩΝ, ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΟΣ

Ο'ΔΟ'Σ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ'Σ

Η' ΤΟΙ

Σειρὰ βαθμηδὸν προϊοῦσα, περιεκτικὴ τῶν κατ' εἶδος κυριωτέρων τῆς Μαθήσεως πραγματειῶν, διηρημένων εἰς Τόμους τρεῖς.

ΤΟ'ΜΟΣ ΠΡΩ'ΤΟΣ ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΟ'Σ

Τῶν Στοιχείων τῦ Εὐκλείδου, καὶ Σφαιρικῶν τῦ Θεοδοσίυ.

Δ Ε Υ Τ Ε Ρ Ο Σ.

Γεωμετρίας θεωρητικῆς καὶ πρακτικῆς, καὶ Τετραγωνομετρίας,

Τ Ρ Ι Τ Ο Σ.

Τῆς κατὰ Πρόκλον σφαίρας, τῦ περὶ χρήσεως σφαιρῶν Γορδάνυ, Α'στρολαβίυ, Γεωγραφίας τε, καὶ Ο'πτικῆς. προσέθεται καὶ

Τ Ε Τ Α Ρ Τ Ο Σ.

Τῆς Α'ριθμητικῆς.

Ὁ ΔΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ

Η ΤΟΙ

Σειρὰ βαθμηδὸν προϊοῦσα, περιεκτικὴ τῆς κατ' εἶδος κυριωτέρων τῆς μαθήσεως πραγματειῶν, οἷον

Τῶν στοιχείων τῶ Εὐκλείδη. Σφαιρικῶν κατὰ Θεοδόσιον. Γεωμετρείας θεωρητικῆς καὶ πρακτικῆς. Τετραγωνισμοῦ. Τῶ περὶ Κεκλασμένης σφαίρας κατὰ Πρόκλον. Τῶ περὶ χρήσεως σφαιρῶν. Ἀστρολαβίου. Γεωγραφίας, καὶ Ὀπτικῆς.

πρότερον μὲν παρὰ

ΤΟΥ̃ ΛΙΑΝΔΕΣΙΜΩΤΑΤΟΥ ΚΑῚ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΩΤΑΤΟΥ ΚΥΡΙΟΥ ΜΕΘΟΔΙΟΥ ΑΝΘΡΑΚΙΤΟΥ ΕΞ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ἐκ τῆς Λατινίδος εἰς τὴν Ἑλληνίδα μεταγενεχθεῖσά τε φωνὴν καὶ ἁρμοσθεῖσα λίαν μέντοι σωζομένως, καὶ ἀμυδρῶς. ὕστερον δὲ παρὰ

ΤΟΥ̃ ΛΙΑΝΔΕΣΙΜΩΤΑΤΟΥ ΚΑῚ ΕΛΛΟΓΙΜΩΤΑΤΟΥ ΑΡΧΙΠΡΕΣΒΥΤΕΡΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ, ΚΑῚ ΔΙΔΑΣΚΑΛΟΥ

Τῶ ἐκεῖ νῦν σεμνυομένῳ ἐπὶ Ταύτῃ πρὸς ταῖς ἄλλαις ἐπιστήμαις, Ἀρχιγυμνασίῳ, ΚΥΡΙΟΥ ΜΠΑΛΑΝΟΥ ΒΑΣΙΛΟΠΟΥΛΟΥ,

Ἀναπτυχθεῖσά τε καὶ καλλωθεῖσα τῇ τε φράσει τῆς λέξεως καὶ τῇ σαφηνείᾳ τῆς νοημάτων, πλατυνθεῖσά τε, καὶ πλουτισθεῖσα τῇ προσθέσει ἐκ ὀλίγων θεωρημάτων τε, καὶ προβλημάτων, παύ χρησίμων ὄντων ἀπανθισμάτων, τῆς μὲν συλλεχθέντων ἐκ διαφόρων ἐπισήμων Συγγραφέων παλαιοτέρων τε καὶ νεωτέρων, τῆς δὲ παρ' αὐτῶ ἀνευρεθέντων· καὶ ὅπως ἐς κρεῖττόν πως διαπαχθεῖσά τε, καὶ ἀναπληρωθεῖσα χάριν τῆς παρ' αὐτῆς μαθητιώντων, Προσφωνηθεῖσα μὲν

ΤΟΙ̃Σ ΕΚΛΑΜΠΡΟΤΑΤΟΙΣ ΚΑῚ ΕΥ̓ΓΕΝΕΣΤΑΤΟΙΣ ΥἸΟΙ̃Σ ΚΑΡΑΪΩΑΝΝΟΥ, ΚΑῚ ΜΑΡΟΥΤΖΗ, ΕΥ̓ΠΑΤΡΙΔΑΙΣ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ.

Τύποις δὲ νῦν πρῶτον ἐκδοθεῖσα, προθυμίᾳ μὲν καὶ σωφροσύνῃ τῆς φιλομαθῶν καὶ φιλολόγων· ἐπιμελείᾳ δὲ, ὡς οἷόντε ἦν, καὶ διορθώσει

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΖΑΟΡΙΤΟΥ ΕΞ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Διαιρεῖται δὲ εἰς τόμους ξεῖς· προσεθεισμένῳ ἐπὶ τόποις καὶ τεύχεσι, τῆς τῆς Ἀριθμητικῆς.

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ.

ΕΝΕΤΙΗΣΙΝ ΕΤΕΙ ΤΩ̃ ΣΩΤΗΡΙΩ̃, αψμθ.
Ἐν τῇ Τυπογραφίᾳ Ἀμπωλίου τοῦ Βόρτολι.
CON LICENZA DE' SUPERIORI, E PRIVILEGIO.

Τοῖς Ἐκλαμπροτάτοις καὶ εὐγενεστάτοις, χρησιμωτάτοις τε
καὶ χρηστοηθεστάτοις,

ΤΟΙΣΤΕ ΤΟΥ ΚΑΡΑΙΩΑΝΝΟΥ ΚΑΙ ΜΑΡΟΥΤΖΗ ΑΠΟΓΟΝΟΙΣ

Τῷ προσήκουσαν ἑκάστῳ ἀποτέμνω προσρησιν, δεόμενος ὑπὲρ
ὑμῶν ἐκτενῶς πρὸς Κύριον.

ΜΑ΄χε ὑπὲρ πατρίδος εὐγενέσατοι ἀπόγονοι εὐγενεσάτων προγόνων, ἔφη τις τῶν πάλαι φιλοσόφων, τὸ πρὸς αὐτὴν ἑκάστου ἀπαραίτητον χρέος δεῖξαι βουλόμενος. ἄλλος δέ τις πάλιν πρὸς τὸ τῆς πατρίδος ἀφορῶν προτέρημα, τὸ πρῶτον τῶν ἐν τῷδε τῷ βίῳ ἐφετῶν, καὶ γλυκερώτερον παντὸς ἄλλου ταύτην εἶναι ἀπεφήνατο, ὥσε καὶ προαιρεῖσθαι πολλοὺς τὸν ἐν τῇ πατρίδι θάνατον,

κἄμ

κἄν τις αὐτοῖς ἐν ἀλλοδαπεῖ καὶ ἀθανασίαν τε προεπηγγείλατο, ἀλλά γε ἢ τό, ὃν ἔχομεν ὧδε μένουσαν πόλιν, ἀλλὰ τὴν μέλλουσαν ἐπιζητοῦμεν, οὐκ ἄλλότι τωὸντι βούλεται, ἢ ὅτι τοῖς ἀνθρώποις οὐδὲν ὕπως, ὡς ἡ πατρὶς ποθητόν. ἥκουσα δ' ἔγωγε καί τινος τῶν καθ' ἡμᾶς ἐν φιλοσοφίᾳ διαπρέψαντος, ἢ πολλὰ τῇ πατρίδι θερμῶς πονήσαντος, μέχρι καὶ βαθυπάτρ γήρως τοῖς φιλομαθέσιν ἐπαρκέντος, ἐν τούτῳ καὶ μόνῳ καυχωμένου, ἐν τῷ τῇ ἐνεγκούσῃ χρηματίσαι διδάσκαλον, καὶ τὸ πρὸς αὐτὴν ὀφειλόμενον διὰ πολλῶν ἀποπληρῶσαι ἀγώνων, καίπερ ἄλλοις τε πολλοῖς κεκοσμημένῳ τοῖς προτερήμασι. Τοῦτο τοίνυν κἀγὼ πολλάκις κατ' ἐμαυτὸν διαλογιζόμενος, καὶ ὡς φιλοσοφικὴν παραίνεσιν τὰ παρὰ τοῦ ἀνδρὸς τούτου ἀποδεχόμενος, ὁρῶν δὲ καὶ τὴν φιλτάτην πατρίδα τῶν ἄλλων μὲν πλουτοῦσάν πως μαθημάτων, ἢ ταῦτα ἐν τοσαύτῃ τοῦ γένους ταπεινώσει, ἀμοιροῦσαν δ' ὅλως τῆς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης πολυειδῶν τε ἅμα καὶ ἀσύλων, ἵν' ὕπως εἴπω, θησαυρῶν, τὴν πλείονά μου σπουδὴν καὶ τὸν κατὰ τὴν ἐμὴν δύναμιν ἀγῶνα εἰς ἀνάπτυξιν τῆς παρ' αὐτοῖς προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων κατέβαλον, πολλοὺς δὲ καὶ διὰ πολλοῦ τοὺς πόνους ὑπενεγκών, οὐκ ὀλίγους τε ἱδρῶτας ἐκχέας, καὶ μεγάλοις ὀσημέραι τοῦ βίου παλαίσας τοῖς δυσχημασιν, ὡς καὶ ὑμῖν τοῖς ἐρασμιωτάτοις γνωσὸν, τὰς χρησιμωτέρας ταύτας, τῆς ὄντως Μαθηματικῆς ἐπιστήμης, πραγματείας, εἰς ἣν τηρῶσι τάξιν τὰ ἐν αὐταῖς ἢ εἰρμὸν μετὰ τῆς προσηκούσης, ὅσον οἷόν τε, σαφηνείας τε καὶ ἀποδείξεως ἤγαγον, τὰ πλεῖω μὲν τῆς ἐν ἑκάστῃ παρὰ τοῦ ἐμοῦ εἰς ταῦτα καθηγεμόνος ἔχων, ἄλλα δὲ παρ' ἄλλων ἀρχαιοτέρων ἐρανιζόμενος, ὧν καὶ τοῖς συγγράμμασιν ἐνέτυχον, καί τινα πρὸς κρείττονα ἑκάστης πραγματείας ἀπαρτισμὸν κατὰ τὴν ἐνοῦσάν μοι προθυμίαν. ἤδη δὲ καὶ εἰς τύπον τὰ διὰ πολλῶν συλλεχθέντα πόνων, ἢ πολλοῖς ἀναπτυχθέντα τε καὶ καλλωπισθέντα ἱδρῶσι ἐκδοθῆναι τοῦ θεοῦ δόξαντος, ἵνα ἐκ τούτων οἱ μεθ' ἡμᾶς λάβωσί τινας ἀφορμὰς, καὶ ζῆλον ἔνθεον εἰς ἀνάμνησιν τῆς παρὰ τοῖς πάλαι Ἕλλησι θαυμασίας τε καὶ ἀκριβεστάτης

τῶν

τῆς μαθημάτων τούτων διδασκαλίας, οὐκ ἔδοξέ μοι ἄλλοις τισὶ προσκομίσαι ταῦτα, καὶ ἀναθεῖναι, οἰκειότερον δ' εἰπεῖν, ἐνορμίσαι ὡς εἰς λιμένα εὔδιον καὶ ἀκύμαντον, ἢ τοῖς λαμπρότητι γένους, ἀφθονίᾳ τε πλούτου, καὶ τοῖς ἄλλοις ἔτι προτερήμασι φυσικοῖς τε ἅμα καὶ ἐπικτήτοις, τῆς ἄλλων τῆς ἐκ τῆς αὐτῆς ὁρμωμένων πατρίδος πρέχοσιν, ὑμῖν λέγω τοῖς ἐκλαμπροτάτοις ἀπογόνοις ΚΑΡΑΙΩΑΝΝΟΥΤΕ καὶ ΜΑΡΟΥΤΖΗ, τοῖς ἀθαλεσάτοις βλαστοῖς ἐξ ἀθαλῶν ὄντως δένδρων, προθήσω δὲ, εἶναι διὰ πασῶν τῆς ἀκοῶν περιβόητα, καὶ διαθρυλλούμενα, τῇ τερμόρφῳ καὶ θεοεικέλῳ εἰκόνι τῆς χαρίτων, τοῖς συμπαρεσάτοις περὶ τὸς δεομένους, τοῖς φιλοφρονουμένοις δαψιλεσάτῃ χειρὶ τοὺς κάμνοντας, τοῖς κηδεμόσι τῆς διαπραγόντων, τοῖς περιβεβλημένοις τὸν ἀποσίλβοντα χιτῶνα, τῆς σωφέσεως, τῆς εὐκοσμίας, τῆς ἀτυφίας, καὶ ταπεινοφροσυνης, τῆς πρὸς πᾶν ἀγαθὸν ἐπιῤῥεπῶς κλίσεως, καὶ σωφελοῦντι φαῦναι πεποικιλμένον παντοίῳ εἴδει ὑψηλῶν, καὶ διαπρυσίων προτερημάτων, καὶ οἷς ὡς δῶρον ἀρετῆς, συμπάροικος μὲν ἔφορος καὶ πρύτανις ἡ θεία χάρις, παρ' ἧς οἰκέτης τε καὶ ὀπαδὸς ἡ τύχη. εἰς ταῦτα ἀναβλέψας, τούτοις τε θαῤῥηκὼς, ἐκλιπαρῶν, ἀνακαλοῦμαι τὸ ὑμέτερον προσωπεῖον, καὶ ἀπρόσιτον, ἀποδέξασθαι φιλοφρόνως τὸ νεοτδυχές μοι τοῦτο ἀνάθημα, ὡς μικρόν τι τεκμήριον τῆς ἀγνώμονος, ἧς πρὸς ὑμᾶς ἔχω ὑπολήψεως, ὃ καὶ πέπεισμαι ἱκανῶς· ἔστε γὰρ ἄλλος τις ὅτῳσὶ ἀσμένως, καὶ ὅτῳ φιλοφρῶς δέξαιτ' ἂν καὶ ἐναγκαλίσαιτο τὸ πρὸς αὐτὸν προσφερόμενον, ὡς ὁ φιλόπατρις τὸ ἐκ τῆς πατρίδος· διὸ δὴ καὶ ὁ διὰ μακροῦ πλανώμενος χρόνου, κἂν γῦν τὸν τῆς πατρίδος ἰδεῖν καπνὸν, ἐφίεται. ἔστε μὲν δικαιότερον ἄλλο ἢ τοῖς οἰκείοις τὰ ἐκ τῆς οἰκείων ἀνατίθεσθαι. τί δὲ τοῖς φιλοπάτρισι τῆς ἐκ τῆς πατρίδος οἰκειότερον; ἀλλ' οὐδ' αὐτοῖς τοῖς προσφερομένοις ἄλλο πρὸς ἔπαινον προσφυέστερον. Δέξασθε τοίνυν ἀσμένως ἀγενέσατοί μοι καὶ προσφιλέσατοι τὸ νεοφανὲς πως ταῦτα μαθήματα, καίπερ τῷ γένεσιν ἐξ ἀρχαίων ἔχοντα ἐφάρετῆς, πρὸς ἔπαινον τῆς φιλτάτης πατρίδος, ἐπιδοσίν τε τῆς τοῦ γένους φιλομαθῶν, καὶ κλέος ὑμέτερον.

εὐελ-

εὐελπις γάρ εἰμι τοῖς μὲν ἄλλοις, τοῖς φθόνου παντὸς καθαρεύουσι, λόγου τε φανῆναι καὶ ὑποδοχῆς ἄξια, τοῖς δὲ νέοις μὴ τὴν τυχοῦσαν προμηνεῦσαι λυσιτέλειαν εἰς τὴν τῶν ἄλλων ἐπίσημων ἐπίτευξιν· ἀλλά γε καὶ μοὶ τῷ ὑπ' ἀγάπης ταῦτα προσκομίζοντι πρὸς ἔνδειξιν τῆς φιλαγάθου ὑμῶν καὶ χρησοήθους διαθέσεως, τοῦτο καὶ μᾶλλον εἰς καύχησιν καὶ παραμυθίαν τῶν πολλῶν ἐν αὐτοῖς καταβαλομένων πόνων, πρὸς χάριν παντως γε τῶν φιλομαθῶν, τὸ τοῖς φιλτάτοις τε καὶ ἀγχινεςάτοις προσενεχθῆναι τῆς πατρίδος γεννήμασιν· ὑμῖν δὲ τοῖς ταῦτα φαιδρῶς ἀποδεξαμένοις ἐπιβραβεύσοι ὁ τῶν ὅλων Δεσπότης καὶ Παροχεὺς τῶν ἀγαθῶν, ὑγιείαν, μακροημέρευσιν, καὶ τὴν κατ' ἄμφω εὐδαιμονίαν πρὸς καύχησιν τῆς ἐνεγκούσης καὶ παραμυθίαν τῶν δεομένων.

Τῆς ὑμετέρας παμβυκλεῦς Ἐκλαμπρότητος.

Ὁ Θερμὸς πρὸς Θεὸν εὐχέτης Μπαλσάμος Βασιλόπολος Ἀρχιπρεσβύτερος Ἰωαννίνων καὶ Διδάσκαλος.

ΠΡΟΟΙ-

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ

ΤΩΝ ΥΠΟΓΡΑΦΑΝΤΩΝ ΧΑΡΙΝ ΣΥΝΔΡΟΜΗΣ ΤΙΝΟΣ

Καὶ βοηθείας, εἰς ἀνακαθισμὸν τῆ Ἐκδοτῆ διὰ τὸ δαπανηρὸν περὶ τὴν ἔκδοσιν τῆς Μαθηματικῶν τούτων πραγματειῶν.

ΕΞ ὧ δηλοῦται ὁ ἔνθεος αὐτῆς ζῆλος περὶ τὰ κρείττω τῆς ἐν τῷ βίῳ, ἡ διάπυρος ἔφεσις τῆ ἀνακαινισμῆ τῆς παλαιωθείσης τῆ γένους δόξης, τὸ ἐλεύθεριον τῆς ὑποικτικῆς προαιρέσεως, τὸ φιλογενὲς, τὸ περὶ τὰς μαθήσεις φιλότιμον, τὸ πρόθυμον καὶ γενναῖον φρόνημα εἰς ἐπιτυχίαν, ὧν οὐδὲν ἧττον ἀνάλαμμα τῆς ἐν τῷ βίῳ λαμπρῶν καὶ τιμίων, θεῖον γὰρ κτῆμά ἐστιν ἡ Μάθησις, αὔταρκές τε καὶ ἀναφαίρετον· διὸ καὶ δικαίως ἀποδοχῆς ἐν φιλοσοφίας παρ' αὐτοῖς ἠξίωται, ὅτε μάλιστα λιτὰ καὶ ἀτελῆ ὑπάρχει τὰ τῆς αὐτῆς ἐραστῶν. Ἐπαγγέλλεται δὲ ὑμῖν τοῖς αἰτίοις γεγονόσι τῆ τῶν μεσότητα ἐμαχολῆσαι περὶ τὰς ἐπιστήμας, καὶ ἐπιδεικνῦσι δαψιλῆ τὴν χορηγίαν περὶ τὴν αὐτῆς ἀνακαίνισιν, δῆλα καταστῆσαι τὰ χαριστήρια παρά τε τῷ αὐτῆς πατρὶ Διὶ, καὶ παρὰ πᾶσιν, ἐπεύχομαι πᾶσαν εὐδαιμονίαν παντὸς ἀγαθῆ πλεονεκτήματος καθ' ἑκάτερον τὸν ἄνθρωπον, ὑμῶν φημι, ὧν τὰ ὀνόματα προσοίσει τῷ ἰδίῳ πατρὶ, καὶ ἐγχαράξει εἰς τὸν παρ' αὐτῷ βίβλον τῆς ἀτιμιαθίας, λέγουσα αὐτῷ λαμπρᾷ τῇ φωνῇ, παρ' οἷς ἔτυχον εὐνοίας, δεξιώσεως, ἀποδοχῆς τε καὶ φιλοφροσύνης, τούτων ἀμέλει τὰ ὀνόματα εἰσὶ ταῦτα βαθμηδὸν προϊόντα· καὶ ἐν πρώτοις.

Τῆ Μακαριωτάτῳ καὶ λογιωτάτῳ Ἀρχιεπισκόπῳ τῆς νέας Ἰουστινιανῆς καὶ πάσης Κύπρου κυρίῳ Φιλοθέῳ.

Τῆ παναοσιωτάτῳ καὶ λογιωτάτῳ Ἀρχιμανδρίτῃ τῆς Ἁγιωτάτης Ἐπισκοπῆς Κύπρου Κυρίῳ Παϊσίῳ.

Τῆ ἐν ἱερεῦσιν Αἰδεσιμωτάτῳ, καὶ λογιωτάτῳ Κυρίῳ Γεωργίῳ Πατέρα τοῦ ἐξ Ἀθηνῶν, Διδασκάλῳ τε τοῦ ἐν Ἐμπορίῳ Φλαγγινιανῆ Ἑλληνομουσείου.

Τῆ Αἰδεσιμολογιωτάτῳ ἐν Ἱερομοναχοις Κυρίῳ Τρύφωνος ἐξ Ἰωαννίνων.

Τῆ Αἰδεσιμολογιωτάτῳ ἐν ἱερεῦσι Κυρίῳ Παπαπατέρῳ Μαρέσι τῆ ἐκ Κερκύρας.

Τῶν

Τῶν ἐκλαμπροτάτων ϗ δυγενεςάτων υἱῶν Καραϊωαννου Κυρίου Γεωργίου, καὶ Κυρίου Στεφανου ἐξ Ἰωαννίνων.

Τῶν ἐκλαμπροτάτων καὶ δυγενεςάτων υἱῶν Μαρούτζη Κυρίου Παύλου, ϗ Κυρίου Ζαχαρία ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐκλαμπροτάτου καὶ δυγενεςάτου Κυρίου Λέοντος Καραϊωαννου ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐκλαμπροτάτου καὶ δυγενεςάτου Κυ Ἰωαννου Δέκα τοῦ ἐξ Ἀθηνῶν.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Δημητρίου Μπέρκου, τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου ϗ χρησιμωτάτου Κυρίου Ἰωαννου Μπέρκου, τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Λάμπρου Σάρρου, τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Σπάρου Δημητρίου, ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Σκαρλάτου Δημητρίου, ἐκ Λαρίσσης.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Ἀναγασίου Μπιτζίνου, ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμομεσικωτάτου Κυρίου Δημητρίου Παΐκου Θεσσαλομικέως.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ δυγενεςάτου Κυρίου Νικολάου Σελέκη ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Ἀναγασίου Βασιλείου ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμολογιωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Ἀντωνίου Παππᾶ ἐκ Σερρῶν.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Θεοφυλάκτου Βαβοῦ ἐξ Ἀθηνῶν.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Διονυσίου Ταρωνίτου ἐξ Ἀθηνῶν.

Τῆς χρησιμωτάτης ἑταιρείας Κυρίου Δημητρίου Παππᾶ καὶ Κυρίου Ἰωαννου Πάσχου, τοῦ ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Πολυζώη Σπείρου, τοῦ ἐξ Ἀργυροκάστρου.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Νικολάου Τζεκαλᾶ, ἐξ Ἰωαννίνων.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Πέτρου Κωμιάλη, τοῦ ἐκ Κύπρου.

Τοῦ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Ζαχαρία Φραγκίσκου, τοῦ ἐκ Κύπρου.

Τοῦ

Τῶ ἐντιμωτάτω καὶ χρησιμωτάτω Κυρίω Γ̓ωαμμω Τζιγκιρλάρα Σμυρναίω.

Τῶ ἐντιμωτάτω καὶ χρησιμωτάτω Κυρίω Γ̓ωαμμω Κομματᾶ ἐκ Πάτμω.

Τῶ ἐντιμολογιωτάτω Κυρίω Ρ̓ίζω Μπακάλη, ἐκ Τυρνόβω.

Τῶ ἐντιμολογιωτάτω Κυρίω Παναγιώτω Ρ̓ογκώτη ἀξ Γ̓ωαννίνων.

Τῶ ἐντιμολογιωτάτω Κυρίω Θεοφίλω Κατεργάρη ἀξ Γ̓ωαννίνων.

Τῶ ἐντιμωτάτου καὶ χρησιμωτάτου Κυρίω Παναγιώτου Κομπαξῆ, ἀξ Γ̓ωαννίνων.

Τῶ ἐντιμωτάτω καὶ χρησιμωτάτω Κυρίω Πολυζώη Λαμπαριτζιώτη ἀξ Γ̓ωαννίνων.

Τῶ ἐντιμωτάτω ϗ χρησιμωτάτω Κυρίω Ἀγαθασίω Δημητρίου Καλλίφω, ἐκ Λαρίσσης.

Τῶ ἐντιμωτάτω καὶ χρησιμωτάτω Κυρίω Νικολάω Δαμβόλη, τοῦ ἐκ Κρήτης.

Τῶ ἐντιμωτάτω καὶ χρησιμωτάτω Κυρίω Θεοδώρω Σράτη ἀξ Γ̓ωαννίνων.

Τῶ ἐντιμωτάτω καὶ χρησιμωτάτου Κυρίου Γ̓ωαννω Παππακώνστα ἀξ Γ̓ωαννίνων.

Τῶ ἐντιμωτάτω καὶ χρησιμωτάτω Κυρίω Γεωργίω Κυφαριώτη, τῶ ἀξ Ἀρτης.

ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ

Πρὸς τὰς φιλομαθεῖς.

ΟΡθῶς τῇ ὄντι γε φθάσας, Φιλομαθέσατοι, Πτολεμαῖος ὁ Κλαύδιος, ὃ τῆς Ἐπιστήμης εἶναι τοῖς ἀνθρώποις ἀπεφήνατο γένος, τῷ Μαθηματικῷ καὶ μόνῳ, αὐτὸ τοῦτο ὑπάρχεσαν ἀποδεδειχὼς, κἂν καὶ τὰ λοιπὰ δύο τοῦ θεωρητικοῦ μέρη, τὸ Φυσικόν φημι καὶ Θεολογικὸν, ὃ καὶ Μεταφυσικὸν ἤκουσεν, ὑπὸ τῷ ἐπιστήμῳ, ὡς ὑπὸ γένος οἰκεῖον σιωπωνύμως οἱ πλείους, ἵνα μὴ πάντες εἴπω, ὑπάγεσθαι ἐθέλουσι. Φροιμιαζόμενος γὰρ πρὸς Σῦρον ἐν τῇ περὶ μεγάλης αὐτοῦ Σωπάξεως φιλοπονήματι, τῷ τε ἀξίωμα, καὶ τὸ χρήσιμον, ὅσον τῆς περὶ τὰ θεῖά τε καὶ οὐράνια καταγινομένης θεωρίας πρὸς αὐτὸν δεῖξαι βουλόμενος, παραβάλλων ἀλλήλοις Φυσικὸν, Μαθηματικόν τε, καὶ Θεολογικὸν, τὰ μὲν δύο, φυσικόν τε καὶ Θεολογικὸν, οἰκασίαν μᾶλλον, ἢ κατάληψιν ἐπιστημονικῷ καλεῖσθαι δεῖν οἴεται· ἐπάγει δὲ καὶ τῷ αἰτίαν προσεχῶς λέγων, τὸ μὲν Θεολογικὸν, « διὰ τὸ ἀφανὲς αὐτῷ καὶ ἀνεπίληπτον, τὸ δὲ Φυσικὸν διὰ τὸ τῆς ὕλης ἄ- « σαπον καὶ ἄδηλον. μόνον δὲ τὸ Μαθηματικὸν ἐπιστήμῳ εἶναι ἀποφαίνε- « ται, καὶ τῇ τῆς ἐπιστήμης ὀνόματι καλεῖσθαι ἀξιοῖ, ἅτε δὴ βεβαίαν καὶ ἀμετάπταιστον, ὡς αὐτός φησι, τοῖς χρωμένοις τῷ εἴδησιν παρεχόμενον. εἰ γὰρ ἐπιστήμῳ τινὸς ἔχειν λέγομεν, κατὰ τὸν Φιλόσοφον, ὅτε τῷ αἰ- « τίαν αὐτῆ γινώσκομεν, δι' ὃ τὸ πρᾶγμά ἐστι, καὶ ὅτι αὐτῆ αἰτία ἐστὶ, « καὶ ἂκ ἐνδέχεται ἄλλως ἔχειν· τῷ δὲ ἐπιστημονικῷ γνῶσιν ἀκριβῆ τε εἶ- « ναι προσήκει, καὶ ἀμετάπταιστον, πάντως γε ἐν μόνοις τοῖς Μαθήμασι ἐ- πιστήμῳ πορίσασθαι δυνάμεθα. τῇ μὲν γὰρ ἀσωμάτων καὶ τῆς ὕλης παντὴ κεχωρισμένων, ἀκριβῆ γνῶσιν ἀνθρώποις ἐν τῷ μετὰ σώματος βίῳ λαβεῖν ἀμήχανον, ὅτι μὴ τοῖς τῷ ἀδύτῳ κατελλαμπομένοις φωτὶ τῆς θεσπιλίου θεόπτου, καὶ οἷς τὰ περί τε Θεοῦ, καὶ τῶν θείων μὴ ὑπὸ

σαρκὸς καὶ αἵματος ἀποκαλύπτεται, ἀλλ' ὑπὸ τοῦ Οὐρανίου Παιδὸς, κατὰ τὸ γεγραμμένον· ὑδρωπός γὰρ τῶν φαντασίαν τινὰ ἔχομεν, ὅτε μιᾷ τινὶ αἰτίαν αὐτῇ γνῶναι δυνάμεθα, μὴ μᾶλλον τῷ νοὸς πρὸς αὐτὰ ἀτενίζειν ἔχοντος, ἢ πρὸς τὸ τῆς Ἡλίου, φῶς αἱ νυκτερίδες. Ἐπὶ δὲ τῆς ἐνύλωντε καὶ σωμάτων ὑδέποτ' ἂν ἄπταιστον ἔχειν δυνάμεθα τὴν γνῶσιν, κἂν καὶ τὴν αἰτίαν αὐτῆς ἴδωμεν, διὰ τὸ τῆς ὕλης ἄστατον, καὶ παντοίαν ὑποκεῖσθαι ταύτα ἐκ τούτου μεταβολήν. εἰδὲ καί τινα ἐν τοῖς καθόλου, γενέσεί τε φημὶ καὶ εἴδεσι τῶν ἐνύλων, ἐπιστημονικὴν ἔχειν εἴδησιν δοκῶμεν, ἀλλ' ὡ κἂν τοῖς ἀπόμοις, ὡδ' οἵαν ἐν τοῖς μαθήμασι κοινῆς τε καὶ κατὰ μέρος. διὸ δὴ κ) πάντας ἔδει τὰς ἐπιστημονικῆς ἐφιεμένους γνώσεως, ἐν τοῖς μαθήμασι, πολλῷ μᾶλλον ἐναχολεῖσθαι, ἐν οἷς οἱ αὐτοὶ παρὰ πᾶσι λόγοι τε καὶ ἀποδείξεις, καὶ ὡδεμία κατὰ τοῦτο τοῖς τε πάλαι καὶ νυῦ διένεξις ἀνείσκεται καὶ διαφωνία. τίς γὰρ, εἰπέμοι, τὸ πὰς ἔχεις τὰ ἐγγώνε γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι, δυνατ' ἂν ἀνασκευάσαι, κἂν ὁ διαβατικώτατος εἴη νοῦς καὶ διαλεκτικώτατος; ἢ τίς μὴ δεχθείη πεπεισμένως τὰς ἐν ταῖς παραλλήλοις διὰ τῆς εἰς αὐτὰς ἐμπιπτούσης γραμμῆς συνισαμένας ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας εἶναι, καὶ ὅσ' ἄλλα γεωμετρικαῖς ἐμπεδοῦνται ἀποδείξεσι; τίς δὲ παρὰ τὸ ποσὸν συνεχές τε καὶ διωρισμένον, ἄλλοτι ἐπιστητὸν τῆς μαθηματικῆς ὑποθείη ὑποκείμενον; ἢ γοῦν ἄλλας ὑποθέσεις τε καὶ ἀρχὰς λαβεῖν, ὡς ἐν τῇ φυσικῇ θεωρίᾳ, ἐν ᾗ καὶ δόξαι τῶν φιλοσοφούντων διάφοροι ἀνεφύησαν. Ἐπεὶ δὲ ἕκαστον σύνεκά τε γίνεται, καὶ οὗδεν μάτην, τῆς δὲ ἐπιστημονικῆς θεωρίας τέλος ἡ τῶν ζητουμένων, ἢ γοῦν προβαλλομένων ἐπίλυσις, ὥστε ἡσυχάζειν τὸν νοῦν, καὶ μηκέτι πορρωτέρω προβαίνειν εἰς ζήτησιν τῶν θεωρηθέντων, τοῦτο δὲ μᾶλλον διὰ τῶν γεωμετρικῶν ἔχομεν δείξεων, ὡς δι' ἀναμφισβητήτων ὁδῶν, κατὰ Πτολεμαῖον, τῆς ἐν τοῖς Μαθήμασιν ἀποδείξεως γινομένης, δῆλον, ὅτι καὶ κατὰ τοῦτο ἀποδεκτέον τοῖς φιλεπιστήμοσι τῶν τὰ μαθηματικῶς προβαλλόμενά τε, καὶ ζητούμενα, περιεχόντων πραγματειῶν, καὶ περὶ τὴν τῶν ἀεὶ, καὶ ὡσαύτως ἐχόντων τὴν σκέψιν ἀναστρεφομένων. Παρὰ ταῦτα ἐπεὶ κἂν ταῖς ἄλλαις θεωρητικαῖς ἕξεσι συνεργὸς ἅσα διατελεῖ θαυμάσιος, ἡ Μαθηματικὴ, πρός τε τὴν τῶν ἀύλων γνῶσιν ἡμᾶς ποδηγετοῦσα, κ) πρὸς τὴν τῶν ἐνύλων κατάληψιν τὰ μάλιστα συμπελοῦσα, πῶς οὐ προληπτέα παντὶ φιλεπιστήμονι ἡ τῶν μαθηματικῶν προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων γνῶσις; τὰ γὰρ ὑπὸ τῆς μαθηματικῆς θεωρούμενα ἐπιστήμης κατὰ ἀφαίρεσιν ὑπάρχοντα, μέσην ἔχει τὴν τάξιν, καί τινα πρὸς ἑκάτερον τῶν ἄκρων περὶ συγγένειαν, πρὸς μὲν τὰ τῆς ὕλης ἐκτὸς, ὡς τῇ ἐπινοίᾳ, καὶ ταῦτα τῆς ὕλης κεχωρισμένα, πρὸς δὲ τὰ μετὰ τῆς ὕλης καὶ σώματα, ὡς πολλὰ τῶν ἐν ἐκείνοις διεχόμενα παθῶν· τομαὶ γὰρ καὶ ταῦτα προθέσεις τε καὶ

ἀφαι-

ἀφαιρέσεις, καὶ παντοίας ἐπιδέχονται μεταμορφώσεις, ὁμοιότητάς γε πάλιν καὶ ἀνομοιότητας κατά τε τὰς ἐν αὐτοῖς λόγους καὶ σχηματισμὰς δείσκομεν. Ἀλλά γε καὶ ὅσα τῆς ἀναλογίας τὰ εἴδη καὶ ὁποῖα, ἢ τὰ πώτα συνέχεται ἅμα καὶ σωτηρεῖται, ἡ Μαθηματικὴ ἀποδείκνυσιν. Οὗ γοῦν ἐν τοῖς μαθηματικοῖς προβλήμασί τε καὶ θεωρήμασιν, ὡς δεῖ προγυμναθεὶς, δωήσεται δήπουθεν ἀπονώτερόν τε ἅμα καὶ δύσοχώτερον εἰς τὴν τῶν αὐλῶν κατὰ τὸ ἐφικτὸν ἀνθρώποις ἐλθεῖν κατάληψιν, καὶ τοῖς ἀπορρήτοις τῶν κατὰ φύσιν ἐμβατεῦσαι. ὅσῳ δὲ καὶ τὴν ἡδονὴν τοῖς ἰδίοις ἐραστοῖς ἡ Μαθηματικὴ χαρίζεται ἐπιστήμη, ἴσασιν οἱ τοῖς κάλλεσι παύτης ἐνδυφῶντες, τὰ ἀμάραντα ἄνθη τῶν ἐν τῇ παύτης περιβόλῳ ἀποδρεπόμενοι φυτῶν, καὶ τῶν ἡδυπάτων καρπῶν πάντα συνεχῶς ἀπογεύομενοι, οὐκ οἶδα δ' ὅπως, ἢ τοσοῦτον εἰς γνῶσιν τοῖς ἀνθρώποις συντελοῦσα, καὶ ὅπω θαυμάσιος ἐπιστήμη τοῖς πλείοσιν ἤδη κατημέλητα· καὶ φυσικὴν μὲν θεωρίαν καὶ μεταφυσικὴν ῥήσεσιν αὖτις ἐν οὐκ ὀλίγοις. Ῥητορικήν τ' αὖ, Διαλεκτικήν τε, καὶ Ποιητικὴν οἱ πλείες διδάσκειν ἐπαγγέλλονται, Μαθηματικῆς δὲ οἱ μὲν πρὸς τοὺς πόνους ἀποδειλιῶντες, ἄλλοι δὲ ὡς μικρόν τι συμβαλλούσης τοῖς φιλομαθέσι, καὶ ἄλλοι ὡς παράδηλόν τινα ἐπαγγελλομένης διδάσκειν, οὐδένα πω λόγον ποιοῦνται, ἢ βραχύτι καὶ παύτης φροντίζουσιν, ὡς ἂν μὴ τὰ ἐν τοῖς φυσικοῖς εἰς λόγον ὑποδειγμάτων λαμβανόμενα τῶν μαθηματικῶν προβλημάτων ἀγνοῶσιν. Ἀλλὰ δεινόν γε καὶ παύ δεινὸν ἡ αἰσχυνσία, τῆς γὰρ μαθηματικῆς ἐπιστήμης πλεῖσοι τῶν Ἑλλήνων ποτὲ ἐρασταὶ, ὡς εἶγε καὶ ἄλλοι τινὲς, γεγονότες, ὅπως ἐνηγκαλίσαντο, καὶ ὅπω τοῖς συνεχέσι πόνοις τε καὶ ἱδρῶσιν ἀφθόνως αὐξήψαντο, ὥστε πολλὰ καὶ γενναῖα τὰ ἐξ αὐτῆς ἀναδεῖξαι γεννήματα, ἢ πατέρες ποθῶ μᾶλλον, ἢ ξοφοὶ τέκνων λογίζεσθαι, ὧν καὶ τὰ μέχρι τῦ δὲ σωζόμενα συγγράμματα παρὰ πᾶσι θαυμάζονται, ὡς Εὐκλείδου μὲν τὰ στοιχειώδες, Ἀρχιμήδους δὲ τὰ περὶ τὰς μηχανὰς, καὶ Πτολεμαίου τὰ περὶ μεγάλης συντάξεως, καὶ ἄλλων ἄλλα, ὅσ' ἀκριβῆ, καὶ τελειοτέραν τὴν περὶ ἄλλων τινῶν ὑποθέσιων ἔχουσι τὴν διδασκαλίαν. παντὶ δὲ ἐν τοσαύτῃ τῶν Ἑλληνικῶν πραγμάτων καταπτώσει ὄντων, καὶ μηδενὸς ἄλλου ἐν τιμῇ ὑπάρχοντος, ὡς καὶ πρῶτον ἐν τῷ βίῳ τύτῳ λογίζεσθαι τῶν ἐφετῶν, καὶ οἱονεὶ παρὰ παύτων λαγχάνεσθαι, τῶν παραχωρήσει θεᾶ τυραννικῶς ἤδη κρατούντων, ὅτι μὴ χρυσός τε καὶ ἄργυρος, καὶ χρήματα παρ' αὐτῷ ὁ σημέραι λησεικῶς τῷ δυσεβῶν ἀπαιτουμένων, ὡς ποτε καὶ ὁ Σωτὴρ δι' ἄκραν φιλανθρωπίαν τὸν κλῶσον. ὑδὲν ὄντως θαυμαστὸν, εἴγε τὸ Ἑλληνικὸν γένος, μετὰ τῆς ἄλλων αὐτῦ καλῶν, καὶ τῦ παρὰ τῆς μαθηματικῆς γεγύμνωται κόσμυ. ἐν ἠρεμίᾳ γὰρ τῆς παθῶν, καὶ γαλήνῃ τῆς πολυπαράκυ παύτης ζωῆς τὰς τῆς ἐπιστημῶν μαργαρίτας ὁ νῦς συλλέγειν δύναται, καὶ τὸν ποικίλον

τῆς μαθηματικῆς καὶ δύμηχανον ὑφαίνειν κεκόν. διὸ δὴ ἐν τοσαύτῃ παραχῇ τῶν πραγμάτων καὶ ζάλῃ τῇ μετὰ τὸν δεινὸν τοῦτον αἰχμαλωσίαν τῆς πολυκυμάντου ζωῆς, καὶ παντελεῖ ἔτι τῶν πάλαι ποτὲ ἐν Ἑλλάδι θαυμασίων Ἀκαδημιῶν τε καὶ κοινῶν μουσοτροφείων ἐρημώσει, τῶν μὲν ὑπὲρ τῶν πρὸς τὸ ζῆν ἀναγκαίων τὸν πᾶσιν αὐτῶν καταβαλλομένων φροντίδα, τῶν δ' ὅπως τὰς τῶν ἐργοδιωκτῶν φύγωσιν ὠμότητας σπουδαζόντων, μηδενὸς ὄντος τὸ σωματιλαμβανόμενον, μᾶλλον δὲ πολλῶν, εἴγε δεῖ τἀληθὲς εἰπεῖν, τὸ γένος τοῦτο, οὐκ οἶδα τίνος οὕνεκα καταφρονόντων. Ποιητικὴς μὲν κάλλος, Ῥητορικῆς δεινότης, Φυσικῆς τε καὶ Μεταφυσικῆς ἀκριβὴς θεωρία, ἠμέληταί πως καὶ ὑλαττόνηται. Μαθηματικῆς δὲ χάρις εἰς τὸ παντελὲς ἐξέλιπεν, ὡς μηδὲ εἴγε ἰῶ, ἢ ὅλως ποτὲ ἥκμαζε τῇ Ἑλληνικῇ πιστεύεσθαι γοῦν, κἂν τινες ταύτης ἐγεύσαντο, καθ' ὅσον ὁ καιρὸς αὐτοῖς συγκεχώρηκεν, ὡς ὅ, τε ἐν μακαρίᾳ τῇ λήξει γεγονὼς Χρύσανθος, ὁ Ἱεροσολύμων, Μελέτιος ὁ Ἀθηνῶν, Κωνσταντῖνος ὁ Γορδάτος, καὶ ἄλλοι τινὲς πρὸ αὐτῶν τε καὶ μετ' αὐτούς. ἀλλ' ἓν διὰ τὸ ἄλλοι τινὰ βραπτῶναι ἕκαστον ὁδὸν, ὅσα μόνον γραφῇ παραδῶναι ἠδυνήθησαν, ταῦτα τοῖς μεταγενεστέροις εἰς ἀναζωπύρησιν τοῦ πρὸς τοῦτο μαθηματικοῦ κατέλιπον ἔρωτος. Μεθόδιος δὲ ὁ Ἀνθρακίτης, ὁ ἐμὸς εἰς ταῦτα ὁδηγός τε καὶ ἡγεμὼν, ἐν τῇ αὐτῇ ταύτῃ παιδιᾷ, τὰ Γωνιναί φημι, Γραμματικὴν, Κυκλοπαιδείαν, Φυσικήν τε καὶ Μεταφυσικὴν παρὰ Γεωργίῳ προγυμναθεὶς τῷ Συγδηνῷ, δι' ἔρωτα δὲ τῆς Λατινίδος τὰς Οὐσιετίας καταλαβὼν, κἀκεῖ ἀνδράσιν ἐντυχὼν εἰς ἄκρον τὴν τῶν μαθηματικῶν ἐξησκημένοις θεωρίᾳ, καὶ παρ' αὐτῶν Γεωμετρίαν, Τριγωνομετρίαν, Γεωγραφίαν, Ἀστρολάβιον, Ἀστρονομικὴν, Ὀπτικὴν, Διοπτρικήν τε καὶ Κατοπτρικὴν, τήν τε Μηχανικὴν, καὶ ὅσα διὰ τὸ Ἀναλογικὸν Διαβήτου πολυτρόπως ἅμα καὶ δυμεθόδως θηρεύεται, διὰ μακρᾶς ἐκδιδαχθεὶς χρόνου, πρὸς τούτοις δὲ καὶ ἄλλαις τισὶν ἐγγυμναθεὶς μαθηματικαῖς πραγματείαις, ἵνα μὴ εἰς τὸν τοῦ ἀνδρὸς τοῦτο ἔπαινον τὸν λόγον ἐκτείνας, καθ' ἕκαστον λέγων, ἀκόσω παρά τινος, τὸ, περὶ σεαυτοῦ μὴ φράζε ἐγκώμια. ἐπανελθὼν εἰς τὴν ἐνεγκοῦσαν, τὴν τε ἐν Καισαρείᾳ φροντιστηρίῳ δεχθεὶς ἐπισασίαν, ἐκεῖ τὰ πλείω τῶν ῥηθέντων τοῖς γνησίοις ἀκροαταῖς, πολλαχόθεν εἰς αὐτὸν διαδραμοῦσιν ἐκδεδωκὼς, πολλῶν κἂν τοῖς ἐχάτοις καιροῖς τὸν εἰς τὴν μαθηματικὴν ἐξέκαυσεν ἔρωτα.

Ἐπεὶ δὲ διὰ τὸ καταπεῖγον τοῦ καιροῦ, καὶ τὴν τῶν ἀκροατῶν ἄπλησον εἰς τὰ τοιαῦτα ἔφεσιν, καὶ ἄλλας τινὰς καιρικὰς περισάσεις, βυλόμενος τὰ πλείω τῆς μαθηματικῆς ἐκθέσθαι εἴδη, πρὸς χάριν καὶ τοῦτο τῶν φιλομαθῶν ἀτεξεργαζόμενος, συμπτυγμένως πως, καὶ λίαν συντετμημένως τὴν περὶ τῶν μαθηματικῶν προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων πεποίηκεν ἑρμηνείαν, καὶ δι' αὐτὸ τοῦτο ἑκάστη τῶν εἰρημένων πραγματειῶν τῆς προσηκού-

σης

σης τῶν ἐν αὐτῇ ἀπελείπετο τάξεως, καὶ ῥυθμῦ· καὶ ἀνεπιτήδεια ὄντα εἰς παράδοσιν, τὰ παρὰ τοῦ ἀνδρὸς τότε ἐκδοθέντα, λύπης μᾶλλον, ἢ ἡδονῆς ἦσαν πρόξενα τοῖς φιλομαθέσιν. ἵνα μὴ ὁ πρότερον εἰς τὰ τοιαῦτα θερμότατος τῶν φιλομαθῶν ἔρως, εἰς τοὐναντίον μῖσος διὰ τὸ ἀσαφὲς καὶ δύσληπτον μεταπέσῃ, ὡς μηδὲ ἐπαίειν τότων τὰ λοιπὰ ἐθέλειν, καὶ τὸ λίαν πρόθυμον τῶν νέων εἰς τὴν ἄκραν μεταβαπῇ ἀμέλειαν, ἵνα μὴ τοίνυν ταῦτα συμβῇ, καὶ τὸ διὰ πολλοῦ σεσιωπημένον, καὶ πάνυ ὀλίγοις γνωστὸν, ἀρξάμενον ἤδη κατὰ μικρὸν κηρύττεσθαί πως, καὶ τοῖς ἄλλοις γνωρίζεσθαι, τῇ παρὰ θεοῦ ἀντιλήψει, ὡς καὶ τὸ πρότερον, ὑπὸ πάντων παρεωραθῇ, καὶ ὀλίγον ἀναπνεῦσαν εἰς τελείαν ἐπανέλθῃ νέκρωσιν, τότε γε οὕνεκα τὰ πλείω τῶν ἐκείνε φιλοπονημάτων πολλοῖς τε πόνοις, καὶ ἱδρῶσιν ἐκ ὀλίγοις εἰς ἣν ἤδη ὁρᾶται καταστρώθησαν τάξιν, καὶ τὴν προσήκουσαν, ὡς γ' ἐμοὶ δοκεῖ αὐτοῖς ἑρμηνείαν τε καὶ διαίρεσιν ἐδέξαντο, τινῶν μὲν τῶν ἐν αὐτοῖς προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων, ἀκριβῶς ἀναπτυχθέντων, ἄλλων δὲ ἀναπληρωθέντων, καὶ πολλῶν εἰς μείζονα τῶν κειμένων σαφήνειαν προσεθέντων, τῶν ὅρων ἐφ' ἑκάστε προεκτεθέντων. Γέγονε δὲ ἡ τότων ἔκδοσις διεξοδικωτέρα πως τοῦ προσήκοντος, καὶ τοῦτο πρὸς χάριν τῶν φιλομαθῶν. τὰ γὰρ ἀρχόμενα τῶν μαθημάτων, καὶ ὀλίγοις τισὶ γνωριζόμενα, ἀνεπτυγμένα μᾶλλον εἶναι ὀφείλει, ὥσπερ δὴ ἐξ ἐναντίας τὰ εἰς φῶς τῷ χρόνῳ ἐλθόντα, σωφροσύνῃ τε καὶ κομψότητι καλλωπίζεσθαι δεῖ. εἰδὲ καί τι ἐν αὐτοῖς ἐλλειπὲς εἶναι δόξῃ, καὶ τοῦ λόγε παραδραμόντος, ἀπέτυχε τῆς προπετοῦς σαφηνείας, συγγνώμην ἔχω, ὡς τοῦ καιροῦ μὴ συγχωροῦντος τὴν ἑκάστης πραγματείας ἐπαναλαβεῖν θεωρίαν, καὶ δευτέραν γενέσθαι τῶν ἐν αὐταῖς ἀναπόλησιν. οἶμαι δὲ, ἂν μὴ, κατὰ τὸν εἰπόντα, δειναὶ αἱ εὔνοιαι δικάσαι τὰς ψήφους, τοῖς ἀσμενῶς ἀποδεξομένοις, τὰ νεοφανῆ ταῦτα, ὡς ἔπος εἰπεῖν μαθήματα, καὶ μεθ' ὅσης τῆς προθυμίας τε καὶ προσοχῆς ταῦτα διδαχθησομένοις, οὐ τὴν τυχοῦσαν προμηνυσόμενα ἡδονήν. Ἐπαινῶ δὲ τὸ πρόθυμον, καὶ μεγίστω ἔχω τὴν χάριν τοῖς καὶ εἰς τύπον ταῦτα δοθῆναι συνεργήσασι πρὸς κοινὴν τῶν φιλομαθῶν ὠφέλειαν, ὧν τό, τε φιλότιμον, καὶ ὁ πρὸς τὰ καλὰ σφόδρα ζῆλος ἐν τοιούτοις ἐδείχθη καιροῖς, ἐν οἷς ἀκμαζούσης τῆς κακίας ἡ ἀρετὴ παροράται. τῇ δὲ Τρισηλίῳ θεότητι, ἧς τῇ ἀδύτῳ φωτὶ, καὶ τὰ ἐν τῇ σκότει τῆς ἀγνοίας ἀνακαλύπτεται, καὶ τὰ δοκοῦντα τοῖς ἀνθρώποις ἀδυνατὰ ἀποκαθίσαται, δόξα καὶ αἶνος εἰς ἀπεράντους αἰῶνας. Ἀμήν.

ΠΡΟΟΙΜΙΑΚΗ

Γεωρία περὶ εὑρέσεως, ἀρχαιότητος, αὐξήσεως, καὶ τῆς κατὰ τὸ τέλειον ἐπιδόσεως τῆς Μαθηματικῆς.

Βουλομένῳ τὰς Μαθηματικὰς ταύτας ἐκδοῦναι πραγματείας, ἐκ ἀπικὸς ἔδοξέ μοι προοιμιάσαι τινὰ, περὶ εὑρέσεως, ἀρχαιότητος, καὶ τῆς ἐπ' ἄκρον ἐξοχότητος τῆς Μαθήσεως, χάριν τῶν πρωτείρων μαθητιώντων. ὅπως γνώσωνται, ὁποία τις ἐπιστήμη πέφυκε, ἐν ᾗ καθιερῶνται, καὶ ὁποίᾳ τῶν ἐν τῷ βίῳ ἀγαθῶν κρείττονος στερῶνται, οἱ καταμελοῦντες αὐτῆς, διὰ τὸ ἀφρῆσθαι τῆς γνώσεως, ἀφίρηνται ἐπομένως καὶ τῆς ἕξεως, ἵν' οἱ πασῶν τῶν ἡλικιῶν ἐπὶ σοφίᾳ μέγα κεκτημένοι ὄνομα, ἐνδελεχεῖ σπουδῇ ἑαυτοῖς ἐποίησαντο, καὶ περὶ τοσούτου ἐποιοῦντο ταύτης, ὥστε προαιρεῖσθαι ὑπὸ λιτὸν ζῆν βίωνιον ἐκπονοῦντα μάθησιν μόνον, ἢ ὑπὸ τὴν χλαμύδα, πλοῦτον, δόξας, καὶ ὅσα τοῖς ἀφιλοσόφως πεθηπόσι περὶ πολλοῦ ἡγοῦνται. Ἐν τῷ ἐκφωνῆσαι δὴ τὴν περὶ τοῦ προκειμένου διήγησιν, ἐχρησάμην διαφόροις ἐπιστήμοις ἰσορρόποις περὶ ἀρχαιότητος, καὶ ἀκριβέστερον πραγματευομένοις, εἶναι σποράδην, περὶ τῶν ἀρχαίων σοφῶν, οἷον τοῖς Πρόκλῳ, Λαερτίῳ, Πολυβίῳ, Τέτζῃ, Πλουτάρχῳ, Βιτρουβίῳ, Γελλίῳ, καὶ τῶν παραπλησίων.

Πρώτη τοίνυν πασῶν τῶν ἐπιστημῶν εὕρηται ἡ Μάθησις, ὡς ἱστορεῖ Ἰώσηπος, ὁ Φλάβιος, βιβλίῳ πρώτῳ, κεφαλαίῳ δευτέρῳ, ἀνὴρ ἐπίσημος τῇ τε ἀρχαιότητι, καὶ τῇ γνώσει τῆς γραφῆς. φησὶ γὰρ τὸν ἀπογόνους τοῦ Σὴθ, πρώτους παρατετρῆσθαι τὴν τάξιν τῶν οὐρανίων σφαιρῶν, τὴν θέσιν, καὶ δρόμον τῶν ἀστέρων. ἵνα δὲ τὰ εὑρεθέντα, καὶ συντεχθέντα διὰ τῆς παρατηρήσεως, εἰς ἀμνημοσύνην μὴ ἐμπέσωσι τῇ γνώσει τῶν μεταγενεστέρων, προειρηκότος τοῦ Ἀδὰμ τὴν παγγενῆ φθορὰν τοῦ παντὸς, ἔσεσθαι μίαν μὲν τὴν κατακλυσμῷ, ἑτέραν δὲ τῇ ἐμπρησμῷ, ἀνέστησαν δύο στήλας, τὴν μὲν πλη-

πλίνθειον, τὸν δὲ λίθινον, καὶ ἐπέγραψαν ἐν ἑκατέρᾳ τὰ εὑρεθέντα. ὥστε εἰ τύχοι τὸν πλίνθειον ἀπολεσθεῖσαι τῷ κατακλυσμῷ, σωζομένη ἡ λίθινος, ἐπαρκέσοι τοῖς ἀνθρώποις εἰς εὕρεσιν τῆς ἐπιστήμης. ὡσαύτως καὶ ἡ πλίνθεινος, ἐμπρησμῷ τῆς ἑτέρας ἀπολεσθείσης. λέγουσι δὲ τὸν λίθινον σώζεσθαι καὶ εἰσέτι ἐν τοῖς καθ' ἡμᾶς χρόνοις κατὰ τὴν Ἀσυρίαν, ταῦτα μὲν δὴ ἐκεῖνος, ἐφ' οἷς πιστέον διά τε τὸ ἐπίσημον τὸ ἀνδρὸς, καὶ ἀρχαῖον τῆς Γεωρίας.

Μετὰ τὸν κατακλυσμὸν πρώτους τῶν ἀνθρώπων τοὺς Ἀσυρίους, καὶ Χαλδαίους φασὶ σέβεσθαι τὰς Μαθήσεις, ὡς παραδίδωσιν ὁ αὐτὸς Γάσιπος, Διόδωρος, καὶ Πλίνιος, παρ' οἷς ἀναθαλπόμεναι, ὑξήθησαν, καὶ ἐκπανθεῖσαι κατέλαβον τοὺς Αἰγυπτίους, μετὰ τὴν ἀπὸ Χαλδαίας, καὶ Ἀσυρίας ἀποδημίαν, κατὰ τὸν Ἀβραάμ. οὗτος γὰρ, ἐπιπάττοντος τοῦ θεοῦ, καταλιπεῖν τὴν πατρῴαν γῆν, ἐφίκετο εἰς Παλαιστίνην, καὶ ἐκεῖθεν εἰς Αἴγυπτον, ὁρῶν δὲ τοὺς ἐκεῖ σπουδάζοντας ἐνδελεχῶς περὶ τὰ χρειττω τῶν τεχνῶν, καὶ δύφυεῖς πρὸς ἀντίληψιν καὶ ὑψηλοτέρων, ὡς ὁ αὐτὸς Γώσιπός φησι, βιβλίῳ α: κεφαλαίῳ θ': τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ Ἀστρονομίας μετέδοτο αὐτοῖς, ὧν ἔδει προηγεῖσθαι τὴν Γεωμετρίαν. ὅτοι εἰς τοσοῦτον προήκησαν τῆς περὶ τὴν μάθησιν ἐπιδόσεως, ὥστε πιστεύεσθαι αὐτοὺς πατέρας μαθήσεως, οἷα δὴ Ἀριστοτέλης ἀποφαίνεται ἐν τῇ α: τῶν μετὰ τὰ φυσικὰ, κεφαλαίῳ α: τὰς μαθηματικὰς ἐπιστήμας πρῶτον ἐν τῇ Αἰγύπτῳ παρὰ τῶν ἱερέων εὑρεθῆναι.

Ἐκεῖθεν ἡ Μάθησις πονηποριήσασα ἀφίκετο εἰς Ἑλλάδα, καὶ τοῖς ἐκεῖ φιλοσόφοις ἐσπείσατο. Θαλῆς γὰρ ὁ Μιλήσιος, ὃς ἤκμασε πρὸ Χριστοῦ ἔτει φπ δ': πρῶτος τῶν Ἑλλήνων ἀπελθὼν εἰς Αἴγυπτον, καὶ ἐκδιδαχθεὶς ἐκεῖθι τὴν μάθησιν ἱκανῶς, μετήγαγεν εἰς Ἑλλάδα, ἀρχόμενος δημοσιεύειν τὴν Γεωμετρίαν. οὗτος ἐφεῦρε τὰς τοῦ α: κατ' Εὐκλείδην προτάσεις, ε: ιε: καὶ κς': τὴν τε β': γ': δ': καὶ ε: τοῦ δ': ἐφ' οἷς ἐφυρήματι μεγάλῃ διαχυθεὶς τῇ ἡδονῇ, βοῦν λέγεται θῦσαι. Αὐτὸς ἤρξατο παρατηρεῖν τὰς ἰσημερίας, ἡλιοστάσια, καὶ τροπὰς, μάρτυς ὁ Λαέρτιος, καὶ τὴν τοῦ Ἡλίου ἔκλειψιν αὐτὸς προεῖπεν, ὡς ἱστορεῖ Ἱππίας, καὶ Ἀριστοτέλης, ὡς δὲ Τέτζης, καὶ τὴν τῆς Σελήνης ἔκλειψιν προαναγεῖλαι τῷ Βασιλεῖ Κύρῳ, τούτου χάριν πρῶτος νομίθη πατὴρ καὶ εὑρετὴς τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης παρὰ τοῖς Ἕλλησι.

Μετὰ τοῦτον Πυθαγόρας ὁ Σάμιος ἀρχαιότατος τῶν φιλοσόφων, ἤυξησε, καὶ κατεκόσμησεν ἱκανῶς τὰς μαθηματικὰς ἐπιστήμας, ὑπερβαλόντως δὲ τὴν Ἀριθμητικὴν, ἅπο διεπάξατο, καὶ ἐκαλλιεργήσατο, ὥστε καὶ πᾶς λόγος τοῦ φιλοσοφεῖν παρ' ἐκείνῳ, ἐκεῖθεν παρήγετο, ἐκ τῶν ἀριθμῶν ἀμέλει. Τὴν δὲ Γεωμετρίαν, ὡς φησιν ὁ Λαέρτιος, αὐτὸς πρῶτος εὗρε τῆς ὕλης,

αὐ-

αὐτὸς τῇ ἀγχινοίᾳ τῆ τοῦ νοὸς εὗρεν ἐν ταῖς στοιχείοις τὴν λβ': μδ': μζ': καὶ μή: προτάσεις τῶ α: διὰ δὲ τὴν λβ': καὶ μζ': παναγυρίζει ἑκατόμβοιν, ὡς φησιν Ἀπολλόδωρος παρὰ τῷ Λαερτίῳ, ἐπὶ τοσοῦτον διήπλωσεν ἡγεῖτο τὴν εὕρεσιν τοιούτων θεωρημάτων. αὐτὸς τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη, καὶ τὰ πέντε κανονικὰ σώματα εἰς φῶς ἤγαγε τοῖς ἀνθρώποις, τήν τε Ἀστρολογίαν, καὶ Μουσικὴν ἀρχόντως καὶ ἐδίδαξε, καὶ μεγάλων κατέθετο περὶ αὐτὰς τὴν ἄσκησιν. ὅπως δ' ὑψηλὰ καὶ ἀγχινοῦς ἐζήτει περὶ τὰς ἐπιστήμας, ὥστε καὶ Ἀρισταρχης, καὶ Γυμνασιάρχης ἐχρημάτισε, καὶ τὰς ἰδίους ὀπαδὰς κοσμίοις καὶ περιφανέσιν ἐκάλλυνεν ἐπιστήμαις. Τούτῳ κατακολούθησαν Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος, καὶ Οἰνοπίδης ὁ Χῖος, ὧν ποιεῖται μνήμην ὁ Πλάτων ἐν τῷ περὶ ἐρασῶν διαλόγῳ, ἔνθα εἰσάγει τὰς νέους σπουδαγωνιζομένους τῇ Ἀναξαγόρᾳ καὶ Οἰνοπίδῃ περὶ τὰς τῶν κύκλων διαγραφάς. ὁ δ' Ἀριστοτέλης ἀποφαίνεται, Γεωμετρίαν τινὰ συγγεγράφθαι παρὰ τῶ Ἀναξαγόρᾳ, παρὰ δὲ Λαερτίου παρελάβομεν, ἀποδεῖξαι τὸν Ἥλιον μείζονα τῆς Πελοποννήσου. (σαφεῖς ἀρχαὶ τῆς Ἀστρονομίας) αὐτὸν διαλεχθῆναι καὶ περὶ τῶν ἐν Σελήνῃ κατοικιῶν. αὐτῷ ἀποδίδωσιν ὁ Πρόκλος τήν τε ιβ': καὶ κγ': τῶ α: τῶ στοιχειωτῶ, βιβλίω προτάσεις. Τούτοις διεδέχθησαν ὁ Βρίσων, ὁ Ἀντιφῶν, καὶ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος. οὗτοι ἐπαινοῦνται, καὶ ἐλέγχονται παρὰ τῶ Ἀριστοτέλους περὶ τὸ δοκιμαθέντος παρ' αὐτῷ τετραγωνισμῶ τῶ κύκλω. τούτων ὁ Ἱπποκράτης ὤφθη ἐπιστημότατος, ἐξ ἐμπόρου γὰρ Φιλόσοφος, καὶ Γεωμέτρης. ὃς παρὰ τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου, καὶ τῶν διπλασίασιν ἔτι τοῦ Κύβου πρῶτος ἐρεύνησατο διὰ τῶν δύο μέσων ἀναλόγων. ὧν οὗτοι, ὡς δείσιν καὶ μοναδικὴν πάντες οἱ μεταγενέστεροι περιεπτύξαντο, αὐτός τε ἐστὶ τὸ μέγα ἐκεῖνο καὶ λαμπρὸν ἐγκώμιον, ὡς ἱστορεῖ ὁ Πρόκλος, ὅτι συνέγραψε πρῶτος στοιχεῖα, καὶ τὰ παρ' ἄλλοις ὑρεθέντα ῥυθμῶδες διέταξεν.

Ὁ δὲ Δημόκριτος ὁποῖος ὢν περὶ τῶν Μαθηματικῶν ἐκ τῆς φιλοσοφίας αὐτῶ συνάγεται, θαυμάσιος γὰρ ἐπ' ἀμφοῖν. τούτω τὰ φυσικὰ ἀπομνημονεύματα, ἔτι ἴσως καὶ τὰ μαθηματικὰ, ἀπώλοντο, ὡς τινες λέγουσι, φθόνῳ τῶ Ἀριστοτέλους, τὰ ἴδια μόνα ἐφιεμένου ἐν ταῖς χερσὶ τῶν ἀνθρώπων διαβίβειν.

Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος, καίπερ αὐτῶ μαθηματικὰ συγγράμματα οὐ σώζονται, τοσοῦτον μοί τοι μεγάλως ἐκληρώσατο ὀνόματος, ὅσον καὶ τῶ Πλάτωνος ἀπομνημονεύεται διδάσκαλος. Κατελάβομεν ποίνυν ποτὲ καὶ τὸν Πλάτωνα. ὕτινος ὑδεὶς ἕτερος εἰς μεῖζον φῶς ἤγαγε τὰς Μαθηματικὰς ἐπιστήμας. αὐτὸς μεγάλως καταπεθέμενος σπουδὴν περὶ τῶν Γεωμετρίαν, μεγίσαις καὶ προθύμοις κατεπλήτισεν, αὐτὸς πρῶτος ἐφεύρετης τῆς Ἀναλύσεως, ἀληθεστάτης ὄντως ὁδῶ τῶ δείκνειν καὶ συλλογίζεσθαι. τὰ ἴδια φιλοσοφικὰ συγγράμματα μαθηματικοῖς λόγοις διεκείνισε καὶ ἀπέδειξε, καὶ παῦ ὅ, τι ἐν

μαθη-

μαθηματικοῖς ἀξιάγαστον, ἰῶσθε τῇ φιλοσοφίᾳ. Ἀκαδημίαν ἐν Ἀθήναις ἀνήγειρε, καὶ ἐπὶ τῆς πύλης ἐπέγραψε (ἀδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω.) λαμπρὸν πάντι τεκμήριον, ἐφ' ὅσον οὐκ ἀλόγιστος, ἢ ἀωφελὴς, ἢ ἄκοσμος, ἀλλ' οἰκεία, ἐπωφελὴς, καὶ ἐπιτηδεία ἡ μάθησις πρὸς τὸ ὀρθῶς φιλοσοφεῖν. ὅσον δὴ πεπόηθεν ὁ Πλάτων ἐχρημάτισε θεατὴς καὶ σπουδαῖος περὶ τοὺς μαθήσιν, εἴσεται ὁ ἀναγνὺς τὰ αὐτῶν ἀπομνημονεύματα.

Ἡ Ἀκαδημία τῶ Πλάτωνος Κέρας ἀνεδείχθη Ἀμαλθείας, κατεκόσμησε Μαθηματικοῖς τὴν Ἑλλάδα. ξεισκαίδεκα οἰκείους τῶ Πλάτωνος μαθητὰς παραδίδωσιν ὁ Πρόκλος, παραχθέντας ἐν ταύτῃ, ὧν διαφερόντως σπουδῇ καὶ ἀσκήσει ἀπηρτίσθαι τὴν μαθηματικήν. ὧν ἦν Λεοδάμας ὁ Θάσιος. Ἀρχίτας ὁ Ταραντῖνος, Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος. παρ' ὧν διαφερόντως ἐπλατύνθησαν τὰ μαθηματικά. ὁ μὲν Λεοδάμας ἀκριβῶς ἐκδιδαχθεὶς τὴν Ἀνάλυσιν παρὰ τῶ Πλάτωνος, μεγάλῳ εἰς ἔπειτα καταβαλὼν τὴν σπουδὴν περὶ αὐτὴν, μεγίστῳ περιεποιήσατο καὶ τὴν ἐπίδοσιν, ᾗ τινι ὁδηγῷ χρησάμενος, πλεῖστα ἐφεῦρε μαθηματικὰ θεωρήματα, ὡς παρὰ Λαερτίῳ φαίνεται. τῶ δὲ Θεαιτήτῳ διαφημίζονται συγγράμματα, καὶ στοιχεῖα Γεωμετρικὰ, καὶ ἡ τῶν κανονικῶν σωμάτων διαγραφὴ καὶ παραβολή. ὁ δὲ Εὐτόκιος παραδίδωσι συγγραφῶαι τῇ Ἀρχύτᾳ καὶ στοιχεῖα Γεωμετρικὰ, καὶ ἄλλον παρὰ τὸν ῥηθέντα, τρόπον περὶ διπλασιάσεως τῶ Κύβε. αὐτὸν παραδῦναι τῷ μαθηματικῷ χρήσιμον τοῖς χειροτέχναις. ὅθεν καὶ παρὰ Γελλίῳ φαίνεται, περιτεραὶ ξύλινον κατασκεύασθῶαι παρ' αὐτῶ, καὶ ἀφίπτασθαι. ἕτως ἐς ἄκρον ἀφήκετο σοφίας ὁ ἀνὴρ, ὥστε καὶ τοῖς φύσει ἀκινήτοις παρέχειν κινητικῷ ψυχῷ μηχανικῶς. ᾧ τινι ἐπόμενοι πολλοὶ τῆς μηχανικῶν τεχνεργῶν, θαυμάσια τῷ κόσμῳ ἐπέδειξαν διὰ τῆς τέχνης. Ἀρχίτας μὲν ἦν καὶ μαθηματικὸς ἐστρατήγει, καὶ ἐπὶ ταῖς παρίαις μάχαις πεντάκις στρατοπεδάρχης, ποσάκις καὶ θεραμβεύσας ἐστεφανῶτο.

Νεοκλείδης μέγας τῇ φήμῃ, λαμπρὸς τῷ ὀνόματι, καὶ τῶ ἰδίῳ μαθητῶ Λέοντος τάχα περιβλεπτότερος ὑπὲρ τῆς αὐτῶ ἐφευρημάτων ἐν τῇ μαθήσει. ὁ γὰρ Λέων ἐπαδὸς αὐτῶ συνέγραψε στοιχεῖα τῆς καθόλου μαθήσεως, καὶ τὰ ἀνηθέντα ἤυξησε, καὶ πρὸς χρῆσιν ἐπιτηδειότερα παρεσκεύασε. τότε καὶ μόνε ἐπαξίως συμπεφθημένος τοῖς ἀρχαίοις γενήτορσι τῆς μαθήσεως.

Εὐδόξιος ὁ Κνίδιος παραπλήσιος τοῖς ὡσπέρω, πολὺς γεγονὸς τῆς ἀριθμητικοῖς, καὶ ὡς ἱστορεῖ ὁ Σχολιαστὴς, ἅπαν τὸ στοιχειῶδες κατ' Εὐκλείδου πέμπτον βιβλίον συνέγραψε, ὁμοίως τε καὶ ἄλλα στοιχεῖα, καὶ γενικώτερα ἀπετέλεσε. καὶ τὰς κωνικὰς τομὰς ἀρχῶν λαβὼν παρὰ τοῦ Πλάτωνος ἱκανῶς ἤυξησε. πρὸς τούτοις αὐτὸς πρῶτος πέφυκεν αὐτηρὸς τῆς Ἀστρονομικῶν ὑποθέσεων, καὶ τὰς ἐκ τῆς Γεωμετρίας πηγὰς, ὡς ἀνωτέρω ὁ Ἀρχίτας εἰς ὀργανικῷ καὶ μηχανικῷ προσήρμοσε. Ἀμύκλας ὁ Ἡρα-

κλειότης, Μεναιχμος, ϗ Δημόστρατος ὁ τότε ἀδελφὸς, Ἑλικῶν ὁ Κυζικηνὸς, Θαίδιος, Ἑρμότιμος ὁ Κολοφώνιος, ϗὶ Φίλιππος ὁ Μηδμαῖος, πάντες ἐπὶ Πλατωνικοὶ, τῷ Γεωμετρίαν πολλῷ τελειοτέραν ἀπεργάσαντο. ὁ μὲν Μέναιχμος ἐφάψατο τῶν κωνικῶν τομῶν ἀχθεὶς, διὰ τὸν ἐπ' ἄκρον περὶ αὐτὰς σπουδὴν, ὧν τῇ δυνάμει εὗρε τὰς δύο μέσας ἀναλόγους. δι' ὃ ϗ προτιμᾶται τῶν ἄλλων παρὰ τῷ Εὐτοκίῳ. ὁ δὲ Θαίδιος, ϗ Ἑρμότιμος οἰκεῖα συνέγραψαν στοιχεῖα γενικώτερα, ϗὶ πλατύτερα. πάντες ἐπὶ τῆς Πλατωνικῆς Ἀκαδημίας γεννήματα, τῷ τε μαθηματικῷ ϗ φιλοσοφίαν εἰς τελειότητα ἐνεγκόντα, ὡς φησι Πρόκλος. ὁ δὲ Ξενοκράτης ἀκροατὴς τοῦ Πλάτωνος, ϗὶ Διδάσκαλος ὡρὸς καιρὸν τοῦ Ἀριστοτέλους, περιβλεπτος περὶ τὸν μαθηματικὸν, ὅτου ἐθέλοντί τινι αὐτοῦ ἀκροατῇ γενέσθαι, ἀπείρῳ Γεωμετρίας, ἄπελθέ φησιν, ἐ γὰρ ἔχεις λαβὰς φιλοσοφίας.

Περὶ δὲ τοῦ Ἀριστοτέλους τί ἂν λέξω· πάντα τὰ αὐτοῦ συγγράμματα πλήρη μαθηματικῶν ἀποδείξεων. ἐξ ὧν συλλέξας, συντέθεικεν ὁλόκληρον εἰς βιβλίον ὁ Βλαγκάνος, εἰς τὸν νεωτέρων Λατίνων. Ἐκ τῆς τοῦ Ἀριστοτέλους χολῆς δύο μόνοι διὰ φήμης ἄγονται, Εὔδημος, ϗὶ Θεόφραστος· ἕτος συντέθεικε δύο βιβλία περὶ ἀριθμῶν, περὶ Γεωμετρίας τέσσαρα, ϗ ἓν περὶ ἀτόμων γραμμῶν, αὐτὸς ϗὶ μαθηματικῷ ἰσορίαν συνέγραψεν. ἐξ ἧς ὅ,τε Πρόκλος, ϗ ἄλλοι τὰ οἰκεῖα ἐδωρεάσθησαν.

Τούτοις διεδέχθησαν Ἀριστᾶιος, Γνίδιος, ϗ Τιμοχάρης, Γεωμέτραι μεγάλου ὀνόματος ϗ ἀγχινοίας, ὧν εἰσι γεννήματα τὰ κατ' Εὐκλείδου πέντε περὶ στερεῶν βιβλία. ὁ γὰρ Εὐκλείδης μετ' αὐτοὺς ἐντυχὼν αὐτοῖς, ϗ ἄλλοις παρ' ἀρχαιοτέρων φιλοπονηθεῖσι στοιχείοις, ϗ ἀκριβῶς θεωρήσας, τὸ μὲν ἐλλειπὲς ἀνεπλήρωσε, τὸ δὲ συνηπτυγμένον, ϗ ἀσαφὲς εἰς κρείττονα μετήγαγε σαφήνειαν, ἥνυσέ τε ϗὶ ἀσφαλέστερον ἀπέδειξε, διαπαντὸς εἰς ὃν πανοῦ πρόσω ῥυθμὸν, ἐδωρήσατο ἡμῖν καταλιπὼν ταῦτα τὰ Στοιχεῖα, ἅτινα ἤδη παντοχόθι τῆς Οἰκουμένης ἀνὰ χεῖρας εἰσι τῶν εἰς τὸν Λαβύρινθον τῆς Μαθηματικῆς ἀφιγμένων ἐνδιατρίψαι νέων. ὃς ἀπέτισε τὸ κοινὸν χρεών, πρὸ σπορᾶς ἔτει πρὸ Χριστοῦ. Καταλοίπησαν αὐτῷ μὴ ἑκατὸν χεδὸν ἔτη Ἐρατοσθένης τε ϗ Ἀρχιμήδης. Ἐρατοσθένης μὲν ἐπίσημος ὤφθη παρὰ τοῖς Μαθηματικοῖς διὰ τὰ αὐτοῦ συγγράμματα, ὧν πολλὰ μὲν ἠφάνισται τῷ χρόνῳ, σώζεται δὲ ϗί τινα. ὡσαύτως τε ϗὶ τῶν τοῦ Ἀρχιμήδους τὰ πλεῖστα ἀπώλοντο, ἐν τοῖς σωζομένων γὰρ συνάγεται τὰ ἀπολωλότα.

Ἀλλ' ὅταν τὸν Ἀρχιμήδην ὀνομάζω, τὸν κολοφῶνα τῆς ἀνθρωπίνης ἀγχινοίας εἰς νοῦν ἀντιλαμβάνομαι, ϗ τῷ λύσιν ἀπάσης ὑψηλοτέρας μαθηματικῆς διδασκαλίας. τὰ σωζόμενα αὐτοῦ ἀξιάγαστα συγγράμματα ἐξέδωκαν εἰς φῶς ὁ Πολύβιος, ὁ Πλέπαρχος, ὁ Τζέτζης, ϗ ἄλλοι. Σύγ-

χρο-

χρονος τῷ Ἀρχιμήδῃ ἤκμασε Κόνων ὁ Γεωμέτρης καὶ Ἀστρονόμος, ὃν τὸν θάνατον πενθεῖ Ἀρχιμήδης ἐν τῷ περὶ τετραγωνισμῶ Παραβολῆς βιβλίῳ. μετὰ τούτους ἀμέσως μικρῷ παραδραμόντος χρόνου, ἐξῆλθεν εἰς φῶς Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος, ἄλλος κοσμήτωρ τῆς Γεωμετρίας, τοῦνεκα καὶ τῶν κλῆσιν τετύχηκε Μέγας Γεωμέτρης· τούτου σώζονται ἐπτὰ βιβλία περὶ τῶν κωνικῶν. τούτῳ ὀφείλονται τὰ ι δ': καὶ ιέ: κατ' Εὐκλείδου, συντετμημένα παρὰ τοῦ Τυχικλέους, μετὰ τὸν Ἀπολλώνιον ἤκμασαν Ἵππαρχός τε καὶ Μενέλαος, ὧν ὁ μὲν ἓξ, ὁ δὲ τέσσαρα συνέγραψαν βιβλία περὶ τῶν ὑποτεινουσῶν ἐν τῷ κύκλῳ, δι' ἃ δὴ τῶν τυχεῖν οἴδαμεν χάριν ἀμφοτέρων, ἐπωφελησάντων ἡσῶν πραγματειῶν. ὁ δὲ Μενέλαος συνέγραψε καὶ ἕτερα βιβλία περὶ σφαιρικῶν θεωρημάτων. Θεοδόσιος δὲ ὁ Τριπολίτης τρία περὶ σφαιρικῶν ἐπωφελέσαντα βιβλία ἡμῖν καταλιπεν, ἅτινα ὁσημέραι αὐταῖς χερσὶ πάντων διαφέρει.

Ἕτει τῷ ὁ: μετὰ Χριστὸν ἐξῆλθεν εἰς τὸ φῶς Πτολεμαῖος ὁ Κλαύδιος, ὁ Κορυφαῖος τῶν Ἀστρονόμων, ἀνὴρ ὄντως θαυμάσιος, καὶ ὡς φησι Πλίνιος ὑπὲρ τοῦ φύσιν τῶν θνητῶν. οὗτος δὲ μόνον περὶ τοῦ Ἀστρονομίαν μεγάλας ἐποιήσατο τὰς ἐπιδόσεις, ἀλλὰ καὶ Γεωμετρης ἀνεφάνη ἄριστος, ὡς βεβαιοῖ τὰ τοσαῦτα ὑπ' αὐτοῦ γραφέντα Γεωμετρικῶς. καὶ μάλιστα τὰ περὶ τῶν ὑποτεινουσῶν ἓξ βιβλία τοῦ Μενελάου, τέσσαρα δὲ τοῦ Ἵππάρχου, συνεπτυχθέντα παρ' αὐτοῦ εἰς πέντε μόνα θεωρήματα, καὶ Πλάτωνος ὁ ἐπιστημότατος περὶ τοῦ φιλοσοφίαν, καὶ τὰ φιλολογικά, ἔχ ἧττον καὶ περὶ τὴν Μαθηματικοῦ ὧν, ὅπερ βεβαιοῖ τὰ παρ' αὐτοῦ συγγραφέντα μαθηματικὰ προβλήματα διαφόρων εἰδῶν. Τὰ δὲ τοῦ Εὐτοκίου Ἀσκαλωνίτου, καὶ Ἀπολλωνίου πολυμαθοῦς σχόλια εἰς τὰ τοῦ Ἀρχιμήδου, τίς ἀγνοεῖ; παρὰ τοῦ αὐτοῦ Εὐτοκίου ἀπαριθμεῖται Γεωμετρικὰ συγγράμματα καὶ περὶ διπλασιάσεως κύβου, τὰ τοῦ Φίλωνος, τοῦ Διοκλέους, τοῦ Σπόρου, τοῦ Ἥρωνος, καὶ ἄλλων, οἷον ἐξοχωτέρων ἐν τοῖς Γεωμετρικοῖς, καὶ Μηχανικοῖς Διδασκάλων. καὶ ὁ μὲν Ἥρων ἀμφοτέροις δόκιμει Μηχανικῇ τε καὶ Γεωμετρίᾳ, ἡ γὰρ παρ' αὐτοῦ παραδοθεῖσα διπλασίασις τοῦ κύβου, βιβλίῳ γ': προτάσει ζ': ἔλεγχός ἐστι τῆς μεγαλονοίας τοῦ ἀνδρὸς, καὶ παρὰ πᾶσι φέρει τὰ πρωτεῖα. οἱ δὲ ἕτεροι τῇ μὲν χρόνῳ ὕστεροι, τῇ δ' ἀγχονοίᾳ περὶ τὰ τοιαῦτα τοῖς ἀρχαίοις συναριθμηθέοι. μετὰ τούτους ἤκμασε Κτησίβιος ὁ Ἀλεξανδρεὺς, ὃ τὰ ἀξιάγαστα μαθηματικὰ συγγράμματα κρείττονα ἔδοξαν πάντος ἐγκωμίου παρὰ τοῦ Βιτρουβίου, Πρόκλου, Πλινίου, καὶ Ἀθηναίου, τούτῳ ἐναμιλός τε καὶ σύγχρονος περιῆν ὁ Δύδιμος, ἄνθρωπος δόκιμος παρὰ τοῖς Μαθηματικοῖς, ὡς καὶ αὐτοῖσι προτιμᾶται τὰ Εὐκλείδου παρὰ τοῦ Πρόκλου, παρὰ τὰ αὐτοῦ ἀπομνημονεύματα.

Συγκαταλέγεται τῷ ἀνωτέρω ὅ, τε κλυτὸς Διόφαντος, Ἀλεξανδρείας καὶ αὐ-

αὐτὸς γόνος, μέγας περὶ τὴν Ἀριθμητικὴν, οἷος Ἀρχιμήδης, Ἀπολλώνιός τε καὶ Εὐκλείδης, περὶ τὴν Μηχανικὴν καὶ Γεωμετρίαν. τῆς τότε ἀγχινοίας ἐφεύρημά ἐστιν ἡ θαυμάσιος ἐκείνη Ἀναλυτικὴ, καὶ σωθετικὴ μέθοδος, ἣ παρὰ τοῖς νεωτέροις Ἀραβικῷ ὀνόματι Ἄλγεβρα ἀποκαλεῖται. παρὰ τὰ ἄλλα αὐτοῦ γραφέντα, τοῦτο καὶ μόνον ἐπαρκεῖ πρὸς δόφημίαν τῆς μεγαλονοίας τοῦ ἀνδρὸς, θεῖον γάρ ὄντως ἐστὶν ἐφεύρημα, ἀνακαλύπτει γὰρ ἄδυτα τῆς φύσεως, καὶ ἃ ἀδυνατα δοκεῖ τοῖς διαβατικωτάτοις τῇ νοΐ, αὕτη ἡ μέθοδος ῥᾳδια καὶ πάχιστα ἀποδεικνύειτε, καὶ λύει. παρὰ τοῖς Ἀριθμητικοῖς ἐπαξίως δόφημεῖται, Νικόμαχος καὶ Σπεύσιππος, ἐπίσημοι ἄμφω, περὶ τὴν Γεωμετρίαν, Ἀριθμητικὴν, καὶ Μουσικὴν, οἵους τὰ περὶ τῶν μαρτυρεῖ οἰκεῖα ἀπομνημονεύματα, καὶ παῦτα τὰ περὶ τομῆς κυλίνδρου καὶ κώνου δύο βιβλία τοῦ Σπεύσιππου.

Τούτοις κατακολούθησαν Πρόκλος ὁ Λύκιος, Θέων, Πρόκλος ἄλλος, (ὃς ἐνέφρησε τὸν τοῦ Βιταλιανοῦ στόλον πολιορκοῦντος τὴν Κωνσταντινούπολιν τῇ ὀπτικῇ μηχανῇ τῶν κατόπτρων, ἐπὶ βασιλείας Ἀναστασίου ἔτει τῷ σωτηρίῳ φιδ': ὡς παραδίδωσιν ὁ Ζωναρᾶς) καὶ Πάππος, ὃς περιοείζει τὸ πλῆθος τῶν Μαθηματικῶν, τῷ μὲν χρόνῳ ὕστατος πάντων χρεὼν, ἐκτὸς τοῦ Πρόκλου τοῦ νέου, τῇ δὲ λαμπρότητι τοῦ ὀνόματος συγκαταλεκτέος τοῖς πάλαι. ὁποίας γὰρ ἐπιδόσεις ἔσχον περὶ τὴν Μαθηματικὴν οἱ ξένοι ὅποι, τὰ αὐτῶν ἐπίσημα συγγράμματα δηλοῖ. τοῦ μὲν τὰ εἰς τὰ τοῦ Εὐκλείδου σχόλια, καὶ Πτολεμαίου, τοῦ δὲ ὡσαύτως τὰ περὶ πάντα τοῦ Πτολεμαίου. ὥσπερ καὶ τὰ τοῦ Πάππου, σὺν τοῖς τοῦ Πτολεμαίου πᾶσι σχόλια, καὶ ἡ παρ' αὐτοῦ συγγραφεῖσα συλλογὴ τῶν μαθηματικῶν ἐν παντὶ εἴδει μαθήσεως, συμποσυμένη εἰς ὀκτὼ βιβλία, ὧν τὰ μὲν δύο, ὅποι ἀπώλοντο, ἢ κρύπτονται ἐν βιβλιοθήκῃ τινὶ ἀδήλῳ, τὰ δὲ λοιπὰ ἓξ, ποσοῦτον ἀφθόνως παντοχόθι ὑπάρχει, καὶ παρεχόμενα παντοῖα μαθήματα, ὥστε ὑπὸ πάντων ἀνὰ χεῖρας τῶν πάλαι ἀπομνημονεύματα συναριθμεῖται. ἤκμαζον δὲ ὅποι καὶ τὸν τέταρτον αἰῶνα.

Ἔχετε πίνω, ὦ μενεῖς Ἀναγνῶται, βραχεῖαν ἱστορίαν περὶ ἀρχῆς καὶ προόδου τῆς Μαθήσεως, ἐξ ὧν δηλοῦται ἡ ἀρχαιότης, καὶ εὐχοότης αὐτῆς, καὶ ὅτι οἱ αὐτοὶ ἡγεμόνες τῆς Φιλοσοφικῆς Ἀριστοκρατείας ἔτεκον σὺν τύχῃ δύο δυδύμους ἀδελφὰς τὴν φιλοσοφίαν, καὶ τὴν Μαθηματικὴν, ποσοῦτον οἰκείας καὶ συγγενεῖς, ὥστε ἀδυνατον ἀπ' ἀλλήλων χωρίζεσθαι, διὰ τὸν ἔμφυτον τῆς ὁμοιότητος δεσμὸν, καὶ τὴν ἑτέραν ἀτελῆ εἶναι, ἐκλειπούσης τῆς ἑτέρας. τοῦτο γὰρ μάλιστα ἐκίνησέ με ἐκδοῦναι τύποις τὰς παρούσας φραγματείδας, βουλόμενον εἶναι κοινὰς πᾶσι τοῖς φιλεπιστήμοσιν Ἑλλήνων παισὶν, εἰκαὶ πολλαῖς ἐνέτυχον δυχερείαις, οὐχ ἥττονας ὑπήνεγκον καὶ τὰς πόνους, πρὸς σύστασιν τῶν φραγμάτων, προτιθέμενος τὸ κοινωφελὲς τοῦ ἰδίου,

καὶ

καὶ πάντα δεύτερα ποιῶν, τοῦτο καὶ μόνον ἡγούμενος φιλοτιμίαν, τὸ ἀναφανῆναι ταῦτα αὖθις τῇ Ἑλληνικῇ γενέσθαι. εἰδὲ καί τι παρέδραμε περὶ τὴν ἐπανόρθωσιν, συγγνώμη τῷ αἰτοῦντι, ἔτε οἰκεῖον, ἔθ' ὑπ' ἀμελείας, ἀλλ' ἐξωτερικὸν τὸ αἴτιον, πῶς γὰρ ὁ ὑπ' ἀγάπης κινούμενος, τοιοῦτόν τι πάθῃ; Ἐῤῥωμένοι διαβιώσοιτε, καὶ εὐδαιμονοῖτε ἐν τοῖς κρείττοσι.

Εἴδησις περὶ τῆς Ἀριθμητικῆς.

Γνῶτον, ὅτι τὴν προσεθεῖσαν Ἀριθμητικὴν καὶ πέρατον ἀποπληρώσαν τόμον, μήτε μνείαν τινὰ ταύτης τῇ ἐκδοτῇ ποιεμένῳ ἐν τῇ προσφωνητικῇ εἰδήσει περὶ τῶν ἄλλων πραγματειῶν, μήτε συμπεριλειομένῳ ἐν τῇ τιμῇ τῶν ἄλλων, ἐπαγγελλόμενός τις ἐκδοῦναι τύποις ἄλλοθι, ἀπέτυχε τοῦ σκοποῦ. μαθὼν δ' ἔγωγε τὸ συμβὰν, καὶ παρακαλούμενος ὑπὸ πολλῶν τῶν καθ' ἡμᾶς, καὶ μάλιστα τῶν ἐμοῦ καθηγεμόνος, καὶ μήθ' ὑπερεγκὼν χηρεύειν τὰ καθ' ἡμᾶς τοιαύτης ἐπωφελοῦς πραγματείας, καὶ κοινῆς ὑπηρέτιδος πάσαις ταῖς ἐπιστήμαις, καὶ μάλιστα τῇ ἐμπορικῇ βίῳ, συμπεῖθμησα ταῖς ἄλλαις πραγματείαις, καὶ τοῖς βουλομένοις κτῆσαι, παρέχεται εἰς τιμὴν δέκα λιβῶν τῇ Ἑνετιῶν, ὅσον ἀμέλει τιμεῖται ἐν τῷ τύπῳ, μὴ τὸν τύπον γὰρ τιμηθήσεται πλείονος.

Ε Π Ι Γ Ρ Α Μ Μ Α.

Τῷ Κυρίῳ Ἰγνατίῳ Μπαξοπύλῃ τῷ Κρητὶ, πρὸς τὸν Μεθόδιον.

Ὡ Σ ἐθέλοντα δύειν ἀπὸ Ἑσπερίης ἐφ' Ἑῴαν
Καλὰ Μαθήματ' ἄγεις ὡς παλινανιχέως.
Ὥν τε ὁδηγὸς ἔης τέσσι Σοφῶν Γενετήρων,
Τοῖσιν ἔσηθ' ἑξῆς, ὥς τε δίδωσι Θεός.
Τῷ ἥπιός περ ἐὼν, ὡς Τέξακτυς, Μεθόδιε,
Εὕρες Ἀθανασίῳ Λείμμασι σῆς Σοφίης.

Πρὸς τὸν Αἰδεσιμελλογιμώτατον Κύριον Μπαλανὸν.

Νῆσον Ἰητορίη σοβέει, ἀπὸ τ' ἄπο Λιμὸν,
Καὶ Φαέθων ὄρφνῳ ἀντολίηθε φαύας.
Ἡ δὲ Σοφῇ Μπαλανοῖο Μάθησις, ὅσῳ ἀποαιρεῖ
Πλεῖν κείνων, Δύμῳ Ἑλλάδος Ἀδμολίης.

Εἰς τὼ Μάθησιν.

Τίς ποτ' ἐγὼ πλέθω βέλει μαθέειν, φίλ' ἑταῖρε;
Ἰνδμονά σε Σπάθμη, καὶ Ζυγὸς ἐκπελέει.
Ταύτοισι Κτίσης Μέγας Αἴων σὺν κτίσσι, Φύρῃ
Αἰθέρα, ἠδ' τ' ἄλλων πάνθ' ὅσα καλὰ λίῳ.
Κείνῳ, εἰ κατέχεις, καὶ ὅλως χρᾷ, Εἰκόν' ἀσῳῶ
Ἀντίκρυς ἐκτυπόοις, τῷ Κτίσιν ἐκξαιόω.

Εἰς τὼ Βίβλον τῆς Μαθήσεως.

Τίπτε με δέρκεις ἀγαυὲ προσώπῳθε; πόθεν θέ με Κῦρε.
Δείξω γὰρ Γαίης, κ' ὐρανίων Σοφίῃ.
Τῆς σύνεχ' ὡς Μέγ' ἄρωπο τεοὶ Κλεῖος Γενετῆρες,
Κληρονομεῖν βέλει; πείθεο, ἢ καλέω.

Πρὸς

Πρὸς τὸν αὐτὸν Ἐπιστημονικώτατον Διδάσκαλον κύριον Μπαλαῦον.

Ε Π Ι Γ Ρ Α Μ Μ Α.

Τῷ ἐν Γεροδιακόνοις κυρίῳ Παγκρατίῳ Δημάρῳ τῷ ἐξ Γωαννίνων.

Ὄ Μματος ὀξεῖϊ Δυγκῆος νέρθεν χθονὸς ἦχθη
„ Παύτα μέπαλλα βροτοῖς, κλέθεσιν ὄντα πάλαι
Δαιδαλέῳ δὲ νόῳ Μπαλαύοιο μαθήματα γνώθη
„ Σχεδὸν ἅπανθ' ἁπάσης γῆς ποτε ὠλολότα
Πρισβυτέρῳ φρώτοιο ὑφηγητοῖο ὁμῶς τε
„ Οὔνος Γωαννίνων, φιλοσόφων θ' ὑπάτου.

Ἕτερα εἰς τὴν βίβλον Σαπφικὰ τῷ αὐτῷ.

Εἴποτ' αὖ θυμὸς κραδίῃ ἄρ' ἦκε
Πᾶσιν αὐτὴν γαῖαν, ἅπαντε κέρμα
Τῆς δε, μέξῆσ' δ'μεθόδως τ' ἄεισα,
Η' περιελθεῖν,
Οὐ πτέρυξ' ἐξ ἠλίκε πυρῶν ῥὰ
Οὐδὲ θέρμης, ὡς Γκάρκ τὸ φρῶτον
Κηείναις ὡς φθειρομεύαις πάχισα,
Ἀλλ' ἀκαμαύτοις,
Η'δὲ Κροίσκ δύρέα παύπα πλῶτον
Καίτε θησαυρὲς βασιλῆος αὖθις
Φημὶ Περσῶν, ϗ Μίδα τ' Φρυγῶν τε
Εὐαριθμῆσαι
Ποικίλ' δ'ώδη δὲ μαθημάτων ναὶ
Ἄνθε' ἄρρητ' Ἀρχιμίδε τε γνῶναι
Ἀστέρων φύσεις ἀκινητέων τε
Η'δὲ κινητῶν
Ἐμμελῶς παυτὶωὶ ἐρδύνα βίβλον
Κ' ὄμμασι χρῶ νὺ καθόρ' οἶδ' ἅπαντα
Οὐρανῷ ὅσ' αὖ κέετ' ἄστρα λαμπρὰ
Καὶ μέξα γαίης.

Ε' ΠΙ.

ΕΠΙΓΡΑΜΜΑΤΑ

Εἰς τὸν παιδεσιμώτατον καὶ Ἐπιστημονικώτατον Ἀρχιφρεσβύτερον Ἰωαννίνων, καὶ Διδάσκαλον τῆς πρώτης χολῆς τῆδε ἐχεῖ, τὸν συγγραφέα τῆδε τῆς Μαθηματικῶν πραγματειῶν.

ΗΡΩΕΛΕΓΕΙΟΝ

Ἡ Μετέρης γονεῦς μέγ' ὄνειαρ, πάμμεγάτ' εὔχος
Ἠπείρω, ἰδὲ φῶς Ἑλλάδος ἀρτιφαὲς,
Ἰωαννίνων Ἀρχιφρεσβύτερε ἱρὲ
Ἠδὲ καθηγήτωρ Μπαλλαῦε πυλυΐδρι;
Ὄλβιος ἐσσὶ πόνων σῶν ἰδρώοντ' ἀμιβήτων
Ἔμπνυς γὰρ βίβλους γράψες, ἰδ' ἄρτι γράφεις
Τόσσας, ὅσσοι ἔασι διδασκαλίης σέο μῦσαι
Ἑλλάδι, σῆς σοφίης κήρυκες ὑψιβόαι.
Νῶϊ δ' αὖ ἄπνυς μὲν, πολυηχεῖς δ' Ἑλλάδι βίβλους
Τάς δὲ, μαθηματικῆς φῶς μέγα μυσοβόφοις,
Μνημόσυνον σοφίης γράψες σῆς. ὑπὸτ' ὀλεῖται
Τεῦνεκα σεῖο κλέος ζῶσί τε καὶ φθιμένοις.

Ἕτερον.

Ἄρτι, πάλαι ποθέον γένος Ἑλλάνων, σοφὸν ἄνδρα
Ἄξιον Αἰώνων ἔλαχε τῆδε πρότερον,
Μπαλλαῦε ἱδρυσούμενε μαθηματικὴν προφέροντα,
Μάρτυρες αἵδε βίβλοι, Ἑλλάδα ὡς γανόεις.
Ζώνης, φῶς σοφίης παρχαῖον ἀν' Ἑλλάδα φαίνων,
Πολλὰς δαίμων εἰς ἐτέων ἕλικας.

Ἕτερον.

Τάς δὲ μαθηματικῆς ὡς εἶδον ἄφνω νεοτυχεῖς
Πυκτίδας, ὥς ἔφασαν αἱ Ἑλικωνιάδες
Θάμβεϊ συχόμεναι μῆσαι; ἦρ' Εὐκλείδης τε,
Ὅς στοιχειωτὴς ἐσσὶ μαθηματικῆς,
Ἔκθορεν ἐκ νεκάδων νῶϊ; καὶ ἐνθμητικὸς ὦδ' ὅς
Νικόμαχος; σὺν τοῖς μηχανικοῖς αὖ ἔβη,
Ἔξοχος ἆρ' ἴδμων Ἀρχιμήδης; Πτολεμαῖος
Πρὸς τοῖς Ἀστρονόμος ἐς βίον ἦλθε πάλιν;
Τὰς δ' ἀπαμειβόμενος προσέφη μυσηγέτα Φοῖβος.
Ὦ πότνιαι κοῦραι Διὸς αἰθερίοιο Διὸς,

Ἰωαν.

Γωαννίνων γόνον εὖ ἴσ' ἐκ ἀπορεῖτε,
Ὑμμέτερόν φημι θρέμμα, τὸν ὀξυόον,
Ἀρχιαθηνητὼ παῖδος κεν ἐῆς πολυΐδριν,
Ἀρχιφρισβύτερον Μπαλλᾶνον ἱρόσοφον.
Κείνων ἀντὶ μόνος νωὶ πάντων ἤρκεσεν ἔπος
Ἑλλάδι, τὰς δὲ βίβλους φέρπετα σωσθέμενος.
Αἱ δ' ἄρ' ἔφαν μῦσαι πάλιν, ἐκὼν ἑπτὸς ὃς δὲ
Τοῖς πάντων κείνων μισοδόποις στεφάνοις.

Ἕτερα δι' ἰαμβικῶν εἰς ἑκάστω πραγματείαν

Εἰς τὸν δύσωπτον Ἑρμωνείαν τῶ Εὐκλείδε.

Εὔκλειαν ἴσχει ἄρτι τὸν Εὐκλείδε
Εὔληπτον αὐτὸν ἐκδεδωκὼς Μπαλλάνος.

Εἰς τὰ κατὰ Θεοδόσιον Φαινικά.

Κατὰ Μπαλᾶνον, θεοδόσιον μὴ λέγε.
Σφαῖρα Μπαλᾶνος ἔστι γὰρ Λατινικῶς.

Εἰς τὸν Γεωμετρίαν.

Γεωμετρίη γῆς μὲν ἂν μάθῃς μέτρα
Οὐ μὴν γε μέτρον τῶν πόνων τῶ Μπαλλάνε.

Εἰς τὸν Τριγωνομετρίαν

Πρόσεξιν ἴσχε ἐν Τριγωνομετρίῃ,
Ὅσον γὰρ ὀξὺς ὧδε γνώσῃ Μπαλλάνος.

Εἰς τὸ Ἀστρολάβιον

Λαβὼν δὲ πεῖραν ἀστέρων Ἀστρολάβῳ
Στίλβειν Μπαλᾶνον ἀστέρων γνώσῃ δίκλω.

Εἰς τὸν Γεωγραφίαν

Ὧ δ' αὖ γένης σφαίρας τε πίνακας γράφει
Ἀτμῶν πέρι σφαίρας τε ὁ σφαιρώνυμος.

Εἰς τὰ Ὀπτικά.

Καὶ ὀπτικὸν δὲ μανθάνῃς χαίρων μάλα
Ὀδηγὸν ὄμμα κῆ γὰρ ἴσχεις Μπαλλάνον.

Εἰς τὸν Ἀριθμητικόν.

Πράξεις ἀριθμῶν κῆ λόγους ἐκμανθάνων,
Θάμβει ἀρίθμει Μπαλλάνε σοφῶ πόνους

Εἰς ἴδιόν δ' ἀγνωμοσύνης τεκμήριον

Ὁ τῆς σῶν μαθητῆς ἐλάχιστος μὲν, ἀλλ' ἀγνώμων

Νικόλαος ὁ ἐκ Μισόβε

Πρὸς τὸν Λἰδεσιμελαγιμώπαν καὶ Ἐπισημονικώπαν κύριον Μπαλαῦον

Ε Π Ι Γ Ρ Α Μ Μ Α.

Χαῖρε καθηγητὰ Μπαλαῦε, ὑπερτελὲς ὄντως
φιλομαθῶν εὔχος, πᾶσί τε νυῦ ὄφελος,
Καὶ γὰρ Ἐπισήμας, ἃς κρύψε χρόνος γε πονήσας
Σοῖς τ' Ἠπειρώταις, καλλοδαποῖσι φαείς
Ἀφειδῶς δ' αὖ τοῖσιν σῶν γε πόνων μετέδωκας
Τίσει' ἔν σε θεὸς Γῆς ἔπι εὐ δὲ Πόλῳ.
Ἕτερον πρὸς τὸν αὐτόν.
Σφαῖρα μὲν ἔρηται ψυχὴ τοῖς φιλοσοφοῦσι,
Σφαῖρα δὲ καὶ Γαῖα, σφαῖρα τε καί γε Πόλος
Ἄστρασε τῇ σφαίρᾳ τῷ χήματι εἴκυια, Σφαῖρα
Καί μοι Μπαλαῦος Λατινικῶς λέγεται.
Γῆς γὰρ χήματος, ἠδ' ἄστρων τε, πόλοισι πέρι,
Καὶ ψυχῆς ἤδη φιλοσόφησε μόνος.
Ἕτερον πεζάσιχον πρὸς τὸν αὐτὸν καὶ τὸ αὐτῦ
θαυμάσιον μαθηματικὸν βίβλον.
Χαῖρ' Εὐκλείδη, ὅς γε μαθηματικῆς κατέχεις κλεῖν,
Χαῖρε Γεωμέτρων Ἀστρονόμων τε κλέος
Παισὶ γὰρ Ἑλλήνων ἤγειρε μαθηματικὸν γε,
Μπαλαῦος κάμνων φρικῶδε πεσοῦσαν ὅλην
Ἕτερον διὰ στίχων Ἰαμβικῶν
Σεμνοί τε καὶ παύτιμοι Ἑλλήνων γόνοι.
Ὅσοις μάλιστα τῆς μαθημάτων μέλει
Ψυχῶν φρενίας τε ἐκθέφειν καὶ καρδίαν
Καρποῖς ἀθανάτοις γε Μπαλαῦ πόνοις
Πρὸς αὐτὸν ἤδη σωδραμόντες ὑμῶνας
Λάβητε κἀυτῦ τὸ ποθούμενόν πλέον.
Ἕτερον εἰς τὸ αὐτῦ πανσοφον βίβλον.
Τὸν βίβλον ἰδὼν Μπαλαῦ Σοφωτάτε
Ἑρμῆς λόγε ἄρειος ὢν ὑπηρέτης
Χ' ᾧ Τρισμέγιστος καὶ σοφὸς Ἑρμῆς πάλιν
Θεῦ ἔφασαν κὰ βροτῦ αὖτε βίβλος.
Εἰς Λἰδίαν οὐσίας τῆ θερμοτάτης εὐλαβείας τεκμήριον,
Καμπίτης παππα-Φιλίππε ὁ φιλόπονος, ὁ ἐκ Ναύσης τῆς ἐν Μακεδονίᾳ ὁ
τῆ σπουδαίων Ἐλάχιστος.

Πρὸς

Πρὸς τὸν αὐτὸν Κὸ Δημητρίου Παπαγωνιάδου.

Ε Π Ι Γ Ρ Α Μ Μ Α.

Η Ἄλιος αὐτολίηθε σελασφόρος ἦκεν ἐπ' αἶαν
Φωτί τε πάντα φαίνων κρυπτὰ τεῶν βολάων
Ἄλλος Γ'ωαννίηθε δ' ἑωσφόρος ἔκθορεν αὖτως
Δείξε τε οἶ σοφίῃ πᾶσι πύλας ἀδύτας
Ἀ'ριθμητικῆς τε, Γεωμετρίης ἰδὲ τ' αὐδὴς
Ἀστρονομίης, χ' αἴπερ ποσόπτα ὅλως
Ἔχον, σωνεχέ' ἠδέ θ' ὁμιλῶ, πάντεσι δ' αἶψα
Ὀργὶ ἄρπα σαφῆ θῆκεν ἰμειρομένοις.

Ἕτερον.

Ὀλβιόδαιμον χαῖρε κάρηαρ Μπαλαάε μοῦσα.
Κλεινὸν καὶ σεπτὸν, εὔχος Γ'ωαννίνων.

Πρὸς τὰς φιλομαθεῖς.

Εἴ τῳ ἐν σήθεσφιν Ἐπιστήμης ἔρον ἴδμεν,
Τάνδ' ἐχέτω χέρσιν ἦσι βίβλον ζαθέλω
Ἣν Μπαλάνοιο πόνος πολυίδμονος ἐς φάος ἦξε.
Οὐ σιγέων κεύτις ἤνεσεν ἢ λαλέων,

Γαμβικὸν εἰς τὸν μαθηματικὸν

Μοῦσαι καλοῦσι τὰς ἐρασὰς τῆδ λόγων
Λαμπρᾷ γε φωνῇ πάντας εἰς δ'ωχίαν
Δραμόντες ὦκα δεῦτε τῆδ ἡδυπνόων
Καρπῶν μεταχοίητε τῆδ μαθημάτων.

Ε Π Ι Γ Ρ Α Μ Μ Α

Η ρωελεγεῖον εἰς τὸν αὐτὸν Κὸ Κωσμᾶ Υἱὸν τὸ Συγγραφέως.

Γῆς ὕπο ἡελίοιο φαεσφόρω καπαδωίτος,
Αἶχος πᾶσιν σκίδναται αἶψα μέγα,
Λυπᾷρ σίλβει παῦπα φαεσίτος τᾶδε ὑπὲρ γλῶ·
Ὡς οὖ καὶ βίβλω, ἣν γε λαβὼν κατέχεις
Ἀγνώτω ἔσης, μέγα μέσαις ἔπλετο ἄχθος,
Νῶν δ' αὖ τέρπονται, ὅττι τύποις ἐδόθη.

Ε᾽τερον.

Εἴσε λάβῃ ποτ' ἔρως δρέψασθαι ἄνθεα μισῶν
Νοῶν τε Ἐπισημῶν κάλλεσιν ὡραίσαι
Δέχνυσο τάς δὲ βίβλους τεξακτύϊ χῆμα φερέσας
Ἡδ' ἀόκνυς πάσας, ὥς γε δυνῇ μελέτα.

Ἀνωνύμου εἰς τὸν αὐτὸν

Ε Π Ι Γ Ρ Α Μ Μ Α.

Ρεῖ χρυσῆ χύσεια ῥέεθρα μαθηματικορρύης
Ἧς φιλεπισήμου ἐς κόρον ἐξαρύω.
Μπαλλάνος ὦ πολυΐδεις ἔτευξε μυελόκρυνον.
Ὄμματι Λυγκείῳ, κυδαλίμῳ τε πόνῳ.

ΠΙΝΑΞ
ΤΩΝ ΟΡΩΝ,
ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΕΚΑΣΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Τῶν περιεχομένων ἐν τῷ παρόντι πρώτῳ τόμῳ,

Οἱ ὅροι τῆ πρώτη βιβλίῳ τῆ Στοιχειωτῆ.

Ὅρος Α'. Σημεῖόν ἐστιν, ὃ μέρος ἐθενὸ. Φύλλα 7
β'. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές. 8
γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα Σημεῖα. 8
δ'. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. 9
ε'. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει. 10
ς'. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα Γραμμαί. 10
ζ'. Ἐπίπεδος Ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται. 10
η'. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῆ γραμμῶν κλῖσις. 11
θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία. 12
ι'. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφ' ἑξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν. 12
ια'. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς. 12
ιβ'. Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάττων ὀρθῆς. 12
ιγ'. Ὅρος ἐστὶν, ὃ τινός ἐστι πέρας. 13
ιδ'. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἢ τινῶν ὅρων περιεχόμενον. 13
ιε'. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται. 13
ις'. Διάμετρος δὲ κύκλου ἐστὶν εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον. 14

ι ζ'. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον χῆμα ὑπό τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς κύκλου περιφερείας. 15
ι η'. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας. 15
ι θ'. Εὐθύγραμμα χήματά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα. 16
κ'. Τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν. 16
κ α'. Τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων. 16
κ β'. Πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων, ἢ τεσσάρων πλευρῶν περιεχόμενα. 16
κ γ'. Τῶν δὲ τριπλεύρων χημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς. 17
κ δ'. Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς. 17
κ ε'. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς. 17
κ ς'. Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων χημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ μίαν ἔχον ὀρθὴν γωνίαν. 17
κ ζ'. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ μίαν ἔχον, ἀμβλεῖαν γωνίαν. 17
κ η'. Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας. 17
κ θ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων, τετράγωνόν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τε καὶ ὀρθογώνιον. 18
λ'. Ἑτερόμηκες δὲ, τὸ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ. 18
λ α'. Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ. 18
λ β'. Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον. τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, τραπέζια καλείσθω. 18
λ γ'. Παράλληλοι εὐθεῖαί εἰσιν, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις. 18

ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

Α'. Ἠτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ παν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 19
β'. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν. 19
γ'. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι. 19

ΑΞΙΩΜΑΤΑ.

Α'. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. 19
β'. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα. 19
γ'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα. 19
δ'. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα. 19
ε'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα. 19
ς'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. 19
ζ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίσεα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. 19
η'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα; ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. 19
θ'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι. 19
ι'. Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. 19

ια'. Καὶ

ιδ'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι. 19

ιβ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι. 19

ιγ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι κοινὸν τμῆμα οὐκ ἔχουσιν. 19

ιδ'. Καὶ τὸ ὅλον ἴσον τοῖς ἰδίοις μέρεσι. 20

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Πρότασις Α'. Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. 21

β'. Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι. 21

γ'. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν. 22

δ'. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι. 22

ε'. Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. 23

ς'. Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. 23

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι πᾶν τρίγωνον ἰσόπλευρον, καὶ ἰσογώνιόν ἐστι, καὶ τὸ ἰσογώνιον, ἰσόπλευρον. 24

ζ'. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις. 24

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι δύο τρίγωνα ἴσα καὶ ἰσόπλευρα, ἐπὶ ἴσης ἰσοσκελοῦς οὐκ ἔστιν συσταθῆναι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, καὶ τὰ αὐτὰ μέρη. 24

η'. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. 25

θ'. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν. 25

ι'. Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν. 26

ια'. Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 26

ιβ'. Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἢ ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 26

ιγ'. Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει. 27
ιδ'. Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. 27
ιε'. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι. 28
ις'. Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί. 28
Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας μὴ δύνασθαι πλείονας εὐθείας ἴσας ἀγεσθαι, ἢ δύο μόνας. 29
ιζ'. Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. 29
Πόρισμα. ά. Ἐκ τούτου δῆλον, μὴ δυνασθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο καθέτους πίπτειν. 29
β'. Ἔτι παντὸς τριγώνου, εἴπερ ἂν ἡ μία τῶν γωνιῶν ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα τύχῃ, τὰς λοιπὰς ὀξείας εἶναι. 29
γ'. Ἔτι ἐὰν ἐπί τινος εὐθείας εὐθεῖα σταθεῖσα γωνίας ἀνίσους ποιῇ, τοῦ παρά τινος σημείου τῆς ἐφεστηκυίας εὐθείας πίπτουσαν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποκειμένην, πρὸς τὰ τῆς ὀξείας γωνίας πίπτειν μέρη. 29
δ'. Ἔτι τῶν μὲν ἰσοπλεύρου τριγώνου πάσας τὰς γωνίας ὀξείας εἶναι, τοῦ δὲ ἰσοσκελοῦς τὰς δύο πρὸς τοῦ βάσιν. 29
ιη'. Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τοῦ μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. 30
Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, τὸ μὲν σκαληνοῦ τριγώνου πάσας τὰς γωνίας ἀνίσους εἶναι, τοῦ δὲ ἰσοπλεύρου ἴσας. 30
ιθ'. Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τοῦ μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. 30
Πόρισμα. ά. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι τῶν ἀφ' ἑνὸς σημείου προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐπί τινος εὐθείας, ἡ μὲν κάθετος ἐλαχίστη ἐστὶν, ἀεὶ δὲ ἡ ἀπώτερον τῆς ἐγγύτερον μείζων. 30
β'. Ἔτι ἐν μὲν τοῖς ὀρθογωνίοις ἢ τοῦ ὀρθὴν ὑποτείνουσα γωνίαν μείζων ἐστὶ τῶν λοιπῶν, ἐν δὲ τοῖς ἀμβλυγωνίοις ἢ τοῦ ἀμβλεῖαν. 30
κ'. Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. 30
Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι παντὸς τετραπλεύρου ἡ διαγώνιος διάμετρος, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἑκατέρωθεν δύο πλευρῶν. 31
κά. Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν. 31

Πό-

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τέτε συνάγεται μὴ δυνασθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀσθείας, ἀπὸ τῶν αὐτῶν περάτων, πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη δύο τρίγωνα ὅμοια συνίστασθαι. 31

κβ'. Ἐκ τριῶν ἀσθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ἀσθείαις, τρίγωνον συνίστασθαι. δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι παντῃ μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνε τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, παντῃ μεταλαμβανομένας. 32

κγ'. Πρὸς τῇ δοθείσῃ ἀσθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ ἀστυγράμμῳ γωνίᾳ, ἴσην γωνίαν ἀστύγραμμον συνίστασθαι. 32

κδ'. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων ἀσθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει. 33

κε'. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων ἀσθειῶν περιεχομένην. 33

κς'. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. 34

κζ'. Ἐὰν εἰς δύο ἀσθείας ἀσθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ ἀσθεῖαι. 34

κη'. Ἐὰν εἰς δύο ἀσθείας ἀσθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ ἀσθεῖαι. 35

κθ'. Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους ἀσθείας ἀσθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιεῖ, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ. 35

Πόρισμα. Ἐκ τέτε δῆλον, παντὸς παραλληλογράμμε τὰς δύο γωνίας, τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι, παντῃ μεταλαμβανομένας, καὶ τὰς τέτταρας τέτταρσιν ἴσας. 36

λ'. Αἱ τῇ αὐτῇ ἀσθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. 36

Πόρισμα. Ἐκ τέτε δῆλον, ὅτι ἐπὶ παντὸς παραλληλογράμμε ἡ τῇ μιᾷ τῶν πλευρῶν αὐτῦ ἀχθεῖσα παράλληλος καὶ τῇ ἑτέρᾳ παράλληλος ἔσται. 36

λα'. Ἀπὸ τῦ δοθέντος σημείε τῇ δοθείσῃ ἀσθείᾳ παράλληλον ἀσθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 36

λβ'. Παντὸς τριγώνε μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστὶ, καὶ αἱ ἐντὸς τὸ τριγώνε τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς. 37

Πόρισμα ά. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, τῶν μὲν ὀρθογωνίων ἑκατέρα τῶν λοιπῶν ἡμισειά ἐστιν ὀρθῆς, τῶν δὲ ἀμβλυγωνίων, ἐλάττων ἡμισείας ὀρθῆς, καὶ τῶν ὀξυγωνίων μείζων. 37

β'. Ἔτι τῶν ἰσοπλεύρων ἑκάστη τῶν γωνιῶν δύο τρίτα μέρη περιέχει τῆς ὀρθῆς. 37

γ'. Ἔτι παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ὁμοῦ ἴσαι εἰσὶ ταῖς οἱουδήποτε τριγώνου τρισὶ γωνίαις ὁμοῦ λαμβανομέναις. 37

δ'. Ἔτι παντὸς τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν. 37

λγ'. Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, ἴσαί τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. 38

λδ'. Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. 38

λε. Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. 39

λς'. Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐσίν. 39

λζ'. Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐσίν. 40

λη. Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐσίν. 40

λθ'. Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐσίν. 40

μ'. Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐσίν. 41

μά. Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου. 41

μβ'. Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ. 41

μγ'. Παντὸς παραλληλογράμμου περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐσίν. 42

μδ'. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ. 42

με. Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ. 43

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δυνάμεθα σπουδαγεῖν, ὅτι καὶ ἐὰν δύο ὦσι τὰ δοθέντα εὐθύγραμμα, καὶ ζητῆται συστήσασθαι παραλληλόγραμμον ἴσον σπουδαιοτέροις τοῖς δοθεῖσιν, ἔξεστι διὰ τῆς αὐτῆς ἐφόδου τὸ προσαπόμενον ποιεῖν, διαιρῶσι τὰ δοθέντα εἰς τρίγωνα, εἰς ὅσα ἂν διαιρῆται. ὁμοίως κἂν πλείω ᾖ. 44

μς'.

μς'. Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι. 44
μζ'. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις. 44
μη'. Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστιν. 45

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Δευτέρου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Ὅρος Α'. Παντὸς παραλληλογράμμου ὀρθογωνίου περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν. 47
β'. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ σὺν παραλληλογράμμοις ὁποιουοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι, γνώμων καλείσθω. 47

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

α. Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου, καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. 48
β'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ. 49
γ'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ, ὡς ἔτυχε, τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ. 49
δ'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. 50
Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐν παντὶ τετραγώνῳ τὰ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστι. 51
ε'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ. 51
ς'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης

ἔχτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. 52

ζ'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. 52

η'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. 53

θ'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου. 54

ι'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἀναγραφέντος τετραγώνου. 55

ια'. Τῷ δοθείσῃ εὐθείᾳ τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης, καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. 56

ιβ'. Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσα ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ. 57

ιγ'. Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἐλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ. 57

ιδ'. Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι. 58

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Τρίτου Εὐκλειδείου Σπιχείου.

Ὅρος Α'. Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι, ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσί. 60

β'. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον. 60

γ'. Κύ-

γ'. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους. 61

δ'. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τῶν κέντρων εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τῶν κέντρων ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσι, μεῖζον δ' ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν μείζων κάθετος πίπτει. 62

ε'. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας. 62

ς'. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας. 63

ζ'. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν. 63

η'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία. 64

θ'. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ αὐτοῦ τοῦ κύκλου συσταθῇ ἡ γωνία, τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας. 64

ι'. Ὅμοια τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. 64

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

α'. Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν. 65

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεία τις εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπ' αὐτῆς ἔσται τὸ κέντρον. καὶ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλας τέμνουσιν, ἢ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ἔσται τὸ κέντρον. 65

β'. Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. 65

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἡ κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ κατὰ τὰ αὐτὰ συμπίπτουσα τοῦ κύκλου εὐθεῖα τέμνει τὸν κύκλον, καὶ οὐκ ἅπτεται αὐτοῦ. 66

γ'. Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ. καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ. 66

Πόρισμα α'. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν παντὶ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ἡ τὴν βάσιν δίχα τέμνουσα κάθετός ἐστιν ἐπ' αὐτῆς. καὶ πάλιν, καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνία δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς καθέτου, 66

Πόρισμα β'. Ἔτι σωάγεται, ὅτι ἐν τοῖς ὁμοκέντροις κύκλοις τὰ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τμήματα τῆς τεμνούσης αὐτοὺς εὐθείας ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 66

δ'. Ἐὰν

δ'. Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. 67

ε'. Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. 67

ς'. Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. 67

ζ'. Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου λημφθῇ τι σημεῖον, ὃ μὴ ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπὴ, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστὶν, δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης. 68

η'. Ἐὰν κύκλου λημφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ, ὡς ἔτυχε, τῶν μὲν πρὸς τῷ κοίλῳ περιφερείαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη μὲν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται, τῶν δὲ πρὸς τῷ κυρτῷ περιφερείαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦτο σημείου τε καὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης. 69

θ'. Ἐὰν κύκλου λημφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους, ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ λημφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου. 70

ι'. Κύκλος ὁ τέμνει κύκλον κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο. 71

ια'. Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ λημφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τοῦ συναφοῦς πεσεῖται τῶν κύκλων. 72

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι δύο κύκλων ἀλλήλων ἁπτομένων ἐντὸς ἡ ἀπὸ τοῦ ἀφῆς ἐπὶ τὸ τοῦ ἑνὸς κέντρον ἀγομένη εὐθεῖα διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἑτέρου κύκλου. 72

ιβ'. Ἐὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη διὰ τῆς ἁφῆς ἐλεύσεται. 72

ιγ'. Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ καθ' ἕν, εἴτε ἐντὸς, εἴτε ἐκτὸς ἐφάπτηται. 73

ιδ'. Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. 74

ιε'. Ἐν κύκλῳ μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν. 75

Πόρισμα. Ἐκ τούτου ἔπεται, ἐφ' ἑκάτερα τῆς αε, δύο μόνας ἴσας συνίστασθαι εὐθείας, ἐὰν γὰρ μὴ, ἔσονται αἱ ἀπώτερον τῆς ἔγγιον ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον. 75

ις'. Ἡ τῇ διαμέτρῳ τῦ κύκλυ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῦ κύκλυ, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τῦ ἡμικυκλίυ γωνία ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμυ μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων. 76

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τύτυ φανερὸν, ὅτι ἡ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐπὶ τὸ πέρατος τῆς διὰ τῦ κέντρυ, ἅπτεται τῦ κύκλυ, εἰ γὰρ μὴ, ἐντὸς πεσεῖται, ὅπερ ἀδύνατον. καὶ τάμπαλιν, ἡ ἁπτομένη τῦ κύκλυ, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ διαμέτρῳ. 76

ιζ'. Ἀπὸ τῦ δοθέντος σημείυ τῦ δοθέντος κύκλυ εφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 77

ιη'. Ἐὰν κύκλυ ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῦ κέντρυ ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα, κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἁπτομένην. 77

ιθ'. Ἐὰν κύκλυ ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τῦ κύκλυ. 77

κ'. Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῇ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν. 78

Πόρισμα. α. Ἐκ δὴ τύτυ φανερὸν, ὅτι ἐν κύκλῳ πᾶσαι αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ τὸ ζ'. ἀξίωμα, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν. 78

β'. Ἔτι αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ τῦ κύκλυ συνισάμεναι γωνίαι ἐπὶ διπλασίων βεβήκασι περιφερειῶν, ἡ αἱ πρὸς τῇ κέντρῳ ἴσαι ταῖς πρὸς τῇ περιφερείᾳ συνισάμεναι. 79

κα'. Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῇ αὐτῇ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. 79

κβ'. Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν. 79

κγ'. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. 79

κδ'. Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. 80

Πόρισμα. Ἐκ τύτυ δῆλον, ὅτι αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσά τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλυ ἀφαιροῦσιν, ὁπωσδηποτοῦν ἐναρμοζόμενα. 80

κε. Κύκλυ τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗ ἐστὶ τμῆμα. 80

κς'. Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, εἴτε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴτε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. 81

κζ'. Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, εἴτε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴτε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. 81

κη'. Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσιν. 82

κθ'. Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν. 82

λ'. Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν. 83

λα'. Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ὀρθῆς. καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. 83

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ξιγώνου ἡ μία τῶν γωνιῶν ταῖς λοιπαῖς δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστιν. ὅτι καὶ ἡ ἐφ' ἑξῆς ἐκείνης ταῖς δυσὶν ἴση ἐστί. 84

λβ'. Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις. 84

λγ'. Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ. 85

λδ'. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ. 86

λε. Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. 86

λς'. Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ. 87

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀφ' ἑνὸς σημείου ἐκτὸς ὄντος τοῦ κύκλου ἑκατέρωθεν ἁπτόμεναι εὐθεῖαι ἀχθῶσιν, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. τὸ γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐναπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς κυρτῆς περιφερείας καὶ τοῦ σημείου, ὡς δέδεικται. 88

λζ'. Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τεμνούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου. 88

Π Ι Ν Α Ξ.

Τῦ Τεπάρτυ τῆβ τῦ Εὐκλείδυ Στοιχείωμ.

Ὅρος Α'. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς χῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεδαι λέγεται, ὅταν ἑκάςη τῆβ τῦ ἐγγραφομένυ χήματος γωνιῶν ἑκάςης πλευρᾶς τῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται. 91

β'. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ χῆμα περιγράφεδαι λέγεται, ὅταν ἑκάςη πλευρὰ τῦ περιγραφομένυ ἑκάςης γωνίας τῦ, περὶ ὃ γράφεται, ἅπτηται. 91

γ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεδαι λέγεται, ὅταν ἑκάςη γωνία τῦ ἐγγραφομένυ ἅπτηται τῆς τῦ κύκλυ περιφερείας. 92

δ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεδαι λέγεται, ὅταν ἑκάςη πλευρὰ τῦ περιγραφομένυ τῆς τῦ κύκλυ περιφερείας ἅπτηται. 92

ε'. Κύκλος δὲ ὁμοίως εἰς χῆμα λέγεται ἐγγράφεδαι, ὅταν ἡ τῦ κύκλυ περιφέρεια ἑκάςης πλευρᾶς τῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται. 92

ς'. Κύκλος δὲ περὶ χῆμα περιγράφεδαι λέγεται, ὅταν ἡ τῦ κύκλυ περιφέρεια ἑκάςης γωνίας τῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται. 92

ζ'. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεδαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τῦ κύκλυ. 93

Π Ρ Ο Τ Α Σ Ε Ι Σ.

α. Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι ὔσῃ τῆς τῦ κύκλου διαμέτρυ, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι. 93

β'. Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι. 94

γ'. Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι. 94

δ'. Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι. 95

ε'. Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι. 95

Πόρισμα. Ἐκ τύτυ δῆλον, ὅτι ὅταν τῷ δύο τῦ τριγώνυ πλευρῶν δίχα τεμνομένων, αἱ ἐπ' αὐτῷ ἀγόμεναι κάθετοι ἐντὸς τῦ τριγώνυ συμπέσωσιν, ἡ ὑπὸ τῆς ἀτμήτυ ὑποτεινομένη γωνία, ἐλάττων ἐςὶν ὀρθῆς, καὶ πάμπαλιν, ἐν μείζονι γὰρ ἐςὶ τμήματι, ὅταν δὲ ἐπὶ τῆς ἀτμήτυ, ὀρθή, καὶ πάμπαλιν, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ. ὅταν δὲ ἐκτὸς τῦ τριγώνυ, μείζων ὀρθῆς, ἐν ἐλάττονι γὰρ ἐςὶ τμήματι κύκλυ. 96

ς'. Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι. 96

ζ'. Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι. 90

η'. Εἰς τὸν δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι. 97

θ'. Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι. 97

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι παντὸς τετραγώνου αἱ διάμετροι δίχα τέμνονται. 98

ι. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. 98

ια. Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. 99

ιβ. Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι. 100

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐν τοῖς ἰσογωνίοις καὶ ἰσοπλεύροις πενταγώνοις τῶν πλευρῶν δίχα τμηθεισῶν, καὶ ἐπ' αὐτῶν καθέτων ἀγομένων, αἱ ἀπὸ τῆς συμβολῆς τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι, δίχα τὰς γωνίας τέμνουσι. 101

ιγ. Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιόν ἐστι, κύκλον ἐγγράψαι. 101

ιδ. Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι. 101

ιε. Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. 102

Πόρισμα. Ἐκ τούτου σημαίνεται, ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. 103

ις. Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. 103

ΠΙΝΑΞ.

Τῶν Πέμπτης τῆς τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Ὅρος Α'. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. 106

β'. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος. 106

γ'. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. 107

δ'. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. 108

ε. Ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ληφθέντα καταλλήλα. 108

Πό-

Πόρισμα. Ὥστε δυνάμεθα ἐκ τούτου συναγαγεῖν καὶ ἀνάπαλιν, ὅτι ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου, τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίων τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπει, ἢ ἅμα ὑπερέχει, ἢ ἅμα ἴσα ἐστὶ ληφθέντα καταλλήλα. 109

ε'. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογα καλείσθω. 109

ζ'. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ γ'. πρὸς τὸ δ'. 110

η'. Ἀναλογία δέ ἐστιν, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης. 110

θ'. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν. 111

ι'. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. 111

ια'. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς σὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ. 111

ιβ'. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις. 113

ιγ'. Ἐναλλὰξ λόγος, ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον. 113

ιδ'. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου, ὡς ἡγουμένου, πρὸς τὸ ἡγούμενον, ὡς ἑπόμενον. 114

ιε'. Συνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου, ὡς ἑνὸς, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον. 114

ις'. Διαίρεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον. 115

ιζ'. Ἀντιστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου. 115

ιη'. Δι' ἴσου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανομένων, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, ὅταν ᾖ, ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. καὶ ἄλλως. λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων. 115

Τίνα τὰ ἴδια ἑκάστου εἴδους τοῦ ἐν μεγέθεσι λόγου. 116

ιθ'. Τεταραγμένη ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν ᾖ, ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ᾗ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι. 118

κ'. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν ξ̓ιῶν ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, γίνηται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ ἐν πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἄλλο τι. 118

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

α'. Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἑνὸς τῆς μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῆς πάντων. 118

β'. Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ ἔκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, καὶ ξ̓ίτον καὶ ἕκτον τετάρτου. 119

γ'. Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ ξ̓ίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ ξ̓ίτου, καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου. 119

δ'. Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ ξ̓ίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ ξ̓ίτου, πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ληφθέντα καταλλήλα. 120

Πόρισμα. Ὅτι δὲ καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ κ, πρὸς τὸ ε, τὸ θ, πρὸς τὸ ζ, φανερόν. 121

ε'. Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὅπερ τὸ ὅλον τοῦ ὅλου. 121

ς'. Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια. 121

ζ'. Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα. 122

η'. Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον. 122

θ'. Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ, καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 124

ι'. Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι, πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν. 124

ια'. Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί. 124

ιβ'. Ἐὰν ᾖ ὁποσαῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. 125

ιγ'. Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον. τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον. 126

ιδ'. Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. 126

ιε'. Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα καταλλήλα. 127

ιϛ'. Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται. 127

ιζ'. Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται. 128

ιη'. Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται. 129

ιθ'. Ἐὰν ᾖ, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. 129

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀντιστραφῇ ἀνάλογον ἔσται. 129

κ'. Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται, κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. 130

κά. Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σὺν δύο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, ᾖ δὲ ταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται. κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. 130

κβ'. Ἐὰν ᾖ ὁποσαῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ἔσται. 131

κγ'. Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, ᾖ δὲ ταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ἔσται. 132

κδ'. Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον. 133

κε'. Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τῶν λοιπῶν δύο, μείζονά ἐστιν. 233

ΠΙΝΑΞ.

Τῶ Ἕκτω βιβλίω τῆς τῶ Εὐκλείδω Στοιχείως.

Ὅροι Α'. Ὅμοια χήματα εὐθυγράμμα ἐστίν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει καθ' μίαν ἴσας, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον. 134

Β'. Ἀντιπεπονθότα δὲ χήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρω τῶν χημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν. 135

Γ'. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆθαι λέγεται, ὅταν ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτω τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον. 136

Δ'. Ὕψος ἐστὶ παντὸς χήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη. 137

Ε'. Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα. 138

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Α'. Τὰ ἰσίγωνα, καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις. 143

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν τοῖς ἰσογωνίοις ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖα, ἀνάλογως τέμνει τὸ ἰσίγωνον τῇ αὐτῇ βάσει. 143

Β'. Ἐὰν ἰσιγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ ἰσιγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ ἰσιγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν τοῦ ἰσιγώνου πλευρὰν ἔσται παράλληλος. 144

Γ'. Ἐὰν ἰσιγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνει καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ ἰσιγώνου πλευραῖς, καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ ἰσιγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ ἰσιγώνου γωνίαν. 144

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν ταῖς ἰσοσκελέσι ἰσιγώνοις μιᾶς τῶν ἴσων αὐτοῦ πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἐὰν ἀπὸ τῆς ἐκτὸς γωνίας παράλληλος τῇ βάσει εὐθεῖα ἀχθῇ, δίχα ἡ αὐτὴ τμηθήσεται γωνία. 145

Δ'. Τῶν ἰσογωνίων ἰσιγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί. 145

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι ἐὰν ἰσιγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, τὸν αὐτὸν αὐτῇ ἕξει λόγον πρὸς ὃν

αὐ

αὐ παραλλήλως ἀχθείσα, ὃν ἡ ἑκατέρα τῶν λοιπῶν τοῦ ξιγώνου πλευρῶν ἔχει πρὸς τὰ μέρη αὐτῆς. 146

ε. Ἐὰν δύο ξίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ ξίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. 147

ς'. Ἐὰν δύο ξίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ ξίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. 147

ζ'. Ἐὰν δύο ξίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ ξίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί. 148

η. Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ ξιγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ ξίγωνα, ὅμοιά ἐστι τό τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. 149

Πόρισμα. Α'. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις ξιγώνοις ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσεως πίπτουσα κάθετος, μέση ἀνάλογός ἐστιν τῶν τῆς βάσεως τμημάτων. 150

β'. Ἔτι τῆς τε βάσεως καὶ ὁποτερουῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος. 150

θ'. Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσαχθὲν μέρος ἀφελεῖν. 150

ι. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν. 150

ια'. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσλαβεῖν. 151

ιβ'. Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσλαβεῖν. 151

ιγ'. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον προσλαβεῖν. 152

ιδ'. Τῶν ἴσων τε καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. 152

ιε'. Τῶν ἴσων, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ξιγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. 153

ις'. Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. 154

ιζ'. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιε-

χό-

χόμενον ὀρθογωνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ ξεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. 155

ιη'. Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι. 155

ιθ'. Τὰ ὅμοια ξίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 156

κ'. Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια ξίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. 157

Πόρισμα. α. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, καὶ τὰ ὅμοια τετράπλευρα χήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἶναι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ὡς δέδεικται καὶ ἐπὶ τῶν ξιγώνων. ὥστε ἐκ τούτων ἔχομεν συναγαγεῖν καθόλου, ὅτι τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 158

β'. Ἐπεὶ δὲ ἐὰν ξεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ἀπὸ τῆς α. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β': ἔχει, ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν ξίτην. 158

κα'. Τὰ τῇ αὐτῇ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια. 159

κβ'. Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται, κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, 159

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῶν ἴσων τε καὶ ὁμοίων εὐθυγράμμων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ, ἴσαι εἰσί. 160

κγ'. Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. 160

κδ'. Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. 161

κε'. Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι. 162

κς'. Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ, καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ. 163

κζ'. Πάντων τῶν περὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι. 163

κη'. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι. δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι

εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τοῦ ἐλλείμματος, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ, ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν, παραλληλογράμμου. 164

κδ'. Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι. 166

λ'. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον, καὶ μέσον λόγον τεμεῖν. 167

λα'. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. 167

λβ'. Ἐὰν δύο τρίγωνα συνιστῇ καὶ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται. 168

λγ'. Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι, ἔτι δὲ καὶ αἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνεστάμεναι. 169

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα, οὕτω καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν. 171

ΠΙΝΑΞ.

Τῶν Ἑβδόμου τοῦ τῶν Εὐκλείδου Στοιχείων.

Ὅρος Α'. Μονάς ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται. 172

β'. Ἀριθμός ἐστι τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος. 172

γ'. Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα. 173

δ'. Μέρη δὲ, ὅταν οὐ καταμετρεῖ. 173

ε'. Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος. 173

ς'. Ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν, ὁ δίχα διαιρούμενος. 173

ζ'. Περισσὸς δὲ, ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα, ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου. 173

η'. Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος, κατ' ἄρτιον ἀριθμόν. 173

θ'. Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος, κατὰ περισσὸν ἀριθμόν. 174

ι. Περισσάκις δὲ περισσός ἐστιν ἀριθμὸς, ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν. 174

ια'. Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν, ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος. 174

ιβ'. Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ. 174
ιγ'. Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος. 174
ιδ'. Συνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ. 174
ιε'. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις. 175
ιϛ'. Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ὁ ἐπίπεδος καλεῖται. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί. 175
ιζ'. Ὅταν τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς καλεῖται, πλευραὶ δ' αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους. 175
ιη'. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἰσάκις ἴσος, ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος. 175
ιθ'. Κύβος δὲ, ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις, ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος. 176
κ'. Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ α: τὸν β: καὶ ὁ γ: τὸν δ': ἰσάκις ἢ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσι. 176
κα'. Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς. 176
κβ'. Τέλειος ἀριθμός ἐστιν, ὁ τοῖς αὐτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν. 176

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Λ'. Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ὑπὸ τοῦ μείζονος, ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρεῖ τὸν πρὸ αὐτοῦ, ἕως οὗληφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται. 177
β'. Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. 177
Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρεῖ. 178
γ'. Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. 178
δ'. Πᾶς ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ἤτοι μέρος ἐστὶν, ἢ μέρη. 179
ε'. Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμῷ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ εἷνός. 179
ϛ'. Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμῷ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ εἷς τοῦ εἷνός. 180

ζ'. Ἐὰν

ζ'. Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου. 180

η'. Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, μέρη ᾖ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου. 181

θ'. Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος, καὶ ἐναλλὰξ ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ α: τοῦ γ': τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔσται καὶ ὁ β': τοῦ δ': 181

Πόρισμα. Ἐκ τούτου σωάγεται, ὅτι ἐὰν ἀριθμοὶ ἀριθμῶν ἴσων τὸ πλῆθος τὸ αὐτὸ μέρος ὦσιν, ἕκαστος χωρὶς ἑκάστου, ὅπερ ἕνα τινὸς ἀριθμοῦ, καὶ πάντες ὁμοῦ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πάντων τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν ἔσονται τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ ῥηθεὶς τοῦ ῥηθέντος. 182

ι'. Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐναλλὰξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου, ἢ μέρος. 182

ια'. Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα, καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλος πρὸς ὅλον. 182

ιβ'. Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους. 183

ιγ'. Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσι, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται. 183

ιδ'. Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος συνὼ δύο λαμβανόμενοι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται. 183

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι καὶ τοὐναντίον, ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τῷ πλήθει δι' ἴσου λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ συνὼ δύο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται. 184

ιε'. Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει, καὶ ὁ β': τὸν δ':. 184

ιϛ'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται. 184

Πόρισμα α'. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ μὲν πολλαπλασιάζων μετρεῖ τὸν γενόμενον κατὰ τὰς ἐν τῷ πολλαπλασιαζομένῳ μονάδας, ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος τὸν αὐτὸν, κατὰ τὰς ἐν τῷ πολλαπλασιάζοντι. 185

Πόρισμα β'. Ἔτι δὴ οὕτω ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ἔσται ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν πολλαπλασιάζοντα, ὁ πολλαπλασιαζόμενος πρὸς τὸν γενόμενον. ὥστε ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσῃ, ἔσται ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, οὕτως ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν γενόμενον. 185

ιζ'. Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τοῖς πολλαπλασιασθεῖσιν. 185

ιή. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῆς τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασι. 185

ιθ'. Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ τε α: καὶ δ': γινόμενος ἀριθμὸς, ἴσος ἔσται τῇ ἐκ τῶν β: καὶ γ': γινομένῳ ἀριθμῷ, καὶ ἐὰν ὁ ἐκ τε α: καὶ δ': γινόμενος ἀριθμὸς, ἴσος ᾖ τῇ ἐκ τῶν β: καὶ γ': οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται. 186

κ'. Ἐὰν ἓξ ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου. ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, οἱ ἓξ ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται. 186

κά. Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὡς ὁ μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα. 187

κβ'. Ἐὰν ὦσι ἓξ ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος συνὶ δύο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, ᾖ δὲ ταραγμένη ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῇ αὐτῷ ἔσονται λόγῳ. 187

κγ'. Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. 188

κδ'. Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. 188

κέ. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ τὸν ἕνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται. 189

κς'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσι, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γινόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται. 189

κζ'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γινόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται. 190

κή. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμοὺς ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι ὦσι, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γινόμενοι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται. 190

κθ'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, κἂν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, κἀκεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει. 190

λ'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται, καὶ ἐὰν συναμφότερος πρός τινα αὐτῶν, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται. 191

λά. Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστι. 192

λβ'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γινόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμὸς, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει. 192

λγ'.

λγ'. Ἅπας συνθετος ἀριθμὸς, ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. 192
λδ'. Ἅπας ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. 193
λε'. Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. 193
λς'. Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν. 194
λζ'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα μετρῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος, τὸν αὐτὸν μετρήσει. 195
λη'. Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν. 195
λθ'. Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετρεῖται, ὁ μετρούμενος, ὁμώνυμον μέρος ἕξει τῷ μετροῦντι. 196
μ'. Ἐὰν ἀριθμὸς μέρος ἔχῃ ὁποιονοῦν, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει. 196
μα'. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν, ἕξει τὰ δοθέντα μέρη. 197

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Ὀγδόου Εὐκλειδείου Στοιχείου.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Α'. Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. 198
Β'. Ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἐπιτάξῃ τις, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ. 198
Πόρισμα. Α'. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ᾖσιν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς ὦσιν, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετράγωνοί εἰσιν. ἐὰν δὲ τέσσαρες, κύβοι. 199
Β'. Ἔτι ἐὰν ἀριθμὸς ὁσουσδηποτοῦν ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας, οἱ γινόμενοι ἑξῆς ἀνάλογον ἔσονται, καθ' ὃν, ἑξῆς ἀνάλογόν, εἰσιν οἱ πολλαπλασιασθέντες, λόγον. 199
Γ'. Ἔτι ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν χωρὶς, καὶ ἔτι ἀλλήλους, ποιήσουσι ἑξῆς ἐλαχίστους ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. 199
Δ'. Ἐὰν ὦσι, ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. 200
Ε'. Λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἐλαχίστους, ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις. 220
Λῆμμα Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, εἴτι ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ, ὅ-

πε ἐν διαφόροις, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν ἔσχατον, λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων. 201

ε'. Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι, τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. 202

ς'. Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρεῖ, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. 203

ζ'. Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρεῖ, καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει. 203

η'. Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ καὶ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ καὶ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς μεταξὺ καὶ τὸ συνεχὲς ἐμπεσοῦνται. 204

θ'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ καὶ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ καὶ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρα αὐτῶν καὶ μονάδος ἑξῆς μεταξὺ καὶ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. 204

ι'. Δύο ἀριθμῶν καὶ μονάδος μεταξὺ καὶ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος ἑξῆς μεταξὺ καὶ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ καὶ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. 205

ια'. Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν. 206

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ὃν λόγον ἔχει ἡ πλευρὰ τετραγώνου πρὸς τὴν τετράγωνον ἑτέραν, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ὁ πρῶτος τετράγωνος πρὸς τὸν μέσον ἀνάλογον, καὶ ὁ μέσος ἀνάλογος πρὸς τὸν β'. τετράγωνον. 207

ιβ'. Δύο κύβων ἀριθμῶν, δύο μέσοι ἀνάλογοί εἰσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν. 207

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι μεταξὺ δύο κύβων, δύο μέσων ἀνάλογων πιπτόντων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τῶν πλευρῶν. 208

ιγ'. Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν, ἀνάλογον ἔσονται, καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται. καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει. 208

ιδ'. Ἐὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ πλευρὰν μετρήσει, καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τοῦ πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει. 208

ιε'. Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ πλευρὰν μετρήσει,

σει, καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τῷ πλευρᾷ μείζων, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μείζονα ἕξει. 209
ιε'. Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μείζων ᾖ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μείζονα ἕξει. κἂν ἡ πλευρὰ τῷ πλευρᾷ μὴ μείζων ᾖ, οὐδὲ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μείζονα ἕξει. 209
ιϛ'. Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μείζων ᾖ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τῷ πλευρᾷ μείζονα ἕξει. κἂν ἡ πλευρὰ τῷ πλευρᾷ μὴ μείζων ᾖ, οὐδ' ὁ κύβος τὸν κύβον μείζονα ἕξει. 210
ιη'. Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ ἐπιπέδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. 210
Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ μίαν τὸν μέσου αὐτῶν ἀνάλογον ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, ἐν τῷ λόγῳ τῷ ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν. 211
ιθ'. Δύο ὁμοίων στερεῶν, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. 211
κ'. Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογος ἐμπίπτῃ ἀριθμὸς, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται οἱ ἀριθμοί. 212
κα'. Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοὶ, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀριθμοί, 213
κβ'. Ἐὰν ᾖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ τρίτος, τετράγωνος ἔσται. 214
κγ'. Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται. 214
κδ'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται. 214
κε'. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται. 214
κϛ'. Οἱ ὅμοιοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. 215
κζ'. Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν. 215

δευτέρα καὶ τῆς ἐχάτης ἴσος τῷ πρώτῳ. ἔσται ὡς ἡ τῆς δευτέρας ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τῆς ἐχάτης ὑπεροχὴ πρὸς τὰς πρὸ αὐτῆς ἁπάσας. 233

λς'. Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συνετεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος, τέλειος ἔσται. 234

ΠΙΝΑΞ.

Τῶν Ἑνδεκάτης τῆς τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Ὅρος Α'. Στερεόν ἐστι τὸ μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος ἔχον. 236

β'. Στερεοῦ δὲ πέρατα, ἐπιφάνειαι. 237

γ'. Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας. 237

δ'. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν. 237

ε'. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου, καὶ ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος τῆς εὐθείας, εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης. 237

ς'. Ἐπίπεδα πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων, πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ, ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων. 238

ζ'. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν. 238

η'. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι, τὰ ἀσύμπτωτα. 238

θ'. Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τὸ πλῆθος. 239

ι'. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τῷ πλήθει, καὶ τῷ μεγέθει. 239

ια'. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων, ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. ἢ καὶ οὕτω, στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων. 239

ιβ'. Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστός. 240

ιγ'. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι, καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ, παραλληλόγραμμα. 240

ιδ'.

ιδ'. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιενεχθὲν χῆμα. 240

ιε'. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν, ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται. 240

ις'. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ, τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου. 240

ιζ'. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν, εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. 241

ιη'. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν χῆμα. καὶ ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ἢ τῇ λοιπῇ, τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος. ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος. 241

ιθ'. Ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν, ἡ μένουσα, περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται. 241

κ'. Βάσις δὲ, ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης γραφόμενος. 241

κα'. Κύλινδρος δὲ, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν χῆμα. 241

κβ'. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται. 241

κγ'. Βάσεις δὲ, οἱ κύκλοι, οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίων περαινομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι. 241

κδ'. Ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἵ τε ἄξονες, καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν. 241

κε'. Κύβος, ἐστὶ χῆμα στερεὸν, ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον. 241

κς'. Ὀκτάεδρον, ἐστὶ χῆμα στερεὸν, ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. 241

κζ'. Δωδεκάεδρον, ἐστὶ χῆμα στερεὸν, ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων, καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον. 241

κη'. Εἰκοσάεδρον, ἐστὶ χῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων, ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. 241

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Α'. Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ. 242

β'. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ᾧ εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ παν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. 242

γ'. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστι. 243
δ'. Ἐὰν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῆς ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 243
ε. Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. 244
ς'. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. 244
ζ'. Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. 245
η. Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 246
θ'. Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. 247
ι. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων πρὸς δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσι. 247
ια. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 248
ιβ'. Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι. 248
ιγ'. Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου, δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ δύο μέρη. 249
ιδ'. Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα. 249
ιε. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων πρὸς δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων παράλληλοι ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα. 250
ις'. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι. 251
ιζ'. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. 251
ιη. Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 252
ιθ'. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 252
κ'. Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο οἱασοῦν τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσὶ πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. 253
κα'. Ἅπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων, ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται. 254

κβ'. Ἐὰν ὦσι ξεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι δ' εἶαι, δυατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυσῶν τὰς ἴσας δ' εἶας, ξίγωνον συσήσασθαι. 254

κγ'. Ἐκ ξιῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, σερεὰν γωνίαν συσήσασθαι. δεῖ δὴ τὰς ξεῖς τεσάρων ὀρθῶν ἐλάσονας εἶναι. 256

κδ'. Ἐὰν σερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτῷ ἐπίπεδα ἴσά τε, καὶ παραλληλόγραμμά ἐστι. 260

κε'. Ἐὰν σερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσαι ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτω τὸ σερεὸν πρὸς τὸ σερεόν. 260

κς'. Πρὸς τῇ δοθείσῃ δ' εἶᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ σερεᾷ γωνίᾳ ἴσην σερεὰν γωνίαν συσήσασθαι. 261

κζ'. Ἀπὸ τῆς δοθείσης δ' εἶας τῷ δοθέντι σεριῷ παραλληλεπιπέδῳ ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον σερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι. 263

κζ'. Ἐὰν σερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ καὶ τὰς διαγωνίους τῆς ἀπεντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ σερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. 263

κθ'. Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα σεριὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεςῶσαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσιν δ' εἰῶν, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. 264

λ'. Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα σεριὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφεςῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς δ' εἰῶν, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. 264

λα'. Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα σεριὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. 265

λβ'. Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα σεριὰ παραλληλεπίπεδα, πρὸς ἄλληλά ἐσιν, ὡς αἱ βάσεις. 267

λγ'. Τὰ ὅμοια σεριὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν ξιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῆς ὁμολόγων πλευρῶν. 267

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσαρες δ' εῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσαι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας σερεὸν παραλληλεπίπεδον, ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἐπειδὴ περ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν. 268

λδ'. Τῶν ἴσων σεριῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν σεριῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. 269

λε'. Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι δ' εῖαι

εὐθεῖαι ἐπισαθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μὴ τὴν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῆς μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῆς ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάθετοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῆς γενομένων σημείων ὑπὸ τὴν καθέτων ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἴσας γωνίας περιέξουσι μὴ τὴν μετεώρων. 271

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι, ἐπισαθῶσι δὲ ἐπ' αὐτῆς μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι, ἴσας γωνίας περιέχουσαι μὴ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἀπ' αὐτῶν κάθετοι, ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. 273

λς'. Ἐὰν ᾖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῶν ᾖσων εὐθειῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. 273

λζ'. Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν παραλληλεπίπεδα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται, καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. 274

λη'. Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος. 275

λθ'. Ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων, καὶ ἡ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. 275

μ'. Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα. 276

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Δωδεκάτου Εὐκλειδείου Στοιχείου.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Α'. Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. 278

β'. Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. 279

γ'. Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις τρίγωνους βάσεις ἐχούσας, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσ-

πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. 281

δ'. Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκάτερα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τόπον γενοῦται διηρημένη, καὶ τοῦτο ἀεὶ γένηται, ἔστιν ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτω καὶ τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα, πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. 283

ε'. Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὦσαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ βάσεις. 285

ς'. Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὦσαι πυραμίδες, καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. 286

ζ'. Παν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας. 287

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τὴν τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπειδήπερ καὶν ἕτερόν τι σχῆμα ἔχῃ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος, καὶ τὸ αὐτὸ ἀπεναντίον, διαιρεῖται εἰς πρίσματα τριγώνους ἔχοντα βάσεις καὶ τὰς ἀπεναντίον. 288

η'. Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 288

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 289

θ'. Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι. 289

ι'. Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ, τὴν τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον. 290

ια'. Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι, καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς βάσεις. 293

ιβ'. Οἱ ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. 295

ιγ'. Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα. 298

ιδ'. Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν. 299

ιε'. Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι. 299

ις'. Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὸν μείζονα κύκλον, πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος κύκλου. 301

ιζ'. Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὐσῶν, εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύγωνον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας καὶ τὴν ἐπιφάνειαν. 301

Πόρισμα. Ἐὰν καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν ἄλλο στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, ὅμοιον τῷ ἀνωτέρω, τὸ παρὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ πολύεδρον ἐπιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. 305

ιά. Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν ἐπιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων. 305

ΠΙΝΑΞ.

Τῶν Τρισκαιδεκάτου τῆς τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Α'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης. 307

Σχόλιον, Ἀνάλυσις καὶ Σύνθεσις τί; 308

Ἀνάλυσις, ἐστὶ λῆψις τοῦ ζητουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων, ὡς ὁμολογούμενον, ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον. 308

Σύνθεσις, ἐστὶ λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων, ἐπὶ τὸν τοῦ ζητουμένου κατάληψιν. 308

β'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύναται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπόν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. 309

Τοῦ Εἰρημένου Θεωρήματος ἀνάλυσις. 310

Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ. 310

γ'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἔλασσον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου. 310

Τοῦ εἰρημένου Θεωρήματος ἀνάλυσις. 311

Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ. 311

δ'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετρά-

γω-

γωνον, καὶ τὸ ἐλάττονος τμήματος τὰ σωαμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς μείζονος τμήματος τετραγώνου. 312
Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις. 312
Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ. 313
ε'. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ ἴση τῇ μείζονι τμήματι, ὅλη ἡ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα. 313
Ἀνάλυσις τοῦ εἰρημένου θεωρήματος. 313
Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ. 314
ς'. Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. 314
ζ'. Ἐὰν πυραμίδος ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι, ἤτοι αἱ πρὸς τῷ ἑξῆς, ἢ αἱ μὴ πρὸς τῷ ἑξῆς ἴσαι ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πυράμιδος. 315
η'. Ἐὰν πυραμίδος ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς πρὸς τῷ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τῆς πυραμίδος πλευρᾷ. 216
θ'. Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ, καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων συντεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά. 317
ι'. Ἐὰν εἰς κύκλον πυράμιδος ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πυραμίδος πλευρὰ δυνάται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου, καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τὴν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένων. 317
ια'. Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πυράμιδος ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πυραμίδος πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. 319
ιβ'. Ἐὰν εἰς κύκλον κύβος ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. 320
ιγ'. Πυραμίδα συστήσασθαι, καὶ σφαῖραν περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. 321
ιδ'. Ὀκτάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαῖραν περιλαβεῖν, μήτε καὶ τὴν πυραμίδα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου. 323
ιε'. Κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαῖραν περιλαβεῖν, μήτε καὶ τὰ πρόσθεν, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει τριπλῆ ἐστι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. 324
ις'. Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαῖραν περιλαβεῖν, μήτε καὶ τὰ εἰρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάττων. 325
Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ τὰ ἑξῆς. 328

ιζ'. Δωδεκάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ἢ καὶ τὰ προειρημένα χήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆ δωδεκαέδρυ πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. 328

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι τῆς τῆ κύβυ πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ τῆ δωδεκαέδρυ πλευρά. 331

ιη'. Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε χημάτων ἐκθέσθαι, καὶ συγκεῖναι πρὸς ἀλλήλας. 331

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Τεσσαρεσκαιδεκάτου τῶν τῆ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

α'. Ἡ ἀπὸ κέντρου κύκλου τινὸς, ἐπὶ τινὶ τῆ πενταγώνυ πλευρᾶ, τῆ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένη, κάθετος ἀγομένη, ἡμίσεια ἐστὶ συναμφοτέρου, τῆς τε ἐκ τῆ κέντρου, καὶ τῆς τῆ δεκαγώνυ, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. 336

β'. Ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τῆ δωδεκαέδρυ πενπάγωνον, καὶ τὸ τῆ εἰκοσαέδρυ τρίγωνον τῶν εἰς τινὶ αὐτινὶ σφαῖραν ἐγγραφομένων. 336

γ'. Ἐὰν ᾖ πενπάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, καὶ περὶ τοῦτο κύκλος, καὶ ἀπὸ τῆ κέντρου κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν ἀχθῇ, τὸ ἑξακοντάκις ὑπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τῆς καθέτου, ἴσον ἐστὶ τῇ τῆ δωδεκαέδρυ ἐπιφανείᾳ. 338

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ὡς ἡ τῆ δωδεκαέδρυ ἐπιφάνεια πρὸς τινὶ τῆ εἰκοσαέδρυ ἐπιφάνειαν, καὶ τὰ ἐξῆς. 339

δ'. Τούτου δὴλου ὄντος, δεικτέον, ὅτι ἔστι, ὡς ἡ τῆ δωδεκαέδρυ ἐπιφάνεια πρὸς τινὶ τῆ εἰκοσαέδρου, οὕτως ἡ τῆ κύβου πλευρὰ πρὸς τινὶ τῆ εἰκοσαέδρυ πλευρά. 339

Πόρισμα. Α'. Δῆλον, ὅτι ἐὰν εἰς τινὶ αὐτινὶ σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκαέδρόν τε καὶ εἰκοσαέδρον, λόγον ἔχουσιν ἀδιαθείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τῆ μείζονος τμήματος πρὸς τινὶ δυναμένῳ τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τῆ ἐλάσσονος τμήματος. 343

Πόρισμα. β'. Τούτων δὴ πάντων γνωρίμων ἡμῖν γενομένων, δῆλον, ὅτι ἐὰν εἰς τὴν αὐτινὶ σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκαέδρον καὶ εἰκοσαέδρον, τὸ δωδεκαέδρον πρὸς τὸ εἰκοσαέδρον λόγον ἔχει, ὃν διαθείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης. 344

ΠΙΝΑΞ.

Τῦ Πεμτεκαιδεκάτυ τῆς τῦ Εὐκλείδυ Στοιχείων.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Α'. Εἰς τὸν δοθέντα κύβον πυραμίδα ἐγγράψαι. 345

β'. Εἰς τινὰ δοθεῖσαν πυραμίδα ὁκτάεδρον ἐγγράψαι. 345

γ'. Εἰς τὸν δοθέντα κύβον ὁκτάεδρον ἐγγράψαι. 346

δ'. Εἰς τὸ δοθὲν ὁκτάεδρον κύβον ἐγγράψαι. 346

ε'. Εἰς τὸ δοθὲν εἰκοσάεδρον δωδεκάεδρον ἐγγράψαι. 347

ΠΙΝΑΞ.

Τῦ Πρώτυ τῆς Σφαιρικῶν.

Ὅρος. α'. Σφαῖρα ἐστὶ χῆμα στερεὸν ὑπὸ μιᾶς ἐπιφανείας περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἅπασαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἀφ' ἑνὸς σημείυ τῆς ἐντὸς τῆς σφαίρας κειμένων ἴσαι εἰσί. 354

β'. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας, τὸ αὐτὸ σημεῖον καλεῖται. 354

γ'. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖα γραμμὴ διὰ τῦ κέντρυ τῆς σφαίρας ἠγμένη, καὶ περατυμένη, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, περὶ ἣν περιενέχθησαν ἡ σφαῖρα περιφέρεσθαι δυνάται. 354

δ'. Πόλοι δὲ τῆς σφαίρας εἰσὶ τὰ τῦ ἄξονος πέρατα. 354

ε'. Πόλοι δὲ κύκλυ ἐν σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένυ ἐστὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κείμενον τῆς σφαίρας, ἀφ' ὗ πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τινὰ τῦ κύκλυ περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. 354

ς'. Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένοι ἐξ ἴσυ τῦ κέντρυ ἀφίστανται, ὅταν αἱ ἀπὸ τῦ κέντρυ τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι. 354

ζ'. Κύκλοι μέγιστοί εἰσιν ἐν σφαίρᾳ, οἱ διὰ τῶν κέντρων τῆς σφαίρας διερχόμενοι καὶ δίχα τινὰ σφαῖραν τέμνοντες. 354

η'. Κύκλοι ἐλάσσονές εἰσιν, οἱ μὴ διὰ τῦ κέντρυ διερχόμενοι τῆς σφαίρας, καὶ εἰς δύο ἄνισα τινὰ σφαῖραν τέμνοντες. 354

θ'. Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἐξ ἴσυ τῶν οἰκείων ἀφισάμενοι πόλων, καὶ ὧν ἐπὶ τῆς περιφερείας αἱ ἀπὸ τῦ πόλυ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσί, μείζων δὲ ὁ μᾶλλον τῦ οἰκείυ ἀφισάμενος πόλυ. 354

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Α'. Ἐὰν σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένῳ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀχθῇ, ἐντὸς πεσεῖται τῆς σφαίρας. 355

β'. Ἐὰν σφαῖρα οἱῳδήποτε τμηθῇ ἐπιπέδῳ, ἡ κοινὴ τομὴ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου κύκλος ἐστί. 355

Πόρισμα, α'. Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι τὸ αὐτὸ ἐστι κέντρον τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ κύκλου, τοῦ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένου, ὡς ἐπὶ τοῦ δ: δέδεικται χήματος. 356

Πόρισμα, β'. Ἔτι ἐὰν ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, τοῦ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένου, ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου πίπτει, ὡς ἐπὶ τοῦ β': χήματος. 356

γ'. Τῆς δοθείσης σφαίρας τὸ κέντρον εὑρεῖν. 356

Πόρισμα, α'. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος ἐν αὐτῇ κύκλου ἀγομένης καθέτου ἐστί. 357

Πόρισμα, β'. Ἐὰν ἡ τομὴ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. καὶ τὰ ἑξῆς. 357

δ'. Ἡ σφαῖρα οὐκ ἅπτεται τοῦ ἐπιπέδου κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ εἷς. 357

Πόρισμα. Δῆλον ἐκ τούτου, ὅτι ἡ δύο τινὰ σημεῖα τῆς σφαίρας ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα, εἴδον ὅλη τῆς σφαίρας πίπτει. 358

ε'. Ἐὰν σφαῖρα ἅπτηται ἐπιπέδου, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τινὰ ἁφὴν εὐθεῖα ἀχθῇ, κάθετος ἔσται ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὸ ἁπτόμενον ἐπίπεδον. 358

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν δηλονότι ἀπὸ τῆς ἁφῆς τοῦ ἁπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας κάθετος πρὸς τὸ αὐτὸ ἀνασταθῇ ἐπίπεδον τῆς σφαίρας, ἐπ' αὐτῆς ἐστι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. 358

ς'. Ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸν κέντρον τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων γραμμὴ ἀχθῇ, ὀρθὴ ἔσται ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον. 359

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ἀχθῇ, διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διέρχεται. 359

ζ'. Τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων οἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου, διερχόμενοι τῆς σφαίρας μέγιστοί εἰσι, καὶ ἀνάπαλιν, οἱ μέγιστοι διὰ τοῦ κέντρου διέρχονται τῆς σφαίρας, οἱ δὲ ἐξ ἴσου ἀφεστάμενοι τοῦ κέντρου ἴσοί εἰσι, καὶ ἀνάπαλιν, οἱ ἴσοι ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου ἀφίστανται, καὶ ἔτι οἱ ἀπώτερον τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγύτερον ἐλάσσονές εἰσι. 359

Πόρισμα. α'. Ἐκ τούτου ῥᾴδιον συνάγεται, ὅτι πάντες οἱ ἐν τῇ σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι, ἴσοί εἰσιν, ἡ γὰρ τοῦ μεγίστου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλου ἡμιδιάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας. 361

Πό-

Πόρισμα. β'. Ἔτι ἐκαπέρωθεν τῆ οἱασδήποτε ἐν σφαίρᾳ μεγίστε κύκλε ἃ πλείες, ἢ δύο μόνον ἴσες εἶναι τῶν ἐλαττόνων ἐν αὐτῇ κύκλων. 361

ή. Ἐὰν παρὰ τὸ κέντρε τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τε ἐν αὐτῇ κύκλε κάθετος ἀχθῇ, διὰ τῶν πόλων τε κύκλε διελεύσεται, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν ἀπὸ τε πόλε ἐν σφαίρᾳ κύκλε ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτε κάθετος ἀχθῇ, διά τε τε κέντρε τῆς σφαίρας διελεύσεται, καὶ τε ἀπεναντίον πόλε τε κύκλε. 361

θ'. Ἐὰν διὰ τῶν πόλων τινὸς τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων εὐθεῖα ἀχθῇ, κάθετός ἐσιν ἐπὶ τὸ τε κύκλε ἐπίπεδον, καὶ διὰ τε κέντρε τῆς σφαίρας διέρχεται. 363

Πόρισμα. Ἐκ τέτε δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τε πόλε τινὸς κύκλε κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτε ἀχθῇ, ἐπὶ τε κέντρε πεσεῖται τε κύκλε, καὶ ἀνάπαλιν. 363

ί. Οἱ μέγισοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι δίχα ἀλλήλοις τέμνονται, καὶ ἀνάπαλιν, οἱ δίχα ἐν σφαίρᾳ ἀλλήλοις τεμνόμενοι κύκλοι, μέγισοί εἰσιν. 364

ια. Ἐὰν κύκλος μέγισος ἐν σφαίρᾳ κύκλον ἐλάσσονα πρὸς ὀρθὰς γωνίας τέμνῃ, δίχα αὐτὸν τέμνει, καὶ διὰ τῶν πόλων αὐτε διέρχεται, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν δίχα αὐτὸν τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς γωνίας τέμνει. 365

ιβ'. Ἐὰν κύκλος μέγισος ἐν σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων ἑτέρε κύκλε διέρχεται, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει. 366

Πόρισμα, α'. Ἐκ τέτε δῆλον, ὅτι ἐὰν μέγισος ἐν σφαίρᾳ κύκλος διὰ τῆ πόλων μεγίστε κύκλε τῆ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ διέρχεται, κἀκεῖνος διὰ τῆ πόλων αὐτε διέρχεται, καὶ ἑκάτερος ὀρθός ἐσι πρὸς τὸν ἕτερον. 366

Πόρισμα, β'. Ἔτι κύκλος ἐν σφαίρᾳ δι' ἑκατέρε τῆ πόλων ἑτέρε κύκλε διερχόμενος μέγισός ἐσιν, ὅτι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνων, διὰ τε κέντρε τῆς σφαίρας διέρχεται. 366

ιγ'. Ἐὰν ἀπὸ τε πόλε μεγίστε τινὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλε ἐπί τινα περιφέρειαν αὐτε εὐθεῖα ἀχθῇ, ἴση ἐσὶ τῇ τε ἐν μεγίστῳ κύκλῳ πεταγώνε πλευρᾷ τῇ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, κἂν ἡ ἀπὸ τε πόλε τινὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλε ἐπί τινα περιφέρειαν αὐτε ἀγομένη εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ τε ἐν μεγίστῳ κύκλῳ πεταγώνε πλευρᾷ, μέγισός ἐσιν ἐκεῖνος. 367

Πόρισμα. Ἐκ τέτε δῆλον, ὅτι οἱ μέγισοι κύκλοι περιφερείᾳ ἀφίστανται τῶν ἰδίων πόλων, καὶ οἱ περιφερείᾳ ἀφισάμενοι τῶν ἰδίων πόλων, μέγισοί εἰσι. 368

ιδ'. Τῇ διαμέτρῳ παντὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλε ἴσην εὐθεῖαν εὑρεῖν. 368

ιέ. Τῇ διαμέτρῳ τῆς δοθείσης σφαίρας ἴσην εὐθεῖαν εὑρεῖν. 369

ις'. Δύο, ὡς ἔτυχε, σημείων δοθέντων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸν διὰ αὐτῶν διερχόμενον μέγισον κύκλον εὑρεῖν. 370

ιζ'. Παντὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλε τὸς πόλες εὑρεῖν. 370

ιή. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ εὐθειά τις διὰ τε κέντρε εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τε κέντρε δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει, καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. 371

ΠΙΝΑΞ.

Τοῦ Δευτέρου τῆς Σφαιρικῆς.

Ὅρος. Α'. Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ παράλληλοί εἰσιν, ὧν τὰ ἐπίπεδα ἀσύμπτωτα. 373

β'. Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἀλλήλων ἐφάπτεσθαι λέγονται, ὅτε ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τῶν κύκλων ἐφάπτεται ἑκατέρου τῶν κύκλων καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον, καθ' ὃ καὶ οἱ κύκλοι ἐφάπτονται. 373

γ'. Κύκλος πρὸς κύκλον ἐγκλίνειν λέγεται, ὅταν ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων εὐθειῶν πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἑκατέρου τῶν κύκλων ἀξεῖα ᾖ, ἥτις καὶ κλίσις τῶν αὐτῶν κύκλων πρὸς ἀλλήλους λέγεται. 373

δ'. Κύκλος πρὸς κύκλον ὁμοίως κεκλῖσθαι λέγεται, καὶ ἕτερος πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. 373

ε'. Κλίσεως δύο κύκλων πρὸς ἀλλήλους μέζον ἐστὶ τόξον μεγίστου κύκλου διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν κύκλων διερχομένου, τὸ μεταξὺ τῶν κύκλων ἐναπολαμβανόμενον. 373

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Α'. Οἱ παράλληλοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι τοὺς αὐτοὺς ἔχουσι πόλους, καὶ οἱ τοὺς αὐτοὺς ἐν σφαίρᾳ πόλους ἔχοντες κύκλοι, παράλληλοί εἰσιν. 373

β. Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι τῷ αὐτῷ συμπέσωσι σημείῳ, μεγίστου τινὸς κύκλου διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου αὐτῶν διερχομένου, οἱ κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων. 374

γ'. Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς αὐτῶν διέρχεται. 375

δ'. Ἐὰν ὦσιν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἁπτόμενοι ἀλλήλων, καὶ διὰ τῶν πόλων τοῦ ἑνὸς καὶ κοινῆς αὐτῶν ἁφῆς μέγιστος διέλθῃ κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τῶν πόλων τοῦ ἑτέρου. 376

ε'. Ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἅπτηται ἐλάσσονος ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλου, διχᾶται ὁ αὐτὸς καὶ ἑτέρου ἅπτεσθαι κύκλου ἴσου τε καὶ παραλλήλου τῷ προτέρῳ. 377

Πόρισμα. α'. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἅπτηται ἑκατέρωθεν δύο ἐλασσόνων κύκλων ἴσων τε καὶ παραλλήλων, τὰ τῆς ἁφῆς σημεῖα καὶ διάμετρον αὐτίκεινται. 378

Πόρισμα. β'. Ἔτι ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐλασσόνων δύο ἅπτηται κύκλων, οἱ ἐλάσσονες κύκλοι ἴσοί τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. 378

ς'. Ἐὰν

ς'. Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἐλάσσονες ἴσοί τε καὶ παράλληλοι, ὁ τὸν ἑνὸς ἁπτόμενος μέγιστος κύκλος καὶ τὸν ἕτερον ἅπτεται. 378

Πόρισμα. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι αἱ δυνάμεναι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πλείονες, ἢ δύο ἐλάσσονες κύκλοι ἴσοί τε καὶ παράλληλοι εἶναι. 379

ζ'. Ἐὰν κύκλος μέγιστος κύκλον τινὰ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πλαγίως τέμνῃ, διχοτομεῖται ὁ αὐτὸς δύο κύκλων ἅπτεσθαι ἴσων τε ἀλλήλοις καὶ παραλλήλων τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ. 379

η'. Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλων ἀλλήλους τεμνομένων διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου κύκλος μέγιστος διέλθῃ, δίχα τὰ τμήματα ἑκατέρου τῶν αὐτῶν κύκλων τέμνει. 380

θ'. Ἐὰν κύκλοι μέγιστοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων παραλλήλων κύκλων διέλθωσι, τὰ μὲν τῶν παραλλήλων τόξα τὰ ὑπὸ τῶν μεγίστων περιλαμβανόμενα κύκλων, ὅμοιά εἰσι, τὰ δὲ τῶν μεγίστων τόξα τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἴσα ἐστί. 381

ι'. Ἐὰν ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν ἴσων κύκλων ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλων ἐπισταθῶσιν, ὥστε ὀρθὰ εἶναι πρὸς τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρεθῇ τόξα ἴσα ἀλλήλοις ὑπερέχοντα, ἢ ἐλλείποντα τῷ ἡμίσει τῶν τμημάτων, ἀπὸ δὲ τῶν τομῶν εὐθεῖαι ἴσαι ἐπὶ τὰς τῶν κύκλων περιφερείας ἀχθῶσι, τὰ ἐναπολαμβανόμενα τῶν κύκλων τόξα μεταξὺ τῶν διαμέτρων, καὶ τῶν ἀγομένων εὐθειῶν ἴσα ἔσονται. 382

ια'. Ἐὰν ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν ἴσων κύκλων ἴσά τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλων ἐπισταθῶσιν, ὥστε ὀρθὰ εἶναι πρὸς τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα, ἀπὸ δὲ τῶν τμημάτων τε καὶ κύκλων ἴσα τόξα ἀφαιρεθῇ, αἱ πρὸς τομὰς τῶν τόξων ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. 385

Λῆμμα. Ἐὰν δύο ξίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν ὁποιανδήποτε γωνίᾳ ὁποιαδήποτε ἴσην, καὶ ἡ λοιπὴ πλευρὰ τῇ λοιπῇ ἴση ἔσται, καὶ ὅλον τὸ ξίγωνον ὅλῳ τῷ ξιγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. 386

ιβ'. Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι, πολλῶν ὄντων παραλλήλων ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τὸν μὲν ἐλάσσονος ἅπτωνται, τοὺς δὲ λοιποὺς τέμνωσι, τὰ τῶν μεγίστων τόξα, τὰ τε ὑφ' ἑκάστου τῶν παραλλήλων περιεχόμενα, καὶ τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ τῶν παραλλήλων τὰ ὑπὸ τῶν μεγίστων περιεχόμενα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, καὶ τούτων αὖθις ὅσα μὲν διὰ τῆς τομῆς τῶν μεγίστων διέρχεται κύκλων ἀπό τινος προθήκης, ἢ ἀφαιρέσεως ὅμοιά ἐστι τῷ μεταξὺ τῶν ἀφῶν τόξῳ, τῷ ὑπερ οἱ μέγιστοι παραλλήλους ἅπτονται, ὅσα δὲ διὰ τῶν καθ' ἃ οἱ κύκλοι τέμνονται μερῶν διέρχεται μὴ ἀφαιρέσεως, ὅσα δὲ διὰ τῶν πρὸς ἃ οἱ τέμνοντες οἱ κύκλοι διαβαίνουσι μὴ προθήκης ἐκείνῳ ὅμοιά εἰσιν. 387

ιη. Κύ-

ιγ'. Κύκλε ἐλάσσονος ἐν σφαίρᾳ δοθέντος κύκλον μέγιστον καταγράψαι ἁπτόμενον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τὸ δοθὲν σημεῖον. 389

ιδ'. Δοθέντος σημείου ἐν σφαίρᾳ μεταξὺ δύο κύκλων παραλλήλων τε καὶ ἴσων, κύκλον μέγιστον διὰ τοῦ δοθέντος γράψαι σημείου ἁπτόμενον ἑκατέρου τῶν παραλλήλων. 389

ιε'. Δύο μέγιστοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι, ἐὰν ὅμοια τόξα παραλλήλων κύκλων ἐναπολαμβάνωσιν, ἢ ἄμφω διὰ τῶν πόλων διέρχονται τῶν παραλλήλων, ἢ τοῦ αὐτοῦ ἑκάτερος ἅπτεται, ἢ γὰρ τὰς παραλλήλους ἑκάτερος τέμνει. 391

ις'. Τῶν ἐν σφαίρᾳ παραλλήλως κειμένων κύκλων μεγίστῳ τινὶ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλῳ, οἱ ἐξ ἴσου τοῦ μεγίστου ἀφιστάμενοι κύκλοι, καὶ ὧν μεταξὺ καὶ τοῦ μεγίστου τὰ τόξα ἴσα ἐστὶν, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν, ὁ δὲ ἔλαττον ἀφιστάμενος, καὶ ὃ μεταξὺ καὶ τοῦ μεγίστου ἔλαττον ἐμπεριλαμβάνεται τόξον, μείζων ἐστὶν, ὃ δὲ μεταξὺ μεῖζον ἐμπεριλαμβάνεται τόξον, ἐλάττων ἐστίν. 392

ιζ'. Ἐὰν ὦσι ἴσοι κύκλοι παράλληλοι μεγίστῳ τινὶ ἐν σφαίρᾳ κύκλῳ, τὰ τοῦ μεγίστου κύκλου τόξα τὰ μεταξὺ αὐτῆς τε καὶ τῶν, πρὸς ὃν παραλλήλως ἔχουσι, μεγίστου κύκλου ἐναπολαμβανόμενα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. 394

ιη'. Ἐὰν κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ ἑλάσσονάς τε καὶ παραλλήλους τέμνῃ κύκλους μὴ διὰ τῆς πόλων αὐτῆς διερχόμενος, καὶ τέμνει αὐτοὺς δίχα, καὶ τὰ τῆς παραλλήλων μείζονα τμήματα πρὸς τὸν ἐγγύτερον ἀφορῶσι πόλον. 394

ιθ'. Ἐὰν κύκλοι παράλληλοί τε καὶ ἐλάσσονες ἐν σφαίρᾳ ὑπὸ μεγίστου τέμνωνται κύκλου, μὴ διὰ τῆς πόλων αὐτῆς διερχομένου, ὁ ἐγγύτερος τῷ πόλῳ μᾶλλον αὐτοῦ ἴσως τέμνεται. 395

κ'. Ἐπὶ τῆς ἴσων σφαιρῶν κύκλος κύκλῳ μᾶλλον ἐγκλινόμενός ἐστιν, ὃ ὁ πόλος ἔλαττον ἀφίσταται τοῦ πόλου τοῦ, ᾧ ἐγκλίνεται, κύκλου, ὧν δὲ οἱ πόλοι ἐξ ἴσου ἀφίστανται ἴσας καὶ τὰς ἐγκλίσεις ἔχουσιν. 396

Πόρισμα. Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἐὰν διὰ τῶν πόλων τοῦ τε ἐγκλινομένου, καὶ τοῦ, ᾧ ἐγκέκλιται ὁ αὐτὸς, μέγιστος διέλθῃ κύκλος, τὸ ἐναπολαμβανόμενον τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου ὑπό τε τοῦ ἐγκλινομένου, καὶ ᾧ ἐγκέκλιται, μέτρον ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου κλίσεως. 398

κα'. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ληφθῇ τι σημεῖον μὴ ὂν πόλος κύκλου τινὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ δύο εὐθεῖαί τινες ἀχθῶσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου μείζονες ἢ ὑπὸ τὸν πόλον τοῦ κύκλου, ὡς δὲ αὐτοῦ ἀγομένη, ἐλαχίστη δὲ ἡ καὶ διάμετρον ταύτῃ ὑποκειμένη, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ὑπὸ τὸν πόλον τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστὶ, δύο δὲ μόναι ἴσαι προσπίπτωσιν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς τε μεγίστης καὶ ἐλαχίστης. 398

κβ'. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ληφθῇ τι σημεῖον μὴ ὂν κύκλου τινὸς πόλος, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τόξα μεγίστων κύκλων ἀχθῶσι, μέγιστον μέν ἐστι τὸ διὰ τοῦ πόλου τοῦ κύκλου, ἐλάχιστον δὲ τὸ λοιπὸν,

τῶν

τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ τὸ ἔγγιον τῆ διὰ τῆ πόλε τῆ ἀπώτερον μεῖζόν ἐστι, δύο δὲ μόνα ἴσα ἀχθήσονται ἀπὸ τῆ αὐτῆ σημείε ἐφ' ἑκάτερα τῆτε μεγίστε ἐλαχίστε. 399

κγ'. Ἐὰν κύκλος μέγιστος ἅπτηται μὲν τῆ ἐλάσσονος τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ παραλλήλων, τέμνῃ δὲ τὸν μείζονα, ὥστε τὸν πόλον αὐτῆ μεταξὺ εἶναι τῶν αὐτῶν παραλλήλων, ἅπτωνται δὲ καὶ τῆ μείζονος τῶν παραλλήλων κύκλοι μέγιστοι ὁσοιδηποτοῦν, οἱ πόλοι τῶν ἁπτομένων τῆ μείζονος τῶν παραλλήλων ἐν τῇ περιφερείᾳ τῆ αὐτῆ εἰσι κύκλε, παραλλήλε ὄντος καὶ αὐτῆ τοῖς ἐξ ἀρχῆς παραλλήλοις, ἐλάττονος δὲ ἑκατέρε, καὶ πρὸς τὸν ἁπτόμενον τῆ ἐλάττονος τῶν ἐξ ἀρχῆς παραλλήλων, ὁ μὲν τῆ μείζονος ἁπτόμενος, καθ' ὃ τὸ ἔλαττον αὐτῆ τμῆμα δίχα τέμνεται, μεγίστω ἔχει καὶ τῶ κλίσιν, ὁ δὲ, καθ' ὃ τὸ μεῖζον αὐτῆ τμῆμα δίχα τέμνεται ἁπτόμενος, ἐλαχίστω ἔχει τῶ κλίσιν πρὸς τὸν αὐτὸν, τῶν δ' ἄλλων ὁ ἐγγύτερον τῆ τῶ μεγίστω ἔχοντος κλίσιν τῆ ἀπώτερον μᾶλλον ἐγκλινόμενός ἐστιν. 400

Πόρισμα. Ἐκ τέτε δῆλον, ὅτι οἱ ἐξ ἴσε ἀφεστάμενοι τῆ τῶ μεγίστω ἔχοντος κλίσιν, ἐξ ἴσε ἐγκλινόμενοί εἰσι. 402

κδ'. Ἐὰν κύκλε ἐλάσσονος ἐν σφαίρᾳ ὑπὸ μεγίστε τεμνομένε κύκλε κύκλοι μέγιστοι ἅπτωνται, καὶ τὰ τῶν ἁπτομένων τόξα τὰ μεταξὺ τῶν ἁφῶν καὶ κοινῶν τομῶν αὐτῶν τε καὶ τῆ τέμνοντος ἐμπεριλαμβανόμενα ἴσα ὦσιν, οἱ μέγιστοι ἐκεῖνοι κύκλοι ἐξ ἴσε εἰσὶν ἐγκλινόμενοι τῶ τέμνοντι κύκλῳ. 402

ΠΙΝΑΞ.

Τῆ Τρίτε τῶν τῆ Θεοδοσίε Σφαιρικῶν.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Α'. Ἐὰν τμῆμα κύκλε ὀρθὸν ἢ ἠγκλινόμενον ἢ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἑτέρε τινὸς κύκλε, τέμνον τὸν αὐτὸν κύκλον εἰς δύο ἄνισα, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τῆ τμήματος περιφερείας, ὥστε τὸ τμῆμα εἰς δύο κατ' αὐτὸ ἄνισα τέμνεσθαι, καὶ ἀπ' αὐτῆ πρὸς τῶ τῆ κύκλε μείζονα περιφέρειαν δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσιν, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ τὸ ἔλαττον τῆ τμήματος ὑποτείνουσα τόξον, ἀφ' ἧς αὔξονται μὲν ἄχρι τῆς διαμέτρε τῆς διερχομένης διὰ τῆ σημείε, καθ' ὃ ἡ ἀπὸ τῆ ληφθέντος σημείε κάθετος πίπτει, ἐλαττοῦνται δὲ ἕως ἂν πρὸς τὴν αὐτῶ ἀποκατασταθῶσι. 404

β'. Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ὦσι, καὶ ἀπὸ τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς ἴσα ἐν ἑκατέρῳ τόξα ληφθῶσιν, αἱ τὰ τόξα αὐτῶν ἐπιζευγνύσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἔσονται. 405

Λῆμμα, Α'. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τῆ τυχόντος τόξε δίχα τμηθείσης δύο ἑκατέρωθεν ληφθῶσι σημεῖα, ἐξ ἴσε τῆ μέσε ἀφεστάμενα, καὶ ἀπὸ τῶν σημείων

μείων κάθετοι ἐπ' αὐτῆς ἀναχθῶσι τὰ ἐναπολαμβανόμενα μεταξὺ τῆς καθέτων τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. 406

Λῆμμα, β'. Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τινὸς τόξου δίχα τμηθείσης κάθετος ἀπὸ τῆς τομῆς ἀναχθῇ, ληφθῇ δὲ ἑκατέρωθεν δύο σημεῖα ἐξ ἴσου τοῦ μέσου ἀφισάμενα, καὶ ἀπ' αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, καὶ τέμνων ἡ μὲν συμπέσῃ τῇ καθέτῳ ἐκβαλλομένῃ, ἡ δὲ μὴ συμπέσῃ, ἡ συμπίπτουσα ἔλαττον ἀφαιρεῖται τόξον. 407

γ'. Ἐὰν ὦσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας δύο κύκλοι μέγιστοι, καὶ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς δύο σημεῖα ληφθῶσιν, ἐξ ἴσου τῆς κοινῆς αὐτῶν ἀφισάμενα τομῆς, διὰ δὲ τῶν ληφθέντων σημείων ἐπίπεδα παράλληλα διέλθωσι τέμνοντα τὸν ἕτερον τῶν μεγίστων κύκλων, καὶ τέμνων τὸ μὲν ἐκβαλλόμενον συμπέσῃ τῇ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ κοινῆς τομῆς τῶν μεγίστων κύκλων ἐκβαλλομένῃ εὐθείᾳ, τὸ δὲ μὴ, τὸ συμπίπτον ἔλαττον ἀφαιρεῖται τόξον ἀπὸ τοῦ τεμνομένου μεγίστου κύκλου. 407

δ'. Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ δύο κύκλοι μέγιστοι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τεμνόμενοι, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ ἑνὸς περιφερείας τόξα ἴσα ληφθῶσιν, ἐπὶ δὲ τῆς τοῦ ἑτέρου σημεῖον, ὃ μή ἐστι πόλος τοῦ ὑπ' αὐτοῦ τεμνομένου, καὶ ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου κύκλοι παράλληλοι διὰ τῶν περάτων τῶν ληφθέντων τόξων ἐπὶ τῆς τοῦ ἑτέρου περιφερείας γραφῶσιν, οἱ κύκλοι ὅτοι τόξα ἄνισα ἀφαιρέσουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἐφ' ἧς τὸ σημεῖον εἴληπται, καὶ ὁ μείζονι γραφόμενος διαστήματι, μεῖζον καὶ τὸ τόξον ἀφαιρέσει. 409

ε'. Ἐὰν δύο κύκλοι μέγιστοι πλαγίως ἀλλήλοις τέμνωνται, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ ἑνὸς περιφερείας τόξα ἴσα ληφθῶσι, διὰ δὲ τοῦ πόλου τοῦ ἑτέρου κύκλου καὶ τῶν περάτων τῶν εἰλημμένων τόξων κύκλοι μέγιστοι γραφῶσιν, οἱ κύκλοι ὅτοι ἄνισα τόξα ἀφαιρέσουσιν ἀπὸ τῆς περιφερείας, ὃ πόλος ἐστὶ τοῦ εἰλημμένου σημείου, καὶ τὸ ἐναπολαμβανόμενον μεταξὺ τῶν διὰ τῶν περάτων τοῦ ἐγγύτερον τοῦ πόλου τμήματος ἀγομένων μεγίστων κύκλων μεῖζόν ἐστιν. 410

ς'. Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι δύο, καὶ τοῦ μὲν ἐλάττονος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, τὸν δὲ μείζονα τέμνῃ, καὶ τοῦ τεμνομένου αὖθις ἕτερος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, καθ' ὃ τέμνεται σημεῖον, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ἁπτομένου τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων τόξα ἴσα, ὥστε ἐν τῇ αὐτῇ εἶναι ἡμισφαιρίῳ, καὶ διὰ τῶν σημείων τῶν ληφθέντων τόξων παράλληλοι κύκλοι τοῖς ἐξ ἀρχῆς ἀχθῶσιν, οἱ κύκλοι ὅτοι ἄνισα τόξα ἀφαιρέσουσιν ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ ἁπτομένου τοῦ ἐλάττονος τῶν ἐξ ἀρχῆς παραλλήλων, καὶ τὸ ἐγγύτερον τοῦ πόλου τῶν παραλλήλων ἔλαττον ἔσται. 411

ζ'. Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι δύο, καὶ τοῦ μὲν ἐλάττονος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, τὸν δὲ μείζονα τέμνῃ, καὶ τοῦ τεμνομένου αὖθις ἕτερος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, καθ' ὃ τέμνεται σημεῖον. ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς

περι-

περιφερείας τῆ ἀπτομένῃ τῆ μείζονος τῶν παραλλήλων τόξα ἴσα, ὥστε ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἡμισφαιρίῳ, καὶ διὰ τῶν σημείων τῶν ληφθέντων τόξων κύκλοι μέγιστοι ἀχθῶσιν ἁπτόμενοι τῆ ἐλάττονος τῶν παραλλήλων, οἱ κύκλοι ἅπερ ἂν ἴσα τόξα ἀναπολήφονται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆ μεγίστε τῶν παραλλήλων, τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, καὶ τὸ ἀναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν διερχομένων κύκλων διὰ τῶν περάτων τῆ ἐγγύτερον τῆ πόλε ὄντος τόξον μεῖζον ἔσαι. 413

Λῆμμα. Δύο ἀνίσων μεγεθῶν δοθέντων, μέσον τύπων δύρειν, σύμμετρον ἑτέρῳ τινί, μὴ ἴσῳ ὄντι τῇ τῆ μείζονος τῶν δοθέντων πρὸς τὸ ἔλαττον διαφορᾷ. 414

ιδ'. Ἐὰν ἐπὶ μεγίστε κύκλε περιφερείας ὁ πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τύπον τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τὰς παραλλήλες, ἀπὸ δὲ τῆ λοξῆ ἴσαι περιφέρειαι ἀπολιφθῶσι, μὴ ἴσαι ἐξῆς, ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὲ μέρη τῆ μεγίστε τῶν παραλλήλων κύκλε. διὰ δὲ τῶν γνομένων σημείων, καὶ τῆ πόλε μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, ἀνίσως ἀπολήφονται περιφερείας τῆ μεγίστε τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονα ἀεὶ τινὶ ἔγγιον τῆ ἐξ ἀρχῆς μεγίστε κύκλου τῆς πορρώτερον. 415

ιε'. Ἐὰν ἐπὶ μεγίστε κύκλε περιφερείας ὁ πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τύπον τέμνωσι δύο κύκλοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τὰς παραλλήλες, ἀπὸ δὲ τῆ λοξῆ ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆ μεγίστε τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν σημείων καὶ τῆ πόλε τῶν παραλλήλων μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, ἔσαι ὡς ἡ τῆ μεγίστε τῶν παραλλήλων περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τῆ ἐξ ἀρχῆς μεγίστε κύκλε, καὶ τῆ ἐξῆς διὰ τῆ πόλε, πρὸς τινὰ τῆ λοξῆ κύκλε περιφέρειαν, τινὰ μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων, ἅπως ἡ ἐξῆς τῆ μεγίστε τῶν παραλλήλων, ἡ μεταξὺ τῶν διὰ τῆ πόλε καὶ τῶν ληφθέντων σημείων, μέγιστον κύκλων, πρὸς ἐλάττονά τινα περιφέρειαν τῆς τῆ λοξῆ κύκλε περιφερείας, τῆς μεταξὺ τῶν ληφθέντων σημείων. 417

Λῆμμα. Ἐὰν ἀπὸ ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίε τινὸς τριγώνε εὐθεῖα ἀχθῇ ἐπὶ τινὰ ἀπεναντίον αὐτῆ πλευράν, ὅλην αὖτε πλευράν, ἐφ' ἣν πίπτει ἡ ἀχθεῖσα εὐθεῖα, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸν τινὰ ὀρθὴν γωνίαν μέρος, ὅπερ ἡ γωνία πρὸς τινὰ γωνίαν. 419

ιζ'. Ἐὰν ἐπὶ μεγίστε κύκλε ὁ πόλος ᾖ τῶν παραλλήλων, καὶ τύπον τέμνωσι δύο κύκλοι μέγιστοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῶν παραλλήλων, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τὰς παραλλήλες, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων διερχόμενος, τέμνῃ τὸν λοξὸν, μεταξὺ τῆ μεγίστε τῶν παραλλήλων, καὶ ἐφ' ὃ ὁ λοξὸς ἅπτεται, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τινὰ τῆ κύκλε διάμετρον, ἐφ' ἣν ἐφάπτεται ὁ λοξὸς, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τῆ μεγίστε τῶν παραλλήλων περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τύπε τῆ ἐξ ἀρχῆς μεγίστε κύκλε, καὶ τῆ ἐξῆς

διὰ

διὰ τῶν πόλων, πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν, τὴν μεταξὺ τῶν αὐ-
τῶν κύκλων. 420

ιδ'. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφάπτωνται, ὁμοίας ἀφαιροῦντις περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων μεταξὺ αὐτῶν. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφάπτηται, ἢ ὧν οἱ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτοντο, καὶ πέμπῃ τοὺς αὐτοῦ ἐφαπτομένους μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ ἃ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτοντο, ἢ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, ἃ ἐφάπτεται ὁ λοξὸς, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων κύκλου περιφέρεια, ἢ μεταξὺ τῶν τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἐφαπτομένων, πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιγέρειαν, τὴν μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων. 422

ιβ'. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶσι μεγίστου τινὸς κύκλου πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν γινομένων σημείων γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι, ἢ διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων διερχόμενοι, ἢ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐφαπτόμενοι, ἴσας ἀπολήψονται περιφερείας ἀπὸ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν. 423

ιγ'. Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφάπτηται, ἢ ὧν ὁ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτετο, ἀνομοίας ἀπολήψονται περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονες, ἢ ὅμοιαι ἔσονται ἀεὶ, αἱ ἐγγιον ὁποτερουοῦν τῶν πόλων τῆς πορρώτερον. 424

ΕΚ.

ΕΚΘΕΣΙΣ
ΑΚΡΙΒΕΣΤΕΡΑ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ.

ΩΣΠΕΡ τῷ βυλομένῳ εἰσελθεῖν εἰς πολυανθῆ τινα λειμῶνα, καὶ λαβυρινθώδη ταῖς φρασιαῖς, καὶ τὰ ἐν αὐτῷ ποικίλα τῷ ἀνθῶν εἴδη αὐτοφεῖ ἐφιεμένῳ θεάσασθαι, καὶ ἑκάστου τῶν τὸ κάλλος, τὸ μέγεθος, τὴν χροιὰν, τὴν ποικιλίαν, τὴν ὀσμὴν, καὶ τ' ἄλλα, ὅσα τοῖς ἄνθεσι συμφύεται δὴ καὶ ἐπιφύεται, διαγνῶναι ζητοῦντι, προσήκει πρῶτον εἰδέναι τὴν εἰς τὸν αὐτὸν φέρουσαν λειμῶνα, καὶ τὴν ἐν τῷ περιβόλῳ τούτῳ θύραν μαθεῖν, καὶ ἀφειδῶς αὐτῇ κόψασθαι. τῆς δὲ ἀνοιχθείσης, εἰσελθόντι ὁδηγῷ τῷ κηπουρῷ χρήσασθαι, καὶ ἑδὲ μικρὸν ὅδον ἐνδιατρίψαι. Οὕτω τοι καὶ τῷ ποθοῦντι τῆς μαθηματικῆς ἤδη ἐπιστήμης μέχρι μυχῶν γενέσθαι, καὶ τὰ ἄδυτα αὐτῆς ὁδεῦσαι, καὶ τὰ ὄργια μυηθῆναι, καὶ συνελόντι φάναι, ὡς εἰκὸς τῷ μαθηματικῶν λόγων ἐγκρατεῖ γενέσθαι, ἀμήχανον αὐτῷ μὴ πρότερον ἐν τῷ αὐτῆς προπυλαίῳ ἀκεραίως ἀσκηθέντι, καὶ τῷ εἰδήμονι τῶν μαθηματικῶν ἀρχῶν τε καὶ ἀποδείξεων ποδηγετημένῳ, καὶ βαθμηδόν πως ἀφ' ἑνὸς προὸς ἕτερον τῶν ἐκείνης εἰδῶν μεταβαίνοντι καὶ σκοπὸν βάλλειν. Πολυανθὴς μὲν γὰρ ἡ Μαθηματι- Προοίμιον.

καὶ Ἐπιστήμη πέφυκεν ἧττον, ἢ πολυειδὴς, ἅτε δὴ περὶ πολλῶν καὶ παντοδαπῶν θεωρημάτων τε καὶ προβλημάτων, ναὶ μὴν καὶ μηχανῶν ἐφερμοδίουσα, καὶ ἐπιστημονικάς γε καὶ ἐξηκριβωμένας ἀπὸ γνωριμωτέρων τε καὶ πιστοτέρων τὰς ἀποδείξεις ποιοῦσα· διὸ καὶ δύθαλὴς ἀκοῦσαι, οὐχ ὅλως ταύτῃ οἰκεῖον. Λαβυρινθώδης δὲ τῇ πολυπλέκτῳ σειρᾷ τῶν εἰδῶν, καὶ τῷ τὰ πρότερα τῶν ἐγγὺς, προόδους τινὰς, ἢ μᾶλλον εἰσόδους εἶναι· καὶ μὴ δυνάσθαι τὸν ταύτης ἐρασὴν ἐντελῶς γε τὸ ποθούμενον τυχεῖν, ἢ ὅλως ἀπροσκόπτως ἐπὶ τὰ πρόσω χωρῆσαι, εἰμή γε πρότερον ἐν ἄλλοις προπαιδευθῇ.

Ἀμέλει τοι τὸν αὐλοις ποσὶν ἀπροσκόπτοις τε, καὶ ἁπλανέσι τῶν μαθηματικῶν ἐπισήμων περιπολεῦσαι ἐθέλοντα, καὶ ἰθυπόροις πτέρυξι καὶ ἀκμήτοις εἰς τὸν κολοφῶνα ταύτης ἀναδραμεῖν, χρεὼν, δίκην θησέως τῇ Ἀριάδνῃ, διὰ τῆς τοῦ νοὸς γενναιότητος τὴν πρώτην καὶ περικαλλεῖ ταύτης συγαῖρὶ γνωσθῆναι, καὶ δι' αὐτῆς ὡς Δαιδαλέως τινὸς ὑφηγήσεως δυνήσεται εἰσιέναι, ἁ μόνον εἰς τὰ ἐνδότατα τῆς Μαθηματικῆς, καὶ τοῖς πολλοῖς ἥδιστα ἀθέατα, ἀλλά γε τῷ ὄντι καὶ τὰς κορυφὰς τῶν μαθηματικῶν εἰδῶν ἐφίπτασθαι, ἁ χαλεπὸν αὐτῷ ἔσεται. ὃ δὲ μέγιστον, ὅτι καὶ τοῖς ἧττον δὶ ἀθένειαν νοὸς, ἢ ἀποτυχίαν ὁδηγοῦ, ἢ ἄλλου τινὰ αἰτίαν εἰσελθεῖν μὴ δυνηθεῖσι, τῆς ὁδοῦ οἱόν τε ἡγήσασθαι.

Τὸ χρήσιμον τῶν τῶ Εὐκλ. στοιχείων. Προπύλαιον ἤδη τῆς Μαθηματικῆς ἁπάσης ἐπιστήμης εἴ τι τὸ χυειώτατον καὶ χρειωδέστατον πέφυκεν· ὅπερ Εὐκλείδης, ὁ Δαιδάλεα μηχανώτερος, τὰς τοῖς πάλαι στοιχειώδεις ἀρεθείσας προπάσεις, καὶ ἀκριβῶς ἀναπτυχθείσας, αὖθ' ὕλης συλλέξας, οὐκ ὀλίγας δὲ καὶ ἐξ αὐτῶ προθεὶς, τὰς μαθηματικὰς ἀρχὰς προπάξας, ἅπως ἐξυφάνατο, ἅπω κατερρυθμίσατο· ὥστε μιᾶς μόνης ἀφαιρεμένης, ἢ γοῦν παρεωραμένης, ἅπαν τὸ ὕφασμα ἀτελὲς εἶναί τε καὶ γινώσκεσθαι. διὸ καὶ στοιχεῖα Εὐκλείδου παρονομάζονται, οἱονεί τινες ἀρχαὶ καὶ βάσεις τῆς Μαθηματικῆς χεδὸν ἁπάσης ἐπιστήμης καὶ προπύλαιον. Ταῦτα καὶ θυγάτηρ πρώτη, καὶ περικαλλὴς τῆς αὐτῆς καθέστηκε. Ταῦτα Δαιδάλεον μηχανῶ εἰπὼν οὐκ ἂν ἁμάρτης. Εἰδέσοι καὶ κλεινὰ ἀρεσὸν μαθηματικῆς ἁπάσης ταῦτα ὀνομάσαι, πρόθεις καὶ πάτο τοῖς λοιποῖς αὐτῷ ὀνόμασι. Κἂν ἕτερόν τι τούτω ἁρμοδιώτερον αὐτῆς ἰδρις ὄνομα, μὴ φθονήσειας εἰπεῖν. Καὶ γὰρ μὴ μόνον ταῖς περὶ τὰ διάγραμμα τῶν χημάτων ἀχολημέναις πραγματείαις, ἀλλὰ καὶ ταῖς περὶ τὰς ἀριθμὰς, καὶ τὰ στερεὰ τῶν σωμάτων στοιχειώδη καθέστηκε.

Διαίρεσις τῶν αὐτῶν. Τοσοῦτον μὲν τὸ χρειῶδες τῶν τῶ Εὐκλείδου στοιχείων. Διήρηται δὲ ταῦτα εἰς πεντεκαίδεκα τὰ πάντα βιβλία. ὧν ἓξ μὲν περὶ τὴν ἐν ἐπιπέδῳ καταγραφομένων χημάτων διαλαμβάνει. Τέτων δὲ τὸ πέμπτον καὶ μόνον τὰς τῶν μεγεθῶν πρὸς ἄλληλα χέσεις καὶ λόγους ἀναπτύσσει. Τὰ δὲ λοι-

πὰ

πὰ πεῤὶ τῦ ξιπλεύρων, τεξαπλεύρων τε, κὴ ἄλλων τινῶν χημάτων, κὴ ἔτι πεῤὶ κύκλων ἐφερμηνεύει. Μετὰ δὲ τὰ ἐξ αὐτῦ, ξία τῦ λοιπῶν βιβλία πὰς τῦ ἀειθμῶν χέσεις ἀποθησαυείζει. Τὸ δέγε δέκατον πεῤὶ τῦ χέσεων τῦ πεειεχεσῶν πὰ χήματα πλευρῶν, καὶ μὴ, καὶ τῦ ἐκ τέτων χωείων, κὴ ἄλλων τινῶν πολυφαγμονεῖ. διὸ κὴ πεειεργωδέτερον μᾶλλον, κὴ ὑψηλοτέρε νοὸς δεόμενον. Τὰ λοιπὰ δὲ πάντε Στοιχεῖα τετεῶν σωμάτων ἐπιγεάφεται, ἅπε δὴ πὰ αὐήκοντα πῖς τετεοῖς αὐιχνεύοντα σώμασιν.

Σύγκειται δὲ ταῦτα ὡς ἐκ μεεῶν, ἐξ Ὅεων, Ἀξιωμάτων, Αἰτημάτων τε κὴ Προτάσεων. Καὶ τέτων δὲ τῦ μεεῶν πὰ μέν εἰσιν ἀεχαὶ ἀναπόδειπτοι, τὰ δὲ ἀποδείξεως δεόμενα. κὴ ἀναπόδειπτοι μὲν ἓν εἰσιν οἱ Ὅεοι, πὲ Αἰτήματα, κὴ Ἀξιώματα. ἀποδείξεως δὲ αἱ Προτάσεις δέονται. Ἀλλ' ἵνα ὁ λόγος καθ' ὁδὸν βαδίζῃ, ἐκ τῦ ἀναποδείπτων πρῶτον πῆς ἑρμηνείας ἀρξώμεθα. Ὅσα γᾶν τῦ τοιέτων τὸ πιςὸν οἰκοθεν ἔχουσιν, ὡς γνώσιμα μὴ μόνον τῷ διδάσκοντι, ἀλλ' ἑδὲν ἧττον κὴ τῷ μανθάνοντι, κὴ εἰς ἀρχῆς τάξιν λαμβάνονται, ταῦτά ἐσι πὲ Ἀξιώματα, οἷον πὸ, πὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, κὴ ἀλλήλοις ἐσὶν ἴσα. ὅσα δ' ἐκ ἔχει ἐξ αὐτῦ τὸ πιςὸν, ὡς μὴ καθ' αὑτὰ γνώσιμα τῷ μανθάνοντι, συγχωρεῖται δὲ τῷ λαμβάνοντι, Ὑποθέσεις πὰ τοιαῦτα καλεῖται. οἷον Κύκλος ἐσὶ χῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς πεειεχόμενον, ἣ καλεῖται πεειφέρεια· καὶ πὰ ὅμοια. Καὶ ἔτί εἰσιν οἱ ὅροι. Ἃ δὲ ἔτε γνωσὰ καθ' ἑαυτὰ ὑπάρχεσιν, οὔτε μὴν συγχωρεῖται παρὰ τὸ μανθάνοντος, λαμβάνεται δ' ὅμως εἰς κατασκεύήν τισι τροσήκοντα, καλεῖται Αἰτήματα. Καὶ ταῦτα μὲν κὴ Πρόκλον. Δυνάμεθα δὲ κὴ ἡμεῖς ἐκ τῦ εἰρημένων ὕτως ταῦτα δείσασθαι, ἀπὸ τὲ ὅρου ἀρχόμενοι.

Ὅρος μέν ἔν ἐσι γνῶσις ἀναπόδειπτος καθ' ὑπόθεσιν, μὴ καθ' αὑτὴν γνώσιμος, εἰς ἀρχὴν λαμβανομένη.

Αἴτημα δὲ, γνῶσις ἀναπόδειπτος, οὔτε καθ' αὑτὴν γνώσιμος, οὔτε μὴν παρὰ τῷ μανθάνοντος δεχομένη, λαμβανομένη δὲ εἰς κατασκεύήν τινος κὴ ἀρχήν.

Ἀξίωμα δὲ, γνῶσις ἀναπόδειπτος, γνώσιμος, κὴ καθ' ἑαυτὴν τὸ πιςὸν ἔχουσα, εἰς ἀρχὴν λαμβανομένη. κὴ ταῦτα μὲν ἱκανὰ πεῤὶ τῦ Ἀναποδείπτων.

Τῶν δὲ Προτάσεων τῦ ἀποδείξεως δεομένων, ὅσαι μὲν ἂν πὰς γενέσεις τῦ χημάτων, πὰς τομὰς, πὰς ἀφαιρέσεις, ἢ τροσθέσεις, κὴ ὅλως πὰ τέτων παθήματα πεειέχωσι, Προβλήματα λέγονται· ὡς ταῖς ποιητικαῖς ἀναλογοῦσαι ἕξεσιν. οἷόν ἐσι τὸ τρῶτον, κὴ δεύτερον τρόβλημα τῷ ά. βιβλίε· κὴ τὰ παραπλήσια.

Ὅσαι δὲ πὰ ἐν τοῖς χήμασι συμβαίνοντα ἐπισημονικῶς ἀποδεικνύουσι, θεω-

Τίνα κὴ πόσα πὰ μέρη τῶν αὐτῶν.

Τί Πρόβλημα καὶ τί θεώρημα.

θεωρήματα καλεῖται, ὡς οἰκειότεραι ταῖς θεωρητικαῖς ἐπιστήμαις. οἷόν ἐστι τὸ τέταρτον, πέμπτον καὶ ἕκτον τῶν φωτὸς βιβλίων, καὶ τὰ ὅμοια. ὥστε ὅπως ταῦτα εἰσαθαι, ἢ ὑπογράψαι δυνάμεθα.

Πρόβλημά ἐστι γνῶσις, δι' ἀποδείξεως τὰ τῶν χημάτων παθήματα ἐρανῶσα, καὶ τὸ προσαπτόμενον ποιοῦσα.

Θεώρημα δὲ γνῶσις, δι' ἀποδείξεως τὰ ἐν τοῖς χήμασι συμβαίνοντα ἐπιστημονικῶς ἀποδεικνύουσα, καὶ τὰς πρὸς ἄλληλα τούτων λόγους ζητοῦσα.

Τοιαύτη μὲν ἡμῖν ἡ τῶν προτάσεων ἁπλουστέρα καὶ συντομωτέρα διαίρεσις.

Τινὲς δὲ τῶν πάλαι θεωρήματα πάντα καλεῖν ἠξίωσαν, ὡς περὶ τῶν ἀϊδίων καὶ ἀΰλων τὰς θεωρίας ποιούμενα. τὰς γὰρ τῶν χημάτων γενέσεις καὶ τἄλλα, οὐ ποιητικῶς, ἀλλὰ γνωστικῶς καθορῶμεν, καὶ ἐπιστημονικῶς ἀποδεικνύομεν.

Ἕτεροι δὲ τὰ πάντα προβλήματα τῇ αὐτῇ προσηγορίᾳ ἐκάλεσαν. τῶν δὲ προβολῶν διττῶν εἶναι ἔλεγον. ὁτὲ μὲν δηλονότι τὸ ζητούμενον ποιῆσαθαι σπουδάζειν, ὁτὲ δὲ ὡρισμένον λαβόντας ζητεῖν εἰδέναι, εἴ τί ἐστιν, ἢ ποῖόν τί ἐστιν, ἢ πόσον ἐστὶν, ἢ τίνας ἔχει πρὸς ἄλλο τὰς σχέσεις. ἀλλ' εἶναι ἑκατέρας τῆς μερίδος οἱ προϊσάμενοι ὀρθῶς λέγειν δοκοῦσιν, ἡμεῖς μέντοι διὰ τὸ ἀσύγχυτον καὶ σαφέστερον τούτοις χαίρειν ἐῶντες, τῶν προτέραν φέρε ἀσπασώμεθα διαίρεσιν.

Τίνα καὶ πόσα τὰ μέρη τοῦ προβλήματος, καὶ θεωρήματος.

Τούτων δὲ ὅπως διαιρεθέντων τε καὶ ὁρισθέντων. ἴστέον ὅτι ἕκαστον τῶν προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων πάντα ταυτὶ ἐν ἑαυτῷ χρεὼν ἔχειν, Πρόταση, Ἔκθεσιν, Διορισμὸν, Κατασκευὴν, Ἀπόδειξιν, καὶ Συμπέρασμα. ὧν ἡ μὲν πρότασις τί τὸ ζητούμενον τῶν δεδομένων λέγει, ἢ τί τὸ ἐκ τούτων δεῖ, ἢ τοιᾶς δὲ ὑποθέσεως συμπεραινθησόμενον.

Ἡ δὲ Ἔκθεσις δὲ αὐτὸ καθ' αὑτὸ τὸ δεδόμενον, καὶ ὑποτιθέμενον τῇ ζητήσει προδιεπίζει, καὶ τί τὸ συμπεραινθησόμενον προαγγέλλει.

Ὁ δὲ Διορισμὸς τὸ ζητούμενον, ἢ συμπεραινθησόμενον χωρὶς δείκνυσι, καὶ οἷονεὶ ἐπιπάττει γνῶσθαι.

Ἡ δὲ Κατασκευὴ τὰ εἰς ἀπόδειξιν τῶν δεδομένων συμβάλλοντα προσάπτει ποιεῖν, καὶ οἷά τις προπαρασκευὴ ἀποδείξεώς ἐστι.

Ἡ δὲ Ἀπόδειξις δὲ ἐπιστημονικῶς, καὶ ὑπεκλεβομένως ἀπὸ τῶν ὁμολογηθέντων καὶ γνωρίμων σιωπᾷ τὸ ζητούμενον, ἢ τὸ προκείμενον.

Τὸ δὲ Συμπέρασμα ὡς ἔχαπον, ἤτοι ἐπὶ τοῖς πρόσθιν ἐπαναστρέφων, ἢ τὸ διορισθὲν ἀναμιμνήσκον, βεβαιοῖ τὸ συναχθέν.

Καὶ ταῦτα μὲν ἁπλῶς ἑκάστης προτάσεως μέρη. Ἀναγκαιότερα δὲ, Πρόταπις, Ἀπόδειξις, καὶ Συμπέρασμα. Διὸ συντομίας χάριν τῇ μὲν ἡ Ἔκθεσις τῷ διορισμῷ σύνεται, τῇ δὲ ἡ Κατασκευὴ, ὡς μὴ συμβάλλουσα παρορᾶ-

ρορᾶται. διὰ δὲ τὸ ἀλληπτότερον, φέρε δὴ καὶ ἐπὶ παραδείγματος τὰ ῥηθέντα ἀναπτύξωμεν.

Τῷ μὲν οὖν ά. προβλήματος τῷ ἐν τῇ ά. τῶ Εὐκλειδ. Βιβλίῳ Πρόπασις λέγεται, ἡ πρώτη ἐν αὐτῇ περίοδος, ὕπωσι λέγουσα, ἐπὶ τῆς δοθείσης ἀθείας πεπερασμένης ἰσόπλευρον συστήσασθαι. Τίς ἡ Πρόπασις.

Ἔκθεσις δὲ, τὸ λέγον, ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη ἀθεῖα, ἡ αβ.

Διορισμὸς δὲ, τὸ, δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς αβ, ἀθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. τὸ δὲ ἀπὸ τῦ, κατέχῳ μὲν τὴν α, διαστήματι δὲ τῇ β. μέχρι τῦ, ἐπεζεύχθωσαν ἀθεῖαι αἱ γα, γβ, Κατασκευὴ λέγεται. τὸ δὲ ἀπὸ τούτου, μέχρι τῦ, αἱ ἴσαι ἄρα γα, αβ, βγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἀπόδειξις. καὶ τὸ λοιπὸν, Συμπέρασμα. Ἐπεὶ δὲ τούτων ἐμνήσθημεν, ἐκ ἄπο σκοπῦ παντὸς γε καὶ περί τινων ἄλλων τούτοις συμπτωμένων βραχέα διελθεῖν. καὶ πρῶτον μὲν, τί Λῆμμα, τί Πῶσις, τί Πόρισμα, τί Ἔνστασις, τί Ἐπαγωγὴ, εἴπωμεν. τέλος δὲ καὶ τί ἡ Ἐπαγωγὴ, τῆς εἰς ἀδύνατον Ἐπαγωγῆς διενηόχε, καὶ ὕστερον πέρας τῇ λόγῳ δώσομεν.

Λῆμμα μὲν οὖν ἐστι πρόπασις προαποδεδειγμένη, ἡ μὴ, ἀποδείξεως δὲ καὶ λόγου δεομένη, εἰς κατασκευὴν, ἡ ἀπόδειξιν ἄλλης τινὸς προτάσεως λαμβανομένη. διενηόχε δὲ τῦ Ἀξιώματος, ὅτι ἐκεῖνο μὲν ἀναπόδεικτον, Αὗτη δὲ, ἀποδείξεως καὶ λόγου δεομένη. Τί λῆμμα.

Πῶσις δέ ἐστι διάφορος κατασκευῆς τρόπος, καὶ ἐξαλλαγὴ θέσεως, ἡ τῆς τῶν σημείων, ἡ τῶν γραμμῶν, ἡ τῶν ἐπιπέδων, ἡ τῶν στερεῶν, διὸ καὶ πῶσις καλεῖται, οἷα μετάθεσις τῆς κατασκευῆς. Τί Πῶσις.

Πόρισμα δέ ἐστι θεώρημα ἐκ προβλήματός τινος, ἡ θεωρήματος ἀναφανόμενον, ἡ καὶ συναγόμενον, καλεῖται δὲ πόρισμα, ὥς τι κέρδος ὂν τῆς ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως πάρεργον. Τί Πόρισμα.

Ἔνστασις δὲ διακοπή ἐστι τῦ λόγου, καὶ ἐπὶ τὸναντίον μετάβασις, ἡ πρὸς τινὰ κατασκευὴν, ἡ πρὸς τινὰ ἀπόδειξιν ἁπαντῶσα. δεῖ δὲ τὸν προτεθέμενον, ἀνελεῖν μὲν τινὰ σύστασιν, δεῖξαι δὲ τὸν χώμενον αὐτῇ ψεῦδόμενον. Τί Ἔνστασις.

Ἐπαγωγὴ δέ ἐστι μετάβασις ἀπ' ἄλλου προβλήματος, ἡ θεωρήματος ἐπ' ἄλλο ὁμοίως πρόβλημα, ἡ θεώρημα. οὗ γνωσθέντος, ἡ ποριθέντος, καὶ τὸ προκείμενόν ἐστι καταφανές. Τί Ἐπαγωγή.

Ἡ δὲ εἰς ἀδύνατον Ἐπαγωγὴ λῆψις ἐστὶ τῦ μαχομένου τῇ ζητουμένῳ καταντῶσα δὲ εἰς ἄτοπον ὁμολογούμενον, διαβεβαιοῖ τὸ ζητούμενον. Τί ἐστὶν ἀδύνατον ἐπαγωγή.

Ταῦτα μὲν οὖν ἐπὶ τῦ παρόντος συντόμως ἤδη ἀποσεσημείωται τῇ γνησίων βουλομένων χάριν τῆς μαθηματικῆς ἡδύτητος γεύσασθαι. ὅπως ὁδῷ καὶ τάξει χρησάμενοι, ἐπὶ τὰ πρόσω ἀπροσκόπτως χωρήσωσι, καὶ τοῦ ποθουμένου ἐφικτῶς τύχωσι. Διήρηται δὲ πάντα τὰ Εὐκλείδου Στοιχεῖα, καὶ αἱ

Προ-

Προπάσεις. καὶ τὸν προσήκοντα ὁρισμὸν αἱ ἀρχαὶ, αἱ προπάσεις, καὶ τὰ ἑπόμενα ταύταις ἐδέξαντο. ἵνα μήτις ἀκύρων τὰς διαφόρους τῶν μερῶν τῶν προπάσεων προσηγορίας, ἢ τῶν ταύταις ἁπηρτημένων ξενίζηται. ἢ περὶ τούτων ἐρωτώμενος ἐρυθριᾷ, μὴ εἰδὼς ἀκριβῶς τί τοῖς ἐρωτῶσι δέον ἀποκρίνεσθαι. ὥρα δὲ τῆς τῶν ὅρων ἑρμηνείας κατὰ Πρόκλον ἄρξασθαι.

ΣΥΝΤΟΜΩΤΕΡΑ
ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ
ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ.

Ὅρος Πρῶτος. Σημεῖόν ἐστιν, ὃ μέρος οὐθέν.

Τὸ μὲν Σημεῖον παρὰ τοῖς Γεωμέτραις ποσότητος ὅλως ἀνεπίδεκτον ὑποτίθεται καὶ ἀμέτοχον· διὸ καὶ ἀμερὲς παρ' Εὐκλείδῃ ὑπογραφόμενον εἶναι λέγεται, καὶ τῶν πρώτην τῆς ὅρων ἔλαχε τάξιν. τίνος δὲ χάριν τοιοῦτον λαμβάνεται; ἢ ὅτι ἐστὶν ἀρχὴ πρωτίστη. τῶν δὲ τοιαύτων ἀρχῶν ἁπλουστάτην δεῖ εἶναι, καὶ παντὸς πάθους ἐκτός· ὡς πάντων μὲν εἰς αὐτὰς διαλυομένων, ἐξ ἧς καὶ συνίστανται· αὐτὴ δὲ εἰς οὐδὲν ἕτερον. Ἐπεὶ δὲ ἡ Μαθηματικὴ ἐπιστήμη, μᾶλλον δὲ ἡ Γεωμετρία ἐπιστητὸν ἔχει ὑποκείμενον τὸ συνεχὲς ποσὸν, τοῦτο δὲ δεκτικόν ἐστι πάντων τῶν ὑπ' αὐτῆς θεωρουμένων παθῶν, αὐξήσεώς φημι, τομῆς τῆς ἐπ' ἄπειρον, μεταμορφώσεώς τε τῆς εἰς ἄλληλα τῶν χημάτων, καὶ τῶν λοιπῶν· δεῖ ἄρα πάντως καὶ τὰς ἀρχὰς ταύτας ἀνεπίδεκτον εἶναι τῶν τοιούτων παθῶν, τοῦτο οὗπερ καὶ ἀμερὴς ὑποτίθεται. Ἔτι ἐφ' ἑκάστης ἐπιστήμης τὰ μὲν πάθη πάντα καὶ ἰδιώματα, περὶ ἃ καταγίνεται, ἐκ τῆς ἰδίας ἀρχῆς τὴν γνῶσιν ἔχει· ἡ δὲ ταύτης ἀρχὴ οὐδενός ἐστι τῶν παθῶν. Εἰ δὲ καὶ τῆς Γεωμετρίας τὰ πάθη καὶ ἰδιώματα αὖθις ποσότητος ἔχ ὑφίστανται, καὶ πρώτου τούτων ἀρχὴ τὸ Σημεῖον· τὸ Σημεῖον ἄρα ἀμερὲς δεῖ εἶναι ὅλως καὶ ἄποσον. εἰ γὰρ καὶ τὸ Σημεῖον ἐν ποσότητι τὴν ὕπαρξιν εἶχε, πάθος, οὐ μὴν δὲ ἀρχὴ τῆς Γεωμετρίας ἂν εἴη, αὐτὸ δὲ, τούτων οὐδενός ἐστιν, ὡς ἤδη εἴρηται, καὶ πᾶσιν ὁμολογεῖται. ὅθεν καὶ Εὐκλείδης ἀποφατικῶς αὐτὸ ὑπέγραψεν, αὐτὸ τοῦτο δηλῶσαι βουλόμενος, τὸ πάντων μὲν, περὶ ἃ ἡ Γεωμετρία καταγίνεται, ἀρχὴν εἶναι, μηδενὸς δὲ τούτων μετέχειν· ὁ δ' Ἀριστοτέλης ἐν τῇ γ'. τοῦ περὶ ψυχῆς ἀδιαίρετον δι' ἔλλειψιν ὄγκο-

ονομάζει. Ἀνάλογον δὲ τὸ παρὰ τοῖς Γεωμέτραις Σημεῖον τῇ μονάδι, τῇ παρὰ τοῖς Ἀριθμητικοῖς, ὡς ἀρχῇ λαμβανομένῃ. ὥσπερ οὖν ἐκ τῆς μονάδος πάντες οἱ ἀριθμοὶ παράγονται, αὐτὴ δὲ ἀδιαίρετός ἐστιν ἀριθμός· οὕτω καὶ τὸ Σημεῖον ἡ γραμμὴ, καὶ διὰ τῶν γραμμῶν τὰ παντοῖα εἴδη τῶν σχημάτων ἀποτελεῖται· αὐτὸ δὲ καθ' αὑτὸ οὐδέν ἐστιν, οὔτε μῆκος μόνον, ἀλλ' ὅρος καὶ ἀρχή. παρασατικὸν δὲ τούτου, ἢ κρεῖττον εἰπεῖν εἰκών, τὸ ἐνταῦθα αἰσθητὸν Σημεῖον α.

Δεύτ. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

Ἡ δὲ Γραμμὴ τὰ διαφέροντα τῶν σημείων ἔχουσα παρὰ τοῖς Μαθηματικοῖς, ὡς ἀρχὴ καὶ αὖτη λαμβάνεται. Τριῶν δὲ ὄντων τῶν τῆς διαστάσεως εἰδῶν, μῆκος δηλαδὴ, πλάτος, καὶ βάθος, τὸ μῆκος μόνον δεκτικήν ἐστιν, ἀνεπίδεκτος δ' ὅλως πλάτους, καὶ πολλῷ μᾶλλον βάθους· διὸ καί τινες οὕτωσι ταύτην ὡρίσαντο· Γραμμή ἐστι μήκους ὑφ' οὗ διαστατόν. Εὐκλείδης δὲ μῆκος ἀπλατὲς ὑπέγραψε, προσεπινοῶν καὶ τὸ ἀβαθές· ἀνάλογος δ' ἐστὶ τῇ δυάδι. ὅθεν δὴ, ὥσπερ ἡ δυὰς παρὰ τῆς μονάδος τὴν γένεσιν ἴσχει, οὕτω καὶ Γραμμὴ παρὰ τὸ σημεῖον. Σημεῖον γὰρ ῥυέντος, καὶ ἰχνους ἐγκαταλιμπάνοντος, * καὶ τὸν εἰπόντα, Γραμμὴ ἀποτελεῖται. Λαμβάνεται δὲ τοιαύτη, ὅτι παρ' αὐτῆς μὲν πάντα συνίσταται τὰ σχήματα· αὐτὴ δὲ πάντων τόπων καθαρεύουσά ἐστι. καὶ ἀρχῆς μὲν λόγον ἔχει πρὸς πάντα τὰ σχῆμα, ἀδὲν δὲ αὐτὰ σχήματός ἐστιν. ὥσπερ καὶ ἡ δυὰς, ἀρχὴ μὲν πάντων τῶν ἀριθμῶν ὑπάρχει, αὐτὴ δὲ καθ' αὑτὴν ἀδιαίρετός ἐστιν ἀριθμός. εἰκονίζει δὲ οὕτω ἡ β γ, αἰσθητὴ Γραμμή.

β——————γ

Τρίτ. Γραμμῆς δὲ πέρατα Σημεῖα.

Ἐπεὶ δὲ ἡ Γραμμὴ μήκός ἐστιν ἀπλατὲς, δῆλον, ὅτι καθ' ἑαυτὴν μὲν ἄπειρός ἐστιν καὶ ἀόριστος, περατοῦται δὲ καὶ ὁρίζεται παρὰ τὸ σημεῖον. διὸ καὶ Εὐκλείδης πέρατα Γραμμῆς τὰ σημεῖα λέγει, καὶ οὕτω εἰκότως. τῶν γὰρ συνθέτων τὰ ἁπλᾶ εἰσιν ὅροι, καὶ τῶν μεριστῶν τὰ ἀμερῆ. Ἐπεὶ τοίνυν συνθετόν τί ἐστι καὶ ἡ Γραμμὴ, ὡς μήκους μετέχουσα, καὶ ἐπ' ἄπειρον διαιρεῖσθαι δυναμένη· τὸ δὲ σημεῖον ἁπλοῦν τε καὶ ἀμερές, παντωσοῦν τὸ σημεῖον πέρας ἐστὶ τῆς γραμμῆς καὶ ὅρος, ὥσπερ καὶ καὶ τῆς δυάδος ἡ μονάς. Ἔτι τῶν γενητῶν, ὅσα τὴν γένεσιν ταύτην ἔχει, ἐκεῖνο καὶ ἀρχὴ καὶ πέρας ἐστίν· ἀλλ' ἡ Γραμμὴ ἐκ τοῦ σημείου γενᾶται, ὡς ἤδη εἴρηται. ἄρα τὸ σημεῖόν ἐστιν ἀρχὴ καὶ πέρας τῆς Γραμμῆς.

Τέτρ.

Τέτ. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

Lib. 1. Fig. 1.

Δοκεῖ μὲν διὰ τάτε Εὐκλείδης πολλὰ εἶναι τὰ εἴδη τῆς Γραμμῆς ὑπαινίτ τεσθαι. ἵνα δὲ τατὶ σαφέστερον γένηται, φέρε δὴ πρότερον περὶ τῆς διαιρέσεως τῆς Γραμμῆς εἴπωμεν. διαιρεῖται μὲν οὖν πρῶτον ἡ γραμμὴ εἰς εὐθεῖαν καὶ περιφερῆ, ἥτις καὶ καμπύλη καὶ κυρτὴ λέγεται. διαιρεῖται δὲ δεύτερον εἰς ἁπλῆν καὶ μικτήν. καὶ ἁπλῆ μὲν λέγεται ἥ τε εὐθεῖα μόνη, οἷα ἡ α β, ἥ τε κυρτὴ μόνη, οἷα ἡ γ δ. μικτὴ δὲ, ἥ ἔκτε εὐθείας καὶ κυρτῆς συγκειμένη, οἷαί εἰσιν αἱ ε ζ, η θ, καὶ ἄλλαι. τάτων μὲν δὴ τῶν διαιρέσεων μέμνηται ὁ Πρόκλος τῷ τε Πλάτωνι καὶ Ἀριστοτέλει ἑπόμενος. Ἕτεροι δὲ ξιχῶς τὴν γραμμὴν διαιροῦσιν εἰς εὐθεῖαν, κυρτὴν, καὶ ἑλικοειδῆ, ἀλλ' αὕτη ἡ διαίρεσις οὐκ ἔστιν ὑγιὴς, οὐδὲ τοῖς πᾶσιν ἀρέσκει. ἡ γὰρ ἑλικοειδὴς μικτή ἐστιν, διὰ τὸ ἐκ δύο γεννᾶσθαι κινήσεων. καὶ γὰρ τῆς εὐθείας κύκλῳ κινουμένης περὶ τὸν ἄξονα τὸν κυλίνδρου παραλλήλως τάτῳ κειμένης, καὶ τὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς εὐθείας φερομένου, ἡ κυλινδρικὴ ἕλιξ ἀποτελεῖται. καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῆς διαιρέσεως τῆς γραμμῆς. ἐπεὶ δὲ ὁ περὶ πάντων εἰπεῖν τῶν παύτης εἰδῶν τὸ παρόντος ἐστὶ σκοπός, φέρε δὴ περὶ μόνης τῆς εὐθείας βραχέα διέλθωμεν.

Εὐθεῖα τοίνυν καὶ τὸν Εὐκλείδην ἐστὶν, ἡ ἴσον κατέχουσα διάστημα, τὸ μεταξὺ τῶν ὁρίζομένων αὐτῆς σημείων, τατέστιν, ὅτε τις γραμμὴ ποσόν μέγεθος ἔχει, ὅσον ἐστὶ τὸ διάστημα τῶν ἄκρων αὐτῆς σημείων, εὐθεῖα λέγεται. καὶ τατό ἐστι τὸ ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖσθαι. ὥστε τῆς κυρτῆς οὐ δυνάμεθα εὐθεῖαν λέγειν. δυνατὸν γὰρ μείζονα εἶναι, ἢ ὅσον τὰ ὁρίζοντα αὐτῆς σημεῖα ἀλλήλων ἀφίστανται. ἡ γὰρ γ δ, μείζων ἐστὶν, ἢ ὅσον τὸ γ, τὸ δ, ἀφίστατο. καὶ τοιᾶτος μὲν ὁ παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ τῆς εὐθείας Ὁρισμός. Οἱ δὲ πάλαι ποικίλως πως ταύτην ὁρισμὸν ἀποδεδώκασιν, οἵτινες οἱ αὐτοὶ τῷ παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ εἰσίν. ὁ γὰρ Ἀρχιμήδης ὑπισχνεῖται τὴν εὐθεῖαν ὡρίσατο. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν ἡ ἐλαχίστη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν. ὁ πλοῖα γὰρ δύο γραμμαὶ ὑποτεθῶσιν, ἥ μὲν εὐθεῖα, ἡ δὲ κυρτὴ, ὥστε τὰ αὐτῶν πέρατα ἴσον ἀλλήλων ἀφίσθαι, ὡς ἡ α β, καὶ γ δ, ἡ εὐθεῖά ἐστιν ἐλάττων, ἢ ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς κειμένοις σημείοις. Ἄλλοι δὲ εὐθεῖαν γραμμήν ἐστιν, λέγουσιν, ἡ ἐπ' ἄκρον τεταμένη. καὶ ἄλλοι εὐθεῖά ἐστιν, ἧς μέρος μὲν οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ ἐν τῷ μετεώρῳ, καὶ ἧς τὰ μέρη πάντα πᾶσιν ὁμοίως ἐφαρμόζει. καὶ ἄλλοι ἄλλως, ὡς διὰ τὸ σωμάτιον παραξέχομεν.

Πέμπ. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

Καὶ ἡ Ἐπιφάνεια δὲ ἔστι ἴσα ἀρχὴ, καὶ πάσας τὰς διαστάσεις ἔχει, ἀλλὰ δύο μόνας, τὸ μῆκος δηλ. καὶ πλάτος. ἔχει δὲ τὴν αὐτῆς γένεσιν ἐκ τῆς γραμμῆς, ὥσπερ γραμμὴν ἐκ τοῦ σημείου. γραμμῆς τοίνυν ῥυείσης, Ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται. Ἀναλογεῖ δὲ, κατὰ τοὺς Πυθαγορείους, τῶν Τριαδικῶν ἀριθμῶν. ὥσπερ γὰρ ὁ Τριαδικὸς ἀριθμὸς πρῶτός ἐστι τῶν ἄλλων ἀριθμῶν, ὕπου καὶ τὰς Ἐπιφανείας πρώτας παρίστασθαι τὰ διάφορα σχήματα. δυσὶ μέσα δὲ αἴσθησίν τινα τῆς Ἐπιφανείας ἔχειν εἰς τὰς σκιὰς ἀποβλέποντες, αἳ βάθος οὐκ ἔχουσιν, ἀλλὰ μῆκος μόνον μετὰ πλάτους. Τινὲς δὲ ταύτην ὠρίσαντο μέγεθος διχῇ διαστατὸν, ἕτεροι δὲ καὶ πέρας σώματος, καὶ ἄλλοι ἄλλως, ἀλλ' ἅπαντες διαφόροις λέξεσι τὸ αὐτὸ παρίστασθαι σπεδάζουσι. παραστατικόν πως ταύτης ἐστὶ τὸ α β γ δ σχῆμα.

Lib. 1. Fig. 2.

Ἕκτ. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα Γραμμαί.

Ὥσπερ ἐπὶ τῆς γραμμῆς φθάσαντες ἔφημεν, ὅτι τὰ ἄπλατα τῶν μικτῶν, καὶ τὰ ἀμερῆ τῶν μεριστῶν ἀρχαὶ καὶ ὅροι, καθέστηκε· κατ' αὐτὸ καὶ ἐπὶ τῆς Ἐπιφανείας εἰπεῖν δέον. ἐπεὶ γὰρ ἡ γραμμὴ ἁπλουστέρα ταύτης ἐστὶν, γραμμὴ γὰρ μέγεθος ὑφ' ἓν διαστατὸν, Ἐπιφάνεια δὲ μέγεθος διχῇ διαστατὸν· διὰ τοῦτο αἱ γραμμαὶ τῆς Ἐπιφανείας πέρατα λέγονται· μᾶλλον δὲ αἱ γραμμαὶ πέρατα Ἐπιφανείας εἰσὶ, διὰ τὸ, τὴν Ἐπιφάνειαν ἐκ τῶν γραμμῶν τὴν γένεσιν ἔχειν.

Ἕβδ. Ἐπίπεδος Ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

Lib. 1. Fig. 3.

Καθάπερ ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἡ πρώτη καὶ ὑγιὴς γέγονε διαίρεσις εἰς εὐθεῖαν καὶ περιφερῆ· ὕπου καὶ ἐπὶ τῆς Ἐπιφανείας, εἰς ἐπίπεδον καὶ σφαιρικὴν τὴν ὑγιῆ διαίρεσιν ποιητέον. Αὐθις ὥσπερ ἐκείνην ἐπιδιαιρῶντες, τὴν μὲν ἁπλῆν, τὴν δὲ μικτὴν ἔφημεν· ὕπου καὶ τὴν Ἐπιφάνειαν εἰς τὰ αὐτὰ ἐπιδιαιρετέον. καὶ ἁπλῆ μέν ἐστιν, ἥ τε μόνη ἐπίπεδος, ἥ τε μόνη σφαιρικὴ· μικτὴ δὲ, ἥ ἔκ τε ἐπιπέδου καὶ σφαιρικῆς συνισαμένη· ὥσπερ ἡ τοῦ α β γ, κώνου, ἧς ἡ μὲν βάσις ἐπίπεδος, τὸ δὲ ἐπὶ τῆς βάσεως, κυρτόν. Τῆς Ἐπιφανείας τοίνυν ὑποστὰ διαιρεθείσης, καὶ ἐπιδιαιρεθείσης, τὴν ἐπίπεδον, ὡς καὶ τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ὁρίσεον. Ἐπίπεδος τοίνυν Ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἴσον διάστημα κατέχει, τὸ μεταξὺ

ξὺ τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν γραμμῶν. ἰδίκα γὰρ ἡ Ἐπιφάνεια καὶ μῆκος τι καὶ πλάτος ἔχει· ὅσον ἀφίστανται ἀλλήλων καὶ αἱ περιέχουσαι αὐτὴν γραμμαὶ κατά τε μῆκος, καὶ πλάτος, ἐπίπεδος λέγεται· καὶ τί ἐστι τὸ ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς κεῖσθαι γραμμαῖς. ἢ ὅπως ἐπίπεδος Ἐπιφάνειά ἐστιν, ἢ ἐπ' ἄκρῳ τεταμένη, ἢ ἧς τὰ μέρη πάντα πᾶσιν ἐφαρμόζει, καὶ τὰ ὅμοια.

Η'. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν, ἡ ὑπὸ ἐπιπέδων δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

Τῶν γωνιῶν αἱ μὲν ἐπίπεδοί εἰσιν, αἱ δὲ στερεαί· καὶ ἐπίπεδοι μὲν, αἱ ἐν ἐπιφανείαις συνισταμέναι, καὶ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμεναι· στερεαὶ δὲ, αἱ ἐν τοῖς στερεοῖς σώμασι, καὶ ὑπὸ ἐπιφανειῶν περιεχόμεναι. αὐθις τῶν γωνιῶν τῶν τε ἐπιπέδων καὶ στερεῶν, αἱ μέν εἰσιν ἁπλαῖ, αἱ δὲ μικταί. καὶ ἁπλαῖ μὲν, αἱ ὑπὸ ὁμοειδῶν γραμμῶν περιεχόμεναι· αἱ μὲν γὰρ ἁπλαῖ ἐπίπεδοι γωνίαι, ἡ ὑπὸ δύο γραμμῶν εὐθειῶν, ὡς ἡ α, ἢ ὑπὸ δύο κυρτῶν, περιέχονται, ὡς ἡ β. αἱ δὲ ἁπλαῖ στερεαὶ, ἢ ὑποξιῶν γραμμῶν εὐθειῶν περιέχονται, ἢ ὑπὸ ξιῶν κυρτῶν. μικταὶ δὲ, αἱ ὑπὸ ἀνομοειδῶν γραμμῶν, τῆς μὲν εὐθείας, τῆς δὲ κυρτῆς, περιεχόμεναι. τῶν δὲ ἐπιπέδων ἁπλῶν γωνιῶν, ὅσαι ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν περιέχονται μονοειδεῖς τέ εἰσι, καὶ εὐθύγραμμοι καλοῦνται. τῶν δὲ ὑπὸ κυρτῆς καὶ περιφερῶν, δύο τὰ εἴδη· αἱ μὲν γὰρ καλοῦνται ἀμφίκυρτοι, αἱ δὲ ἀμφίκοιλοι· ἀμφίκυρτοι μὲν, ὅταν αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν περιφερεῖς γραμμαὶ, ἐκτὸς τὸ κυρτὸν ἔχουσιν, ὡς ἡ β· ἀμφίκοιλοι δὲ, ὅταν τὸ κοῖλον ἐκτὸς ἔχουσιν, ὡς ἡ δ· ὡσαύτως δὲ καὶ τῶν μικτῶν δύο τὰ εἴδη, ἢ γὰρ σύγκειται ἡ γωνία ἐξ εὐθείας γραμμῆς καὶ περιφεροῦς, ἐκτὸς τὸ κυρτὸν ἐχούσης, ὡς ἡ ε, ὥστε δύνασθαι καλεῖσθαι εὐθύκυρτος· ἢ ἐξ εὐθείας καὶ περιφεροῦς, ἐκτὸς τὸ κοῖλον ἐχούσης, ὡς ἡ ζ, καὶ καλεῖται εὐθύκοιλος. Τοσούτων δ' ὄντων τῶν τῆς γωνίας εἰδῶν, περὶ τίνος ὁ Εὐκλ. τὸν λόγον ποιεῖται, ὧν τῷ ἑξῆς ὀφθήσεται ὅρῳ. Εἶφη δὲ τὰς εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, μὴ ἐπ' εὐθείας κεῖσθαι, ὅτι αἱ ἁπτόμεναι ἀλλήλων καὶ ἐπ' εὐθείας κείμεναι, οὐχὶ μόνον γωνίαν οὐ ποιοῦσιν, ἀλλὰ καὶ εἰς εὐθεῖαν μίαν καταντῶσι. κλίσιν δ' εἰπὼν τὸ γένος ταύτης ἐδήλωσε.

Lib. 1. Fig. 4.

Θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

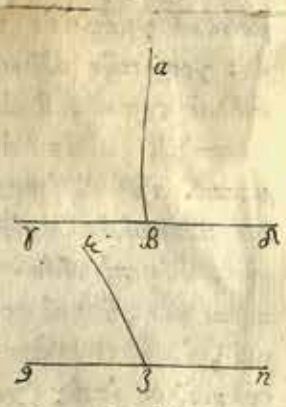
Ἐκ τῶν παρόντος φανερὸν, ὅτι καὶ Εὐκλ. εὐθύγραμμον γωνίαν λέγει, τὴν ὑπὸ δύο εὐθειῶν περιεχομένην, περὶ ἧς καὶ τὸν λόγον ποιεῖται.

Ι'. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφ' ἑξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

ΙΑ'. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

ΙΒ'. Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάττων ὀρθῆς.

Lib. 1. Fig. 5.



Τρία τῆς εὐθυγράμμου γωνίας τὰ εἴδη, ἡ μὲν γὰρ ὀρθὴ λέγεται, ἡ δὲ ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ὀξεῖα. καὶ τῆς μὲν ὀρθῆς γνῶσιν ἔχομεν, ὁπλωίκατις εὐθεῖα, ὡς ἡ α β, ἐπ' εὐθείας τινὸς, δὸς εἰπεῖν, τῆς γ δ, σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας, τήν τε ὑπὸ α β γ, καὶ α β δ, ἴσας ποιῇ· ἑκατέρα γὰρ τῶν ὀρθή ἐστιν, ὡς τὸ ἴσον πρεῦσα. ἡ δὲ α β, κάθετος λέγεται ἐπὶ τῆς γ δ. ἀμβλεῖα δὲ, ἡμείζων ὀρθῆς, οἷα ἡ ὑπὸ ε ζ η. ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάττων ὀρθῆς, ὡς ἡ ὑπὸ ε ζ θ. ταύτην ἤδη τὴν διαίρεσιν πάντες οἱ γεωμέτραι ἀποδέχονται· πολλοὶ δὲ τὸν λόγον τοῖς ἐρωτῶσιν οὐκ ἔχουσιν ἀποδιδόναι· οἱ δέ γε μέντοι τοιόνδε τινὰ λόγον τῆς διαιρέσεως ταύτης ἀποδιδοῦσιν. Ἐπεί φασι, τῶν ἀρχῶν ἡ μὲν κατὰ πέρας, ἥτοι ἁπλουστάτη, καὶ ἀνεπίδεκτος ὅλως αὐξήσεως, ἢ μειώσεώς ἐστιν, ὡς ἡ μονὰς, καὶ αἰτία πᾶσι τοῖς ἀποτελέσμασι τοῦ ὄρου, ταυτότητός τε καὶ ἰσότητος· ἡ δὲ ἄπειρος, ὡς ἡ δυαδικὴ, καὶ αἰτία τοῦ ἐπ' ἄπειρον προόδου, αὐξήσεώς τε καὶ μειώσεως, ἔτι δὲ καὶ ἀνισότητος, καὶ παντοίας ἑτερότητος τοῖς γινομένοις ὑπ' αὐτῆς. διὰ ταῦτα καὶ τῶν γωνιῶν ἡ μὲν ὀρθὴ, ὡς πρώτη ἀρχὴ, τῶν χωνιωδῶν σχημάτων τὸ ἴσον πρεῖ, καὶ ἀνεπίδεκτός ἐστιν ὅλως αὐξήσεως ἢ μειώσεως· αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, ὡς ἀόριστοι, καὶ τῇ δυάδι ἀνάλογοι, ἡ μὲν κατὰ τὸ μεῖζον, ἡ δὲ κατὰ τὸ ἔλαττον τῆς ὀρθῆς διειλήχασιν. ὅθεν δὴ κυρίως καὶ ὡρισμένως γωνία ἐστὶν ἡ ὀρθὴ, αἱ δὲ λοιπαὶ ἀόριστοι· ὁ λόγος δὲ ἐνταῦθα περὶ τῶν εὐθυγράμμων μόνον.

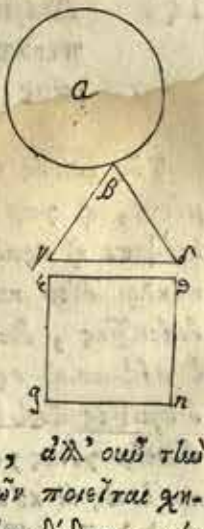
ΙΓ'.

ΙΓ. Ὅρος ἐστίν, ὃ τινος ἐστὶ πέρας.

Ὅρος κυρίως λέγονται τὰ τῶν χωρίων πέρατα, καθὸ πάντα περιορίζουσι, καὶ ἀσύγχυτα φυλάττουσιν, ἡ λέξις αὕτη οἰκεία Γεωμετρία. ὅθεν δὴ καὶ Εὐκλ. ἐνταῦθα ὅρον λέγει, οὐχ ἁπλῶς ἅπαν πέρας, ἀλλὰ μόνον τὸ τῶν χωρίων καὶ ἐμβαδῶν, τὸ περιορίζον ἅμα καὶ περατῶν. τὰ γὰρ ἄκρα τῆς γραμμῆς σημεῖα, πέρατα μὲν λέγονται, ὁμωνύμως δὲ καὶ ὅροι, ὅτι δὲ περιορίζουσί τι χωρίον, περατοῦσι δὲ μόνον τινὰ γραμμάς.

ΙΔ'. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἢ τινων ὅρων περιεχόμενον.

Lib. 1. Fig. 6.



Πολλαχῶς τὸ σχήματος λαμβανομένου, καὶ γὰρ τῶν τε φυσικῶν ἁπάντων αἱ μορφαὶ σχήματα λέγονται, καὶ τῶν παρὰ τῆς τέχνης γινομένων, φέρ' εἰπεῖν, ἀνδριαντοποιητικῆς καὶ ἄλλης, αἱ μορφαὶ ὡσαύτως σχήματα ἔχουσαν. δίδονται δ' ἔτι καὶ ψυχῇ σχήματα, ἐνταῦθα μόνον περὶ τῶν παρὰ τοῖς γεωμέτραις σχημάτων ὁ λόγος, ἰδίως δὲ περὶ τῶν ἐν ἐπιπέδῳ. Ἔστι τοίνυν σχῆμα χωρίον τι ὑπὸ μιᾶς, ἢ πολλῶν γραμμῶν περιεχόμενον καὶ ὁριζόμενον· ὑπὸ μιᾶς μὲν, ὡς ὁ α, κύκλος, πλειόνων δὲ, ὡς τὸ τριγωνοειδὲς, τετραγωνοειδὲς, οἷα τὰ β γ δ, ε ζ η θ, καὶ λοιπά. ὧν τὸ μὲν περιέχον ὅρος λέγεται, τὸ δὲ περιεχόμενον ἐμβαδὸν, τὸ συνάμφω δὲ ἔχειν τὸ ὅρος καὶ τὸ ἐμβαδὸν σχῆμα. Τέλος δὲ, ὅτι εἰκαὶ ὁ Γεωμέτρης ἐν τοῖς αἰσθητοῖς ἐναχολεῖται σχήμασιν, ἀλλ' οὐ τινὰ ἀκριβῆ θεωρίαν περὶ τῶν ἀύλων καὶ νοερῶν, καὶ εἰκόνων τῶν αἰσθητῶν ποιεῖται σχημάτων, καὶ περὶ ἐκείνων τὰς ἀποδείξεις μηχανᾶται, καὶ τὰς λόγους ἀποδίδωσι. τίς γὰρ μηχανὴ εὑρεῖν σχῆμα ὕπως ἐντελὲς, ὥστε τὰς νοερὰς δέχεσθαι λόγους, καὶ τινὰ θεωρίαν περὶ αὐτὸ ἄπταιστον γίνεσθαι;

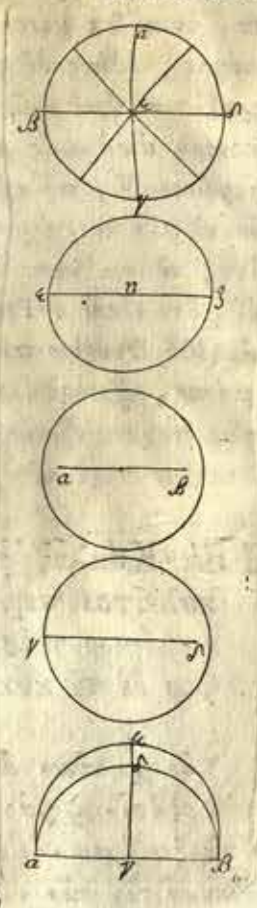
ΙΕ'. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια. πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

Τῶν σχημάτων ἁπάντων τὸ πρώτιστον καὶ ἁπλούστατον, ἅμα δὲ καὶ τελειότατον, ὁ κύκλος ἐστί· καὶ γὰρ τῶν μὲν στερεῶν πάντων ὑπερφέρει, τῷ ἐν ἁπλουστέρᾳ τάξει τοῦ ὕπαρξιν ἔχειν· μέγεθος γάρ ἐστι διχῇ διαστατὸν, ἐκείνων ἐν ἕξισι σωματουμένων διαστάσεσι. τῶν δὲ ἐν ἐπιπέδοις ὑφισαμένων τῇ ὁμοιότητι καὶ τῇ ταυτότητι ὑπερέ-

περέχει, καὶ ἔστιν ἀνάλογον τῷ πέρατι καὶ τῇ μονάδι. λέγεται μὲν οὖν χῆμα, διὰ τὸ πεπεράσθαι. ἐπίπεδον δὲ, εἰς διαφορὰν τῶν στερεῶν χημάτων. ὑπὸ μιᾶς δὲ γραμμῆς περιεχόμενον, ἅτε μὴ τιὼ ποικιλίαν τῶν ἔξω δεχόμενον ὅρων, ὡς τὰ λοιπὰ χήματα. καλεῖται δὲ ὁ πᾶς ὅρος περιφέρεια, εἰς διαφορὰν τῶν εὐθυγράμμων χημάτων. οὐδὲν γὰρ τῶν εὐθυγράμμων ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιορίζεται. εὕρηται δὲ, ὅτι πρὸς τιὼ περιφέρειαν αὐτῆς πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, ἀφ' ἑνὸς σημείου, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὅτι γε καὶ αἱ ἐλλείψεις ὑπὸ μιᾶς πως περιφερείας περίζονται, ἃ μιὼ δὲ αἱ πρὸς αὐτιὼ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, εἰσὶν ἴσαι. τὸ δὲ τῶν ἐντὸς κειμένων προσετέθη, ὅτι καὶ ἡ σφαῖρα τῇ περιγραφομένῃ κύκλῳ, ἔστι τι κέντρον ὁ πόλος, ἀλλ' οὐκ ἐντὸς τοῦ κύκλου ἐστὶν, μᾶλλον δ' ἐκτός. τὸ δὲ ἀφ' ἑνὸς, ὅτι ἓν εἶναι τὸ κέντρον ἀφείλει. εἰκὼν τούτου τὸ αβγδ, χῆμα, ἧ κέντρον τὸ ε.

Ις'. Διάμετρος δὲ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

Lib. 1. Fig. 7.



Τῆς φωνῆς ταύτης διαμέτρου ἐν πολλοῖς χήμασι λαμβανομένης, καὶ γὰρ καὶ τοῖς παραλληλογράμμοις, καὶ ταῖς ἐλλείψεσι καὶ σφαίραις, διάμετρός ἐστιν. ἰδίως διάμετρον τιὼ ἐν κύκλῳ δεῖον καλεῖν. ἡ μὲν γὰρ τῶν παραλληλογράμμων διάμετρος, διαγώνιος μετὰ προσθήκης ὀνομάζεται. ἡ δὲ τῶν ἐλλείψεων καὶ σφαιρῶν, ἄξων λέγεται. μόνη δὲ τῶν κύκλων διάμετρος ἁπλῶ προσθήκης καλεῖσθαι κεκλήρωται. Τὸ μὲν οὖν εὐθεῖα γένους χώραν ἐπέχει. ἐπεὶ δὲ πολλαὶ εὐθεῖαι δυνανται ἐντὸς τοῦ κύκλου ἄγεσθαι, μόνη ἐκείνη διάμετρος λέγεται, ἡ διὰ τοῦ κέντρου. ὥσπερ καὶ πολλῶν σημείων ἐντὸς τοῦ κύκλου ὄντων, ἓν καὶ μόνον κέντρον λέγεται, τὸ μεσαίτατον. Ἐπεὶ δὲ πάλιν καὶ διὰ τοῦ κέντρου δυναταί τις εὐθεῖα ἄγεσθαι, ἀμφὶ δὲ καὶ περατοῦσθαι, ὡς ἡ αβ, ἡ καθ' ἓν μόνον περατοῦσθαι μέρος, ὡς ἡ γδ, ἀλλ' οὐκ ἐπὶ τὸ ἕτερον, καὶ διάμετρος οὐκ ἔστι. διὰ τοῦτο προσέθηκε καὶ τὸ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ὡς ἡ εηζ, καὶ ταύτα μὲν διαφορῶν ἀναπληροῦσι τόπον. Τὸ δὲ δίχα τὸν κύκλον τέμνειν τιὼ διάμετρον, πρῶτόν φασι τὸν Θαλιὼ ἀποδεῖξαι, διὰ τὸ εὐθεῖαν εἶναι, καὶ διὰ τοῦ κέντρου διέρχεσθαι, καὶ περατοῦσθαι. Δείκνυται δὲ καὶ διὰ μαθηματικῆς ἀποδείξεως. εἰ γὰρ τοῦ κύκλου εἰς δύο διαιρουμένου ὑπὸ τῆς διαμέτρου, θάτερον τῶν μερῶν ἐπὶ τὸ λοιπὸν ἐφαρμοσθῇ, πάντως γε εἰ ἔστιν ἴσα

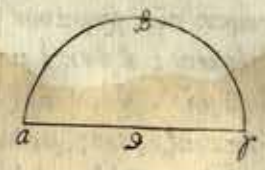
σα,

σα, ἐφαρμοθήσεται θατέρου θατέρῳ, ὥστε μηδ' ἕτερον ἐλλείπειν τῆ λοιπῆ, ἢ ὑπερέχειν. εἰδ' ἄνισα, τὸ μὲν ἐντὸς, τὸ δὲ ἐκτὸς πεσεῖται. πάλιν δὲ γενομένης ἄτοπόν τι ἔσαι. καὶ γὰρ ἐπεὶ αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαί εἰσιν, μὴ ἐφαρμοττομένων τῶν αὐτῶν τῆς κύκλου μερῶν, ἔσαι ἡ ἐλάττων ἴσην τῇ μείζονι, ἡ γ δ, τῇ γ ε, ὅπερ ἐχ ἄτοπον μόνον, ἀλλὰ καὶ ἀδύνατον.

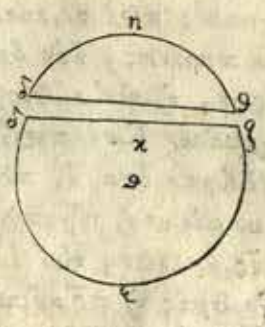
ΙΖ'. Ἡμικύκλιον δέ ἐςι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπότε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

ΙΗ'. Τμῆμα κύκλου ἐςὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

Lib. 1. Fig. 8.



Εἶναὶ τὸ ἡμικύκλιον καὶ τμῆμα κύκλου κοινωνεῖν ἀλλήλοις δοκεῖ, καθ' ὃ ἕκαστον αὐτῶν ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας περιέχεται, διειλύσχειν ἔμπης. ὅτι τὸ μὲν ἡμικύκλιον ὑπὸ ὡρισμένης περιέχεται εὐθείας, τῆς διαμέτρου. τὸ δὲ τμῆμα ὑπὸ τῆς τυχούσης, ἥτις καὶ χαρδὴ λέγεται. καὶ τὸ μὲν τμῆμα καθολικώτερόν ἐςι, τὸ δὲ ἡμικύκλιον μερικώτερον. διὸ καὶ λέγεται μὲν τὸ ἡμικύκλιον καὶ τμῆμα, ἐπὶ δὲ καὶ ἀνάπαλιν, τὸ τμῆμα καὶ ἡμικύκλιον. Ἔτι τὸ μὲν ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἔχει τὸ κέντρον, οἷον τὸ θ, τοῦ α β γ ἡμικυκλίου. τὸ δὲ τμῆμα, εἴτε μεῖζον ἐντὸς, ὡς τὸ θ, ἐντὸς ὂν τῆς περιμέτρου τοῦ δ ε ζ. εἴτε ἔλαττον ἐκτὸς, οἷον τὸ δ ν θ, ἔχον τὸ κέντρον κ, ἐν τῷ ἐμβαδῷ τοῦ μείζονος. ὥστε ἔξεις ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν τοῦ κέντρου τὸν τόπον. ἢ γὰρ ἐπὶ τῆς περιμέτρου ἔσαι τοῦ σχήματος, ἢ ἐντὸς ταύτης, ἢ γοῦν ἐκτὸς, ὡς εἴρηται. διὸ καὶ ξία τοῦ τμήματος τοῦ κύκλου εἴδη, ἡμικύκλιον, μεῖζον τμῆμα, καὶ ἔλαττον. ἑκάτερον δὲ τό, τε ἡμικύκλιον καὶ τμῆμα κύκλου δυοειδές ἐςι. καὶ γὰρ ἕκαστον τῶν σχημάτων, ἢ μονοειδές ἐςιν, ὡς ὁ κύκλος ἐν τοῖς ἐπιπέδοις, καὶ ἡ σφαῖρα ἐν τοῖς στερεοῖς. ἢ δυοειδὲς, ὡς τὸ ἡμικύκλιον καὶ τὰ τοῦ κύκλου τμήματα ἐν τοῖς ἐπιπέδοις, ἐν δὲ τοῖς στερεοῖς τὸ ἡμισφαίριον, καὶ τὰ τῆς σφαίρας τμήματα. ἢ γοῦν πολυειδὲς, ὡς τὰ ξίγωνα, τετράγωνα, καὶ λοιπὰ ἐπίπεδά τε καὶ στερεά. εἰδὲ ἀδύνατον σχῆμα ὑπὸ δύο εὐθειῶν περιέχεσθαι, τοῦτο ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων ἀληθεύει, δύο γὰρ εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι. τὸ δὲ ἡμικύκλιον καὶ κύκλου τμῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ περιφεροῦς περιέχεται, διὸ καὶ δυοειδὲς λέγεται.



ΙΘ'. Εὐ-

ΙΘ'. Εὐθύγραμμα σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

Κ'. Τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν.

ΚΑ'. Τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

ΚΒ'. Πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων, ἢ τεσσάρων πλευρῶν περιεχόμενα.

Καθάπερ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς ἡ μονάς ἐστιν ἡ πρώτη ἐξ ἧς ἀρχὴ ἀμερὴς ὑποτίθεται, ἡ δὲ δυὰς μέσον μονάδος τε καὶ ἀριθμῶν, ὡς δευτέρα· ἀπὸ δὲ τῆς δυαδικῆς ἡ ἐπ' ἄπειρον τῶν ἀριθμῶν ἄρχεται αὔξησις. οὕτω καὶ ἐν τοῖς σχήμασιν, ὁ μὲν κύκλος, ὡς ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενος, μονάδος τόπον ἐπέχει· τὸ ἡμικύκλιον δὲ δυάδος, ὡς ὑπὸ δύο περιεχόμενον. τὸ δὲ τρίγωνον ἀρχὴν λαμβάνει τῆς ἐπ' ἄπειρον τῶν σχημάτων προόδου. Τίνος δὲ χάριν οἱ ἀριθμητικοὶ τοιαύτην τάξιν ὡρίσαντο; ἢ ὅτι ἡ μὲν μονὰς ἐφ' ἑαυτὴν, ἢ καὶ πρὸς ἄλλον πολλαπλασιαζομένη ἀριθμὸν, οὐδὲν αὔξει, προσιθεμένη δὲ αὔξει· ὁ ἀριθμὸς δὲ τοὐναντίον, πολλαπλασιαζόμενος μᾶλλον αὔξει ἢ προσιθέμενος· ἐπεὶ δὲ ἡ δυὰς πολλαπλασιαζομένη καθ' ἑαυτὴν τὸ αὐτὸ ποιεῖ, ὅπερ καὶ προσιθεμένη, τούτου ἕνεκα τὴν μέσην χώραν ἔχει. ταύτης δὲν τῆς τάξεως καὶ τοῖς σχήμασι τηρουμένης, πρῶτον μὲν ὁ Στοιχειωτὴς περὶ τὸν κύκλον διαλαβὼν, μετὰ δὲ τὸν κύκλον περὶ τὸ ἡμικύκλιον, ἐπὶ τοῦ παρόντος, ἤδη ὅπως ἕκαστον τῶν σχημάτων δέον καλεῖσθαι διὰ βραχέων διδάσκει ὅρων, καὶ τοῦτ' αὐτὸς ἐκ τῶν ἀριθμῶν ἐραστιζόμενος. Ὅσα τοίνυν τῶν ἐπιπέδων σχημάτων βραχυὶ περιέχονται ὅροις, τρίπλευρα καλεῖ· ὅσα δὲ τέτρασι, τετράπλευρα· ὅσα δὲ πλείοσι τῶν τεσσάρων πολύπλευρα. τὸ δ' ἕνεκα τῶν τριπλεύρων μόνων καὶ τετραπλεύρων τὴν ἰδίαν εἶπον προσηγορίαν, τῶν δὲ λοιπῶν τὴν κοινὴν ἐμνήσθη, τὴν ἰδίαν ἑκάστῳ ἀποσιωπήσας; ὅτι καὶ τοῖς ἀριθμοῖς ὁ τριαδικὸς ἀριθμὸς καὶ τετραδικὸς πρῶτοί εἰσι, ὁ μὲν ἐν τοῖς περιττοῖς, ὁ δὲ ἐν τοῖς ἀρτίοις. διὸ καὶ Εὐκλείδης τὰ δύο πρώτιστα τῶν σχημάτων τρίγωνόν φησι καὶ τετράγωνον εἰς μνήμην λαβὼν, τὰ λοιπὰ πάντα τῇ κοινῇ περιέλαβε προσηγορίᾳ. Γνῶσιν δὲ, ὅτι ἐνταῦθα περὶ τῶν εὐθυγράμμων μόνον τὸν λόγον ποιεῖται. Ἐπισκέψεως δὲ καὶ τοῦτο ἄξιον, ὅτι ὥσπερ τῶν γραμμῶν αἱ μέν εἰσιν ἁπλαῖ, αἱ δὲ μικταὶ· οὕτω καὶ τῶν σχημάτων, τὰ μὲν ἁπλᾶ λέγονται, τὰ δὲ μικτά. καὶ ἁπλᾶ μὲν τὰ ὑπὸ ἁπλῶν περιεχόμενα γραμμῶν· τούτων δὲ τὰ μὲν ὑπὸ ὁμοειδῶν περιέχεται, τὰ δὲ ὑπ' ἀνομοειδῶν· τῶν δὲ ὑπὸ τῶν ὁμοειδῶν αὖθις, τὰ μὲν ὑπὸ εὐθειῶν γραμμῶν περιέχεται, τὰ δὲ ὑπὸ περιφερῶν. μικτὰ δὲ τὰ ὑπὸ μικτῶν γραμμῶν περιεχόμενα, ὡς τὰ ἑλικοειδῆ, ἢ κισσοειδῆ καὶ ἄλλα.

ΚΓ'. Τῶν

ΚΓ'. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

ΚΔ'. Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

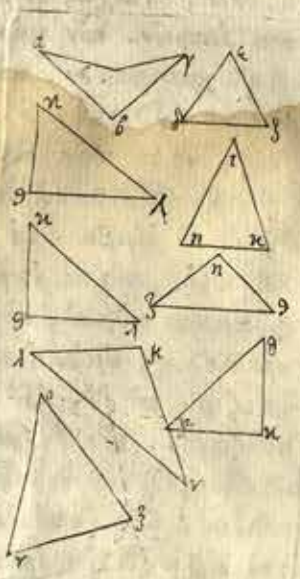
ΚΕ'. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

Κς'. Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ μίαν ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

ΚΖ'. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ μίαν ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

ΚΗ'. Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

Eucl. Lib. 1. Fig. 9.



Ἄρχεται δὴ καὶ τῆς τῶν σχημα--- διαιρέσεως Εὐκλ. ἀπὸ τῶν τριπλεύρων. ὅτι τὸ τρίγωνον πᾶν ἐν τοῖς εὐθυγράμμοις ἐπέχει τάξιν, ὡς εἴρηται. λαμβάνεται δὲ ἡ τῶν τριπλεύρων διαίρεσις, ὁτὲ μὲν ἀπὸ τῶν πλευρῶν, ὁτὲ δ' ἀπὸ τῶν γωνιῶν· καὶ τοῦτο οὐκ ἀλόγως. πᾶν γὰρ τὸ τρίπλευρον, ἔστι καὶ τρίγωνον, ὑμοῦ δὲ καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν τὸ τρεῖς γωνίας ἔχον, ἔχει καὶ τρεῖς πλευράς. τὸ γὰρ αβγ, φερ' εἰπεῖν, σχῆμα ἔχει μὲν τρεῖς γωνίας, πλευρὰς δὲ τέτταρας. Ἀπὸ τῶν πλευρῶν μὲν οὖν διαιρεῖται τὰ τρίγωνα, εἰς ἰσόπλευρα, ἰσοσκελῆ, καὶ σκαληνά. καὶ ἰσόπλευρα μέν ἐστιν, ἅπερ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας ἔχει, ὡς τὸ δεζ. ἰσοσκελῆ δὲ, ἃ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχει, ὡς τὸ ηθκ, καὶ σκαληνά, ἅπερ καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἀνίσους ἔχει, ὡς τὸ λμν. Ἀπὸ δὲ τῶν γωνιῶν διαιρεῖται αὖθις εἰς ὀρθογώνια, ἀμβλυγώνια, καὶ ὀξυγώνια. Ὀρθογώνια μὲν οὖν ἐστι, τὰ ἔχοντα μίαν τῶν αὐτῶν γωνιῶν ὀρθήν· οὐ γὰρ δυνάται τρίγωνον δύο ὀρθὰς πώποτ' ἔχειν γωνίας, ὡς δειχθήσεται. Ἀμβλυγώνια δὲ, ἃ τὴν μίαν ἀμβλεῖαν ἔχει· καὶ ὀξυγώνια, ἅπερ καὶ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχει. ὥστε ἐκ τύπων συνάγεται ἑπτὰ τὰ εἴδη τῶν τριγώνων εἶναι. τὸ γὰρ ἰσόπλευρον μονοειδὲς ὂν τυγχάνει τῇ τῶν γωνίας, τυγχάνει ὀξυγωνίᾳ· τῶν δὲ λοιπῶν δύο, τὸ ἰσοσκελὲς, φημὶ, καὶ σκαληνὸν ἑκάτερα λαμβανομένων τῶν γωνίας, ἑπτὰ τὰ τύπα τῶν τριγώνων ἀποτελεῖται εἴδη. Πρῶτον τὸ ἰσόπλευρον ἰσογώνιον δεζ. δεύτερον τὸ ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον ηθκ. τρίτον τὸ ἰσοσκελὲς ἀμβλυγώνιον ζηθ. τέταρτον τὸ ἰσοσκελὲς ὀξυγώνιον ηικ. πέμπτον τὸ σκαληνὸν ὀρθογώνιον θκλ. ἕκτον τὸ σκαληνὸν ἀμβλυγώνιον λμν. καὶ ἕβδομον τὸ σκαληνὸν ὀξυγώνιον νοξ. καὶ περὶ μὲν τῆς τῶν τριπλεύρων, διαιρέσεως ἄλις. ἑπόμενον δ' ἐστὶν εἰπεῖν καὶ περὶ τῆς τῶν τετραπλεύρων.

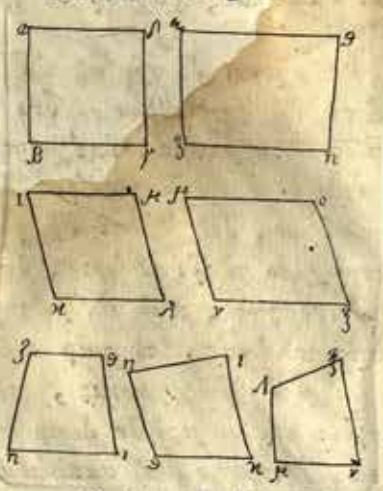
ΚΘ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τε καὶ ὀρθογώνιον.

Λ'. Ἑτερόμηκες δὲ, τὸ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

ΛΑ'. Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

ΛΒ'. Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον. τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, τραπέζια καλείσθω.

Eucl. Lib. 1. Fig. 10.



Πεπαχῶς τῷ Στοιχειωτῇ τὸ τετράπλευρον ἤδη διαιρῶντος, οἷόν ἐστιν ἡμῖν καὶ τοῖς παρ' ἄλλοις τάττα διαιρεσιν λαβοῦσιν, ἐπαχῶς καὶ τὰ τετράπλευρα, ὡς καὶ τὰ τρίγωνα διαιρεῖν. τῶν γὰρ τετραπλεύρων τὰ μὲν, παραλληλόγραμμά ἐστι, τὰ δ' οὔ. καὶ τῶν παραλληλογράμμων αὖθις τὰ μὲν, ἰσόπλευρα ἅμα τε καὶ ὀρθογώνια, ὡς τὰ τετράγωνα· τὰ δὲ, θατέρα τάτων, ὡς τὰ ῥομβοειδῆ· τὰ δὲ ἰσόπλευρα μὲν, οὐκ ὀρθογώνια δὲ, ὡς οἱ ῥόμβοι· τὰ δὲ, ὀρθογώνια μὲν, οὐκ ἰσόπλευρα δὲ, ὡς τὰ ἑτερόμηκη. τῶν δὲ μὴ παραλληλογράμμων τὰ μὲν, τὰς δύο μόνας τῶν πλευρῶν ἔχει παραλλήλους, ἡμιῶ δὲ καὶ τὰς λοιπὰς, καὶ καλεῖται τραπέζια· τὰ δὲ, οὐδ' ὅλως ἔχει τῶν πλευρῶν τινας παραλλήλους, καὶ καλεῖται τραπεζοειδῆ. τῶν δὲ τραπεζίων τὰ μὲν, ἴσας ἔχει τὰς σωαπτούσας τὰς δύο παραλλήλους, καὶ καλεῖται τραπέζια ἰσοσκελῆ· τὰ δὲ, ἀνίσους, καὶ καλεῖται τραπέζια σκαληνά. ὥστε ἑπτά εἰσι τὰ εἴδη καὶ τῶν τετραπλεύρων σχημάτων. Τετράγωνον, ὡς τὸ αβγδ. Ἑτερόμηκες, ὡς τὸ εζηθ. Ῥόμβος, ὡς τὸ ικλμ. Ῥομβοειδὲς, ὡς τὸ μνξο. Τραπέζιον ἰσοσκελὲς, ὡς τὸ ζηιθ. Τραπέζιον σκαληνὸν, ὡς τὸ ηθκι. καὶ τραπεζοειδὲς ὡς τὸ λμνξ.

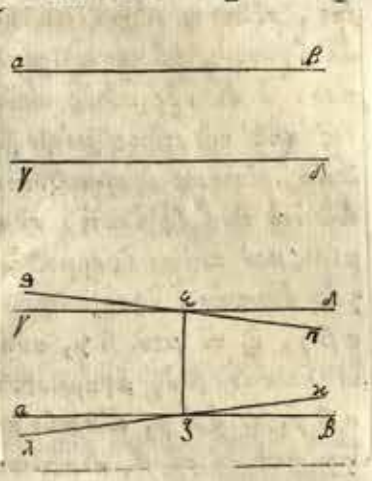
ΛΓ'. Παράλληλοι εὐθεῖαί εἰσιν, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Πληρώσας τοίνυν τῶν ἐπιπλεύρων καὶ τετραπλεύρων σχημάτων ἑρμηνείαν, καθ' ὅσον εἰς λόγον ὅρων συμβάλλεται, προπέμψας τοίνυν τοῦ μονοειδοῦς καὶ τῶν τούτου μερῶν, προέθηκα νυνὶ καὶ τοῖς παραλλήλων εὐθειῶν ὁρισικὴν διδασκαλίαν. ὅπως δ' ἂν ἀκριβῶς εὐθεῖαί τινες παράλληλοι εἶεν, τὰ ἑξῆς παντὶ, φησι, δεῖ φυλάττειν, τὸ ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἐπιπέδῳ, τὸ ἐκβάλλεσθαι ἐπ' ἄπειρον, καὶ τὸ

ἐφ'

ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη μὴ συμπίπτειν, ὡς αἱ α β, γ δ. σὺν γὰρ ἐλείποντος, τὸ παραλλήλους εἶναι οὐκ ἔξουσι. καὶ περὶ μὲν τῆς τῶν ὅρων ἑρμηνείας καὶ Πρόκλον τὸν διάδοχον ἀρκείσθω ἡμῖν. Τὰ Αἰτήματα δὲ καὶ Ἀξιώματα ὑπεκείσθωσαν ἐπὶ τῶ παρόντος, ὡς καὶ παρὰ τῷ Εὐκλείδ. διάκεινται. τὰ μὲν γὰρ καθ' αὑτὰ τὸ γνωστὸν ἔχει, τὰ δὲ λαμβάνονται μόνον, ὡς εἰς κατασκευήν τινων συμβάλλοντα, ὡς προείρηται. μεθ' ὃ δὲ τὰ Αἰτήματα, καὶ Ἀξιώματα, ἡ τῶν προτάσεων ἐπιλογεία ἀμέσως παχθήσεται· συνοπτικωτέρα μέντοι τῆς παρὰ τῷ Εὐκλείδῃ· σεσημειωμένων ἐν ἑκάστῃ προτάσει, τῶν τε ὅρων, ἀξιωμάτων, καὶ προτάσεων, δι' ὧν δείκνυται. καὶ τοῦτο εἰς ῥᾳστέραν τῶν ἀρχομένων κατάληψιν.

Eucl. Lib. 1. Fig. 11.



ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

Α'. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ παν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Β'. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

Γ'. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

Κοιναὶ ἔννοιαι, ἤτοι Ἀξιώματα.

Α'. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Β'. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

Γ'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἐστιν ἴσα.

Δ'. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

Ε'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ ἐστιν ἄνισα.

ς'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Ζ. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίσεα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Η'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Θ'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

Ι'. Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

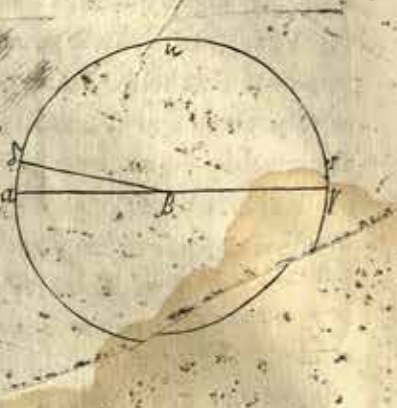
ΙΑ'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας (οἷον τὰς η θ, κ λ,) εὐθεῖα ἐμπίπτουσα (ἡ ε ζ.) τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ὡς τὰς ὑπὸ η ε ζ, κ ζ ε. ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

ΙΒ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσι.

ΙΓ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι κοινὸν τμῆμα οὐκ ἔχουσιν.

Παρὰ τὰ ιβ'. ἐν τῷ Εὐκλ. δεικνύμενα Ἀξιώματα, τάπε Λήμματα καὶ τὰς Ὅρους, τίθεται Ἀρχὴ μαθηματικὴ καὶ ἡ λέγουσα, Καὶ δύο εὐθεῖαι κοινὸν τμῆμα οὐκ ἔχουσιν, ὡς φησι Πρόκλος ἐν τοῖς αἰτήμασι παντέλεον. ὁ δὲ νοῦς αὐτῆς τοιοῦτός ἐστιν, ὅτι ἐὰν εὐθεῖά τις καθ' ὁπόσον μέρος μόνον ἐφαρμοσθῇ ἑτέρᾳ τινὶ εὐθείᾳ, ἅπασα ἐφαρμοσθήσεται. διὰ τὸ ἐξ ἴσου τῷ εὐθεῖαν τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖσθαι, ὁ μὲν δὴ μέρος μὲν παύτης ἐφαρμοσθήσεται, ἡ δὲ λοιπὴ οὔ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐφαρμοσθήτω ἡ δβγ, εὐθεῖα ἐπὶ τῆς αβγ, καὶ τὰ μὲν βγ, αὐτῆς μέρος ἐφαρμοτομούσῃ, τὸ λοιπὸν βδ, ἀφάρμοστον μενέτω. ὥστε εἶναι τῶν αβγ, καὶ δβγ, εὐθειῶν κοινὸν τμῆμα τὸ βγ. κέντρῳ μὲν δὴ τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα, κύκλος γεγράφθω ὁ αδεγ. καὶ ἐπεὶ ἡ δβγ, εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται, διαμέτρός ἐστι καὶ τὸν ιε'. ὅρον, καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον. ὥστε τὸ δεγ, τόξον ἡμικύκλιόν ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἐστι καὶ τὸ αεγ, ἡμικύκλιον, ὅτι καὶ ἡ αβγ, διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται, ὥστε τὸ δεγ, ἴσον ἐστὶ τῷ αεγ, ὅπερ ἀδυνατον. ὑπερέχει γὰρ τὸ αεγ, τοῦ δεγ, τῷ αδ, τόξῳ.

Eucl. Lib. I. Fig. 12.



ΙΔ'. Καὶ τὸ ὅλον ἴσον τοῖς ἰδίοις μέρεσι.

Περίληψις τοῦ Πρώτου Βιβλίου Εὐκλείδ.

Ἐπὶ τοῦ παρόντος Πρώτου Βιβλίου ὁ Εὐκλείδης ἐν τῇ ἐκθέσει τῶν ὅρων, πραγματεύται περὶ τῶν γραμμῶν, καὶ τῶν ἐκ τούτων ποικίλως πως ἀλλήλαις συνεχομένων ἀναφυομένων γωνιῶν, καὶ μή, σχημάτων. τούτοις ἐπιφέρει τὰ Λήμματα καὶ Ἀξιώματα. οἷς οἷον κλεισὶ κεχρημένος ἐπὶ τοῦ ἀποδεῖξιν χωρεῖ τῶν προτάσεων. ὧν ἐπὶ μὲν τῶν ὀκτὼ πρώτων περὶ τῶν ἐπιπέδων πραγματεύεται ξυγώνων, τοῦ φύσιν αὐτῶν ἀναπτύσσων. μετὰ ταύτας δὲ περὶ τὰ διχοτομεῖν γωνίας τε καὶ γραμμὰς, καὶ καθέτους ἀνορθοῦν, καὶ καθετοῦσθαι τοῦ μέθοδον παραδίδωσιν. ἐπὶ τούτοις τὰ λοιπὰ τῶν ξυγώνων πάθη καὶ παραλλήλων, μεθ' ἃ καὶ τὰς τῶν τετραπλεύρων καὶ παραλληλογράμμων ἰδιότητας, θεωρεῖ, ἀποδεικνύων τίνι λόγῳ τὰ πολύγωνα, καὶ μὴ κανονικὰ σχήματα δυνατὰ ἀναγεσθαι εἰς ὀρθογώνια, ἤτοι παραλληλόγραμμα, ἢ ξύγωνα, σαφέστερα ἀμέλει καὶ κανονικά. καὶ τέλος ἐπιτίθησι τῷ λόγῳ, τῷ πολυθρυλλήτῳ Πυθαγορείῳ θεωρήματι τῆς ἑκατόμβης ἀκηκοέναι προτάσεως, παρὰ τὸ ἑκατὸν θῦσαι βοῦς ἐπὶ τῇ τούτου εὑρέσει.

Αἱ χρησιμώτεραι δὲ ταῖς ἐπισήμοις προτάσεις, ὑπὲρ ὧν ὁ ἅπας γίνεται λόγος, εἰσὶν αὗται, ἥ λβ'. λε. λζ'. μά. μδ'. με'. καὶ μζ'.

ΕΡΜΗ-

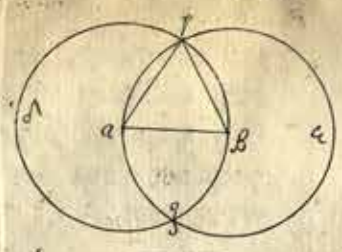
ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΣΥΝΤΟΜΩΤΕΡΑ ΤΩΝ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ.

Πρότασις Πρώτη. Πρόβλημα.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἀθείας τετράσμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἐπὶ τῆς αβ, ἤδη δοθείσης ἀθείας ἑστω τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. κέντροις μὲν τοῖς α, β, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ αβ, κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ γδζ, γεζ, τεμνόμενοι κατὰ τὸ γ, καὶ ζ, σημεῖα. καὶ ἀπὸ τοῦ γ, δοθεισῶν ἀγομένων τῶν γα, γβ, ἔστωσαν τὸ ἐπιταχθέν. καὶ γὰρ αἱ γα, γβ, ἴσαι ἔσαι ἑκατέρα τῇ αβ, καὶ τῶ ι ε. ὅρον, ἴσαι καὶ ἀλλήλαις ἔσονται, κατὰ τὸ ά. ἀξίωμα. τὸ αβγ, ἄρα τρίγωνον ἰσόπλευρόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

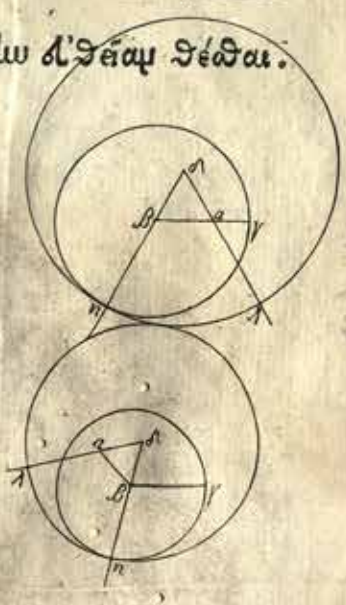
Eucl. Lib. 1. Fig. 13.



Πρότασις Δευτέρα. Πρόβλημα.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ ἀθείᾳ, ἴσην ἀθεῖαν θέσθαι.

Δοθείσης ἤδη ἀθείας μὲν τῆς βγ, σημείου δὲ τοῦ α, εἴτ' ἐπ' αὐτῆς, εἴτ' ἐκτὸς αὐτῆς, ἔστω πρὸς τῷ α, σημείῳ τῇ βγ, ἀθείᾳ ἴσην ἀθεῖαν θέσθαι. ἐπὶ τῆς αβ, τοίνυν ἀθείας, κειμένης, ἢ γὲν ἀγομένης, συνεστάθω διὰ τῆς ἀνωτέρω τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ αβδ. αἱ δὲ πρὸς τῷ πλευραὶ δβ, δα, ἐπ' ἄπειρον ἐκβεβλήσθωσαν. δύο δὲ κύκλων, κέντροις μὲν τοῖς β, καὶ δ, διαστήμασι δὲ τοῖς βγ, καὶ δη, περιγεγραφομένων, ἔστω ἡ αλ, ἴση τῇ βγ. ἡ γὰρ δλ, ἴση ἐστὶ τῇ δη, κατὰ τὸν ι ε, ὅρον. καὶ τῶν δβ, δα, ἴσων ἀθειῶν ἀφαιρεθεισῶν, ἐγκαταλείπεται ἡ αλ, ἴση τῇ βη, κατὰ τὸ γ'. ἀξίωμα. ἐπεὶ δὲ τῇ βη, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ βγ, ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου. ἄρα καὶ ἡ αλ, ἴση ἐστὶ τῇ βγ, κατὰ τὸ ά. ἀξίωμα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Πρό-

Πρότασις Τρίτη. Πρόβλημα.

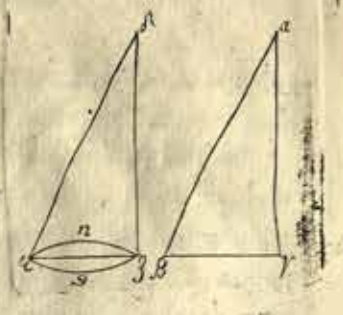
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Euct. Lib. 1. Fig. 14.

Ἔστω δὴ ἀπὸ μείζονος τῆς αβ, ἴσην εὐθεῖαν τῇ ἐλάττονι γ, ἀφελεῖν. εἰλήφθω τοίνυν ἡ αδ, ἴση τῇ γ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ, κύκλος γεγράφθω, ὁ δεζ, τέμνων τὴν αβ, κατὰ τὸ ε. τὸ γὰρ γενόμενον, ἔστω ἡ αε, ἴση τῇ δοθείσῃ γ. ἐπεὶ γὰρ αἱ αε, καὶ γ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῇ αδ, ἡ μὲν ἐκ τοῦ καταστάσεως, ἡ δὲ ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ ἀλλήλαις ἄρα εἰσὶν ἴσαι καὶ τὸ ἀ. ἀξίωμα, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Τετάρτη. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι.



Τριγώνων δὴ τῶν αβγ, δεζ, ἐχόντων τὴν μὲν αβ, πλευρὰν τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, ἴσην, καὶ τὴν πρὸς τῷ α, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ δ, ὁμοίως ἴσην. ἔστω δὴ πρῶτον καὶ ἡ βγ, βάσις ἴση, τῇ εζ, καὶ ὅλον τὸ τρίγωνον αβγ, ὅλῳ τῷ δεζ, τριγώνῳ. καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ β, γωνία τῇ πρὸς τῷ ε, ἡ δὲ πρὸς τῷ γ, τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση. τὸ γὰρ αβγ, τριγώνου ἐφαρμοσθέντος τῷ δεζ, ἐφαρμοσθήσεται καὶ ἡ πρὸς τῷ α, γωνία τῇ πρὸς τῷ δ, ὥστε καὶ ἡ αβ, πλευρὰ ἐφαρμοσθήσεται τῇ δε, πλευρᾷ, καὶ ἡ αγ, τῇ δζ, καὶ τὸ ιγ'. ἀξίωμα. τὰπον δ' ὅπου ἐκκειμένων, ἀνάγκη ἐφαρμοσθῆναι καὶ τὴν βγ, τῇ εζ. εἰγαρ μή, ἡ ἐντὸς ὡς ἡ εη, πεσεῖται, ἢ ἐκτὸς ὡς ἡ εθ. καὶ δύο δὴ εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἄτοπον καπὰ τὸ ιβ'. ἀξίωμα. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς καὶ τὰ ἑξῆς, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

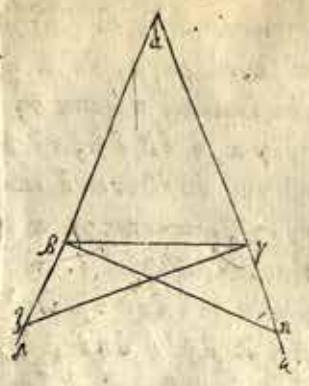
Πρό-

Πρότασις Πέμπτη. Θεώρημα.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

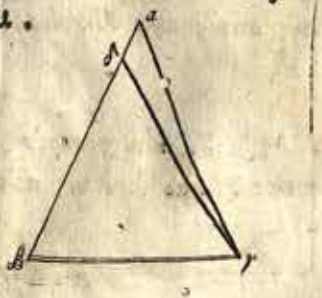
Τριγώνου γὰρ τοῦ αβγ, ἰσοσκελοῦς, λέγω, ὅτι αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, αγβ. ἴσαι εἰσί. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ταῖς αβ, αγ, πλευραῖς πρὸς τὰ δ, καὶ ε, σημεῖα· καὶ εἰλήφθω ἐπὶ μὲν τῆς βδ, τυχὸν σημεῖον τὸ ζ· ἀπὸ δὲ τῆς γε, ἀφῃρήσθω τῇ βζ, ἴση ἡ γη· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ, αη, εὐθεῖαι· καὶ ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ βα τῇ γα, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ βζ τῇ γη· δύο δὴ αἱ βα, βζ, δυσὶ ταῖς γα, γη, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν πρὸς τῷ β· βάσις ἄρα ἡ αζ, βάσει τῇ αη, ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ αβη τρίγωνον τῷ αγζ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν, αἱ ὑπὸ βγ, γβ· καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ αβ ὅλῃ τῇ αγ ἐστὶν ἴση· ἐν αἷς ἐστὶν ἡ βγ, βάσις κοινή· ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ τοῦ ἐλάσσονος τῇ λοιπῇ τοῦ μείζονος ἴσαι ἔσονται· καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ αβη, γωνία τῇ ὑπὸ αγζ, ἴση· ἡ δὲ ὑπὸ βηα, τῇ ὑπὸ γζα. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ βγ, γη, δυσὶ ταῖς γβ, γζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βγη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γβζ, ἴση· καὶ βάσις ἄρα ἡ βη, βάσει τῇ βζ, ἴση ἐστὶ· καὶ τὸ βγη τρίγωνον τῷ βγζ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν, αἱ ὑποτείνουσαι τὰς ἴσας γωνίας· ἡ μὲν ὑπὸ ηβγ, τῇ ὑπὸ ζγβ, ἴση· ἡ δὲ ὑπὸ βγη, τῇ ὑπὸ γβζ· ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ αβη, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αγζ, ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ηβγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ζγβ, ἴση ἐστὶν· αἱ δὲ ὑπὸ τὴν βάσιν τοῦ αβγ τριγώνου, αἱ ὑπὸ βγη, γβζ, ἴσαι ἐδείχθησαν· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ηβ τῇ ζγ, κοινὴ δὲ ἡ βγ· δύο δὴ αἱ ηβ, βγ, δυσὶ ταῖς ζγ, γβ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ηβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζγβ, ἴση· καὶ βάσις ἄρα ἡ ηγ, βάσει τῇ ζβ, ἴση ἐστὶ· καὶ τὸ ηβγ τρίγωνον τῷ ζγβ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, αἱ ὑποτείνουσαι τὰς ἴσας γωνίας· ἡ μὲν ὑπὸ βηγ, τῇ ὑπὸ βζγ, ἴση· ἡ δὲ ὑπὸ ηβγ, τῇ ὑπὸ ζγβ· ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ αβη, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αγζ, ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αγβ, ἴση ἐστὶν· αἳ εἰσὶ πρὸς τῷ βάσει τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου τοῦ αβγ· ἐδείχθη δὲ καὶ αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν αὐτοῦ, αἱ ὑπὸ βγη, γβζ, ἴσαι· τῶν ἰσοσκελῶν ἄρα τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 15.



Πρότασις Ἕκτη. Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



Ἔστω γὰρ τριγώνου τοῦ αβγ, αἱ δύο γωνίαι, αἵ τε ὑπὸ αβγ, καὶ ἡ ὑπὸ αγβ, ἴσαι· λέγω, ὅτι καὶ αἱ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι αἱ αβ, αγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· εἰ γὰρ μή, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἔσται· ἔστω παραδείγματος χάριν, ἡ αβ, μείζων τῆς αγ· καὶ κατὰ τοῦ γ'. τῇ παρὰ τὸ β, ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς αβ, ἡ δβ, ἴση τῇ αγ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ. τὰ δύο ἄρα τρίγωνα δβγ, αγβ, ἐπείπερ ἔχουσι τὰς δύο πλευ-

ρὰς

ρὰς δβ, βγ, ἴσας δυσὶ ταῖς αγ, γβ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ δβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αγβ, ἴσην, ἴσα ἀλλήλοις ἔσονται καὶ τὴν δ'. τὰ αὐτῷ. ὅπερ ἄποπον κεῖται τὸ δ'. ἀξίωμα. ἐὰν ἄρα ἐνιγώνε αἱ δύο γωνίαι κ.τ.ξ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

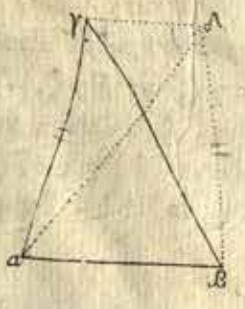
Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι παντὸς τριγώνου ἰσοπλεύρου, καὶ ἰσογωνίου ἐστί, καὶ τὸ ἰσογώνιον, ἰσόπλευρον.

Πρότασις Ἑβδόμη. Θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, οὐ συνεστήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Ἐπὶ τῆς αβ, τοίνυν εὐθείας, ἐφ' ἧς συνεστήκασιν αἱ γα, γβ. ἀδύνατον συνεστάναι ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς γα, γβ, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, πρὸς ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ἐκείναις. εἰγὰρ δυνατὸν συνεστάθωσαν αἱ δα, δβ. πρὸς ἄλλῳ σημείῳ τῷ δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐφ' ἃ καὶ αἱ γα, γβ, εἰσὶ, τὰ αὐτὰ ἔχουσαι ἐκείναις πέρατα τὰ α, καὶ β. καὶ ἔστω ἡ μὲν δα, ἴση τῇ γα, ἡ δὲ δβ, τῇ βγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γδ. καὶ ἐπεὶ κεῖται τὴν ὑπόθεσιν ἡ μὲν δα, ἴση ἐστὶ τῇ γα, ἡ δὲ δβ, τῇ γβ. παντὸς γε τὰ γαδ, γβδ, τρίγωνα ἰσοσκελῆ εἰσι, καὶ κεῖται τὸν ε'. τῶν παρόντος, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ αγδ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αδγ, ἡ δὲ ὑπὸ βδγ, τῇ ὑπὸ βγδ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αδγ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βγδ, ἡ ἴση τῇ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ αδγ. ἴση δὲ τῇ ὑπὸ αδγ, δέδεικται ἡ ὑπὸ αγδ. ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, μείζων ἐστὶ καὶ τῆς ὑπὸ αγδ, τὸ μέρος τοῦ ὅλου, ὅπερ ἄποπον κεῖται τὸ δ'. ἀξίωμα. ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἄρα εὐθείας δυσὶ καὶ τ.ξ.

Eucl. Lib. 1. Fig. 16.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι δύο τρίγωνα ἴσα, ἰσόπλευρα, ἢ ἰσοσκελῆ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως, καὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

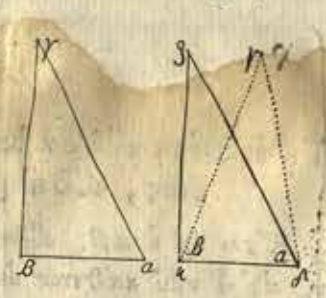
Πρό-

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Τρίγωνα γὰρ τὰ αβγ, δεζ, ἐχέτωσαν τὴν μὲν γα, πλευρὰν ἴσην τῇ ζδ. τὴν δὲ γβ, τῇ ζε, καὶ τὴν αβ, βάσιν τῇ δε, βάσει. λέγω, ὅτι καὶ αὐτὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ καὶ τὴν πρὸς τῷ γ, γωνίαν, ἴσην τῇ πρὸς τῷ ζ. καὶ ὅλον τὸ αβγ, τρίγωνον, ἰσόπλευρόν ἐστιν ὅλῳ τῷ δεζ, τριγώνῳ. ἐφαρμοζομένης γὰρ τῆς αβ, βάσεως τῷ αβγ, τριγώνου ἐπὶ τὴν δε, πεσεῖται τὸ μὲν α, πέρας ἐπὶ τὸ δ, τὸ δὲ β, ἐπὶ τὸ ε, καὶ ἐπομένως ἡ αγ, ἐφαρμοσθήσεται ἐπὶ τὴν δζ, ἴσης αὐτῇ, καὶ ἡ γβ, πλευρὰ ἐπὶ τὴν εζ. ὥστε καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία ἐφαρμοσθήσεται τῇ πρὸς τῷ ζ. εἰ γὰρ μὴ ἐφαρμοσθήσεται, ἡ μὲν πρὸς τῷ γ, πρὸς ἄλλο ἔσαι σημεῖον, ἡ δὲ πρὸς τῷ ζ, πρὸς ἄλλο, συσταθήσονται παύτως ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας αβ, ἀπὸ δε, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἀπὸ τῶν αὐτῶν σημείων τῶν α, δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι αἱ αγ, βγ, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἄτοπον καὶ ψεῦδος. ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς καὶ τὰ ἑξῆς.

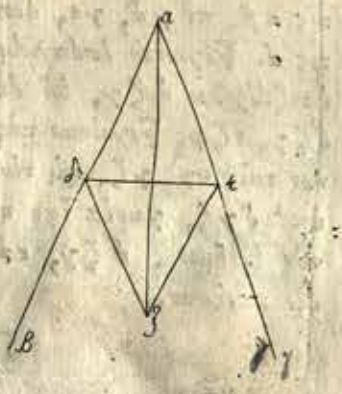
Eucl. Lib. 1. Fig. 17.



Πρότασις Θ'. Πρόβλημα.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Ἔστω οὖν δίχα τεμεῖν τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίαν, καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ δ, καὶ ἀφῃρήσθω ἴσα διαστήματα τὰ αδ, αε. ἐπιζευγνυμένης δὲ τῆς δε, εὐθείας, συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ δζε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ, καὶ διῃρήσθω δίχα ἡ ὑπὸ βαγ, δοθεῖσα γωνία. τὰ γὰρ δαζ, καὶ εαζ, τρίγωνα ἴσα εἰσὶ καὶ τὴν αὐτέρῳ, καὶ τὰς ὑπὸ τὴν ἴσων εὐθειῶν ὑποτεινομένας γωνίας ἴσας ἔχουσιν. ὥστε ἡ ὑπὸ δαζ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εαζ, διὰ τὸ καὶ τὴν δζ, ἴσην εἶναι τῇ εζ. ἡ δοθεῖσα ἄρα γωνία δίχα τέτμηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Πρότασις Γ'. Πρόβλημα.

Τῷ δοθείσῃ εὐθείᾳ πεπερασμένῃ δίχα τεμεῖν.

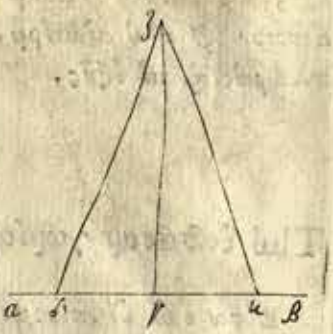
Ἔστω δὴ δίχα τεμεῖν τὴν αβ, πεπερασμένην εὐθεῖαν, καὶ συνεστάθω ἐπ' αὐτῆς ἰσόπλευρον, διὰ τῆς α. τὸ αγβ. εἶτα διαιρεθήτω ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία δίχα, διὰ τῆς αὐωτέρω, τῇ γδ, εὐθείᾳ, καὶ τμηθήσεται πώπως δίχα καὶ ἡ αβ. ἐπεὶ γὰρ τὰ αγδ, βγδ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς αγ, γδ, ἴσας δυσὶ ταῖς βγ, γδ, καὶ τὴν ὑπὸ αγδ, γωνίαν, ἴσην τῇ ὑπὸ βγδ, ἔσται καὶ βάσις ἡ αδ, βάσει τῇ βδ, καὶ τὴν δ'. ἡ δοθεῖσα ἄρα αβ, εὐθεῖα δίχα τέτμηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 18.

Πρότασις ΙΑ'. Πρόβλημα.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω δὴ ἡ αβ, εὐθεῖα, καὶ σημεῖον πρὸς αὐτῇ τὸ γ, ἀφ' οὗ τὴν κάθετον δεῖ ἀνεστάθαι. ληφθήπωσαν ἐπὶ τῆς αβ, τὰ γδ, γε, διασήματα ἴσα, καὶ συνεστάθω διὰ τῆς α. τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐπὶ τῆς δε, τὸ δζε. εἶτα ἐπεζεύχθω ἡ ζγ, λέγω κάθετον εἶναι. τῇ γὰρ δζγ, εζγ, τριγώνων τὰς δγ, γζ, πλευρὰς ἴσας ἐχόντων ταῖς εγ, γζ, καὶ τὴν ζδ, βάσιν τῇ ζε, ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ δγζ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εγζ, καὶ τὴν ἡ. ἄρα καὶ τὸν ἰ. ὅρον, ἡ ζγ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς αβ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Πρότασις ΙΒ'. Πρόβλημα.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἢ ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω δὴ ἐπὶ τὴν αβ, δοθεῖσαν εὐθεῖαν κάθετον ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ γ, σημείου, τοῦ μὴ ἐπ' αὐτῆς. εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ, εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ ε. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διασήματι δὲ τῷ γε, γεγράφθω κύκλος ὁ εζδη, δίχα δὲ τῆς δε, τμηθείσης κατὰ τὸ θ, διὰ τῆς ι. ἐπεζεύχθω ἡ γθ, καὶ αὕτη κάθετος ἔσται ἐπὶ τῆς αβ. τῇ γὰρ

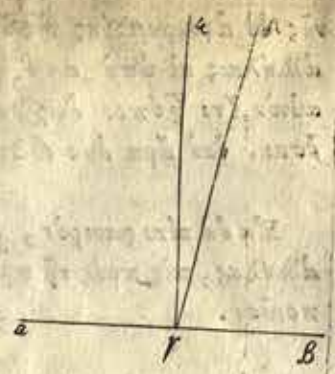
γδ,

γδ, γε, εὐθειῶν ἐπιζευγνυμένων, ἐπεὶ ἡ δθ, ἴση ἐστὶ τῇ θε, ἡ δὲ θγ, κοινή, καὶ ἡ γδ, ἴση τῇ γε, καὶ τὸν ι. ὅρον, πάντως γε τὰ δθγ, εθγ, ζύγωνα ἴσα ἐστὶ καὶ τῷ ἡ. καὶ ἡ ὑπὸ δθγ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εθγ. ὥστε ἡ γθ, κάθετός ἐστι καὶ τὸν ι. ὅρον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ὡς αὖ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει. *Eucl. Lib. 1. Fig. 19.*

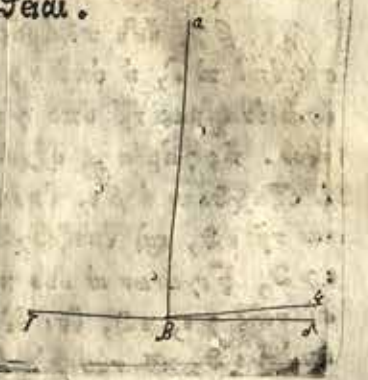
Ἐπὶ τῆς αβ, εὐθεῖά τις σταθεῖσα ἡ γδ, εἰμὲν τὰς ὑπὸ δγα, δγβ, γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσῃ, κάθετος δήπουθεν ἔσται ἐπὶ τῆς αβ, καὶ τὸν ι. ὅρον, καὶ αἱ ὑπὸ δγα, δγβ, γωνίαι ὀρθαί. εἰδὲ οὐκ ἔσται, ἀχθήτω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ γε, ἀπὸ τοῦ γ, σημείου καὶ τῷ ι. καὶ δειχθήσονται αἱ ὑπὸ δγα, δγβ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ βγδ, καὶ δγα, γωνίαι ἴσαί εἰσι τρισὶ γωνίαις τῇ ὑπὸ βγδ, δγε, εγα, ὡς περιεκτικαὶ αὐτῇ, ταῖς δὲ τρισὶ ταύταις γωνίαις ἴσαί εἰσιν διὰ τὰ αὐτὰ, καὶ αἱ ὑπὸ βγε, εγα, δύο ὀρθαί. πάντως γε καὶ τὰ ά. ἀξιώμα αἱ ὑπὸ βγδ, δγα, ἴσαί εἰσι ταῖς ὑπὸ βγε, εγα, δυσὶν ὀρθαῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ περὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ μὴ περὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι αἱ γβ, δβ, συνεχέπωσαν πρὸς τῷ β, σημείῳ, ὥστε ποιεῖν τὰς ὑπὸ αβγ, αβδ, γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, καὶ ἔσονται αὐταὶ ἐπ' εὐθείας. εἰ γὰρ μὴ, ἔστω ἡ εβ, ἐπ' εὐθείης τῇ γβ. καὶ ἐπεὶ ἐπὶ τῆς γβε, εὐθείας πέπτωκεν ἡ αβ, πάντως γε αἱ ὑπὸ γβα, αβε, γωνίαι ἴσαί εἰσι δυσὶν ὀρθαῖς καὶ τῷ ἀνωτέρω. ἦσαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ δβα, αβγ, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς καὶ τῷ ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τὸ ά. ἀξιώμα αἱ ὑπὸ γβα, αβε, ἴσαί εἰσι



ταῖς ὑπὸ γβα, αβδ. κοινῆς δὲ ἀφαιρεμένης τῆς ὑπὸ γβα, ἐγκαταλείπεται καὶ ἡ ὑπὸ αβε, ἴση τῇ ὑπὸ αβδ. ὅπερ ἄτοπον καπὰ τὸ Θ'. ἀξιώμα. ἄρα αἱ γβ, βδ, εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἀλλήλαις εἰσὶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

Τεμνέτωσαν ἤδη ἀλλήλας αἱ αβ, γδ, εὐθεῖαι κατὰ τὸ ε. λέγω, ὅτι αἱ κατὰ κορυφὴν αὐτῇ γωνίαι, αἵτε ὑπὸ αεδ, γεβ, καὶ αἱ ὑπὸ δεβ, αεγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ αἱ αεδ, δεβ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ ιγ'. εἰσὶ δὲ διὰ τῆς αὐτῆς καὶ αἱ δεβ, βεγ, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς, παντωγε αἱ ὑπὸ αεδ, δεβ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ δεβ, βεγ, κατὰ τὸ ά. ἀξίωμα. κοινῆς δὲ ἀφαιρεμένης τῆς ὑπὸ δεβ, ἐγκαταλείπεται ἴσαι ἀλλήλαις αἱ ὑπὸ αεδ, βεγ, κατὰ τὸ γ'. ἀξίωμα. τὸν αὐτὸν ἔτι τρόπον δειχθήσονται καὶ αἱ ὑπὸ δεβ, αεγ, ἴσαι. ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσι κατὰ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 1. Fig. 20.

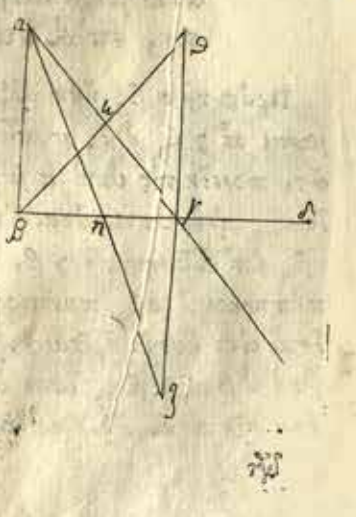
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ὁσαιδηποτοῦν εὐθεῖαι τέμνουσιν ἀλλήλας, πὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσι.

Πρότασις Ις'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί.

Τοῦ βγ, ἤδη πλευρᾶς τὸ αβγ, τριγώνου ἐκβληθείσης ἐπὶ τὸ δ, ἡ ὑπὸ αγδ, ἐκτὸς αὐτοῦ γωνία μείζων ἔσται ἑκατέρας τῶν ὑπὸ γαβ, αβγ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον. τῆς γὰρ αγ, δίχα διαιρεθείσης κατὰ τὸ ε, διὰ τῆς ι. ἐξαχθήτω ἡ βε, ἐπὶ τὸ Θ. ὥστε τὴν βε, ἴσην εἶναι τῇ εΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Θγ. καὶ ἐπεὶ τῇ εα βε, εγ Θ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ αε, εβ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς γε, εΘ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αεβ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γεΘ, κατὰ τὸ ἀπεναντίον, παντωγε καὶ ἡ αβ, βάσις ἴση ἐστὶ τῇ Θγ, βάσει κατὰ τὸ δ'. καὶ αἱ λοιπαὶ αὐ-



τῇ

τῇ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς ἴσαι εἰσιν. ἔστιν ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ εβα, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εθγ, ἡ δὲ ὑπὸ εαβ, τῇ ὑπὸ εγθ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ εγθ, ἄρα ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶ καὶ τῆς ὑπὸ εαβ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ αβγ, δίχα τῆς βγ, διαιρεθείσης κατὰ τὸ η, καὶ τῆς αη, ἐπὶ τὸ ζ, ἀχθείσης, τῆς δὲ κατασκευῆς ὡς καὶ ἀνωτέρω γινομένης. παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

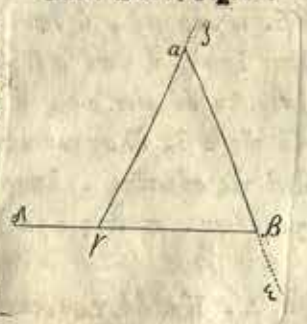
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τῆς δοθείας μὴ δυνάσθαι πλείονας δοθείας ἴσας ἄγεσθαι, ἢ δύο μόνας.

Πρότασις ΙΖ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Τετριγώνου ἤδη τοῦ αβγ, λέγω τὰς δύο γωνίας παντῃ μεταλαμβανομένας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι. εἰ γὰρ ἡ βγ, πρὸς τὸ δ, ἀχθῇ, ἔσονται αἱ ὑπὸ αγβ, αβγ, ἐλάσσονες τῶν ὑπὸ αγδ, αγβ, διὰ τὸ τριῶν μὲν ὑπὸ αγδ, μείζονα εἶναι τῆς ὑπὸ αβγ, κατὰ τριῶν ἀνωτέρω, τριῶν δὲ ὑπὸ αγβ, κοινῶν. αἱ δὲ ὑπὸ αγδ, αγβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ κατὰ τριῶν ιγ'. ἄρα αἱ ὑπὸ αγβ, αβγ, ἐλάσσονές εἰσι δύο ὀρθῶν. εἰδὴ ἡ βα, ἀχθῇ κατὰ τὸ ε, δειχθήσεται τὸν αὐτὸν τρόπον, τὰς ὑπὸ γαβ, γβα, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι. ὡσαύτως δὲ καὶ τῆς γα, κατὰ τὸ ζ, ἀχθείσης, δειχθήσεται καὶ τὰς βαγ, βγα, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι. παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 1. Fig. 21.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α'. Ἐκ τούτου δῆλον, μὴ δυνάσθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς δοθείας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο καθέτους πίπτειν.

Β'. Ἔτι παντὸς τριγώνου, εἴπερ αἱ μία τῶν γωνιῶν ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα τύχῃ, τὰς λοιπὰς ὀξείας εἶναι.

Γ'. Ἔτι ἐὰν ἐπί τινος δοθείας δοθεῖα γραθεῖσα γωνίας αὐξους ποιῇ, τριῶν παρά τινος σημείου τῆς ἐφεστηκυίας δοθείας πίπτουσαν κάθετον ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης, πρὸς τὰ τῆς ὀξείας γωνίας πίπτειν μέρη.

Δ'. Ἔτι τοῦ μὲν ἰσοπλεύρου τριγώνου πάσας τὰς γωνίας ὀξείας εἶναι, τοῦ δὲ ἰσοσκελοῦς τὰς δύο πρὸς τριῶν βάσιν.

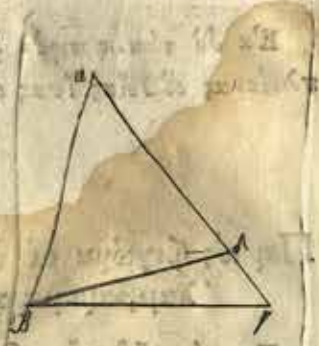
Πρό-

Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἔστω δὴ τρίγωνον τὸ αβγ, τριγώνου δὲ τοῦ αβγ πλευρὰ μείζων ἔστω ἡ αγ, τῆς αβ, λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίας τῆς ὑπὸ βγα μείζων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ αγ τῆς αβ, κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βδ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ βγδ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αδβ μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ γβδ, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ αδβ τῇ ὑπὸ αβδ, διὰ τὴν πλευρὰν τὴν αβ τῇ αδ ἴσην ὑποκειμένην· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβγ γωνία τῆς ὑπὸ αδβ, τουτέστι τῆς ὑπὸ βγα. ἡ ἄρα ὑπὸ αβγ γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βγα. ἡ ἄρα μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 22.



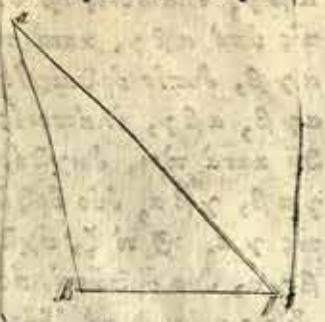
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι μὲν σκαληνοῦ τριγώνου πάσας τὰς γωνίας ἀνίσους εἶναι, τὰ δὲ ἰσοπλεύρου ἴσας.

Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἔστω δὴ τρίγωνον τὸ αβγ, τριγώνου δὲ τοῦ αβγ ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν τὴν ὑπὸ αβγ ἡ αγ πλευρὰ μείζων ἔστω τῆς ὑπὸ βγα. λέγω, ὅτι καὶ ἡ αγ, μείζων ἐστὶ τῆς αβ. εἰ γὰρ μή, ἢ ἴση ἔσται, ἢ ἐλάττων. εἶμεν δὲν ἴση, ἔσται ἴση καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία τῇ ὑπὸ αγβ, καὶ τὴν ε. ὑπετέθη δὲ μείζων, ἄπορον ἄρα. εἰδὲ ἡ αγ, ἐλάττων εἴη τῆς αβ, ἐλάττων ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, τῆς ὑπὸ αγβ, διὰ τὴν αὐωτέρω, ὅπερ πολλῷ μᾶλλον ἄπορον, ὑπετέθη γὰρ ἴση. παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα καὶ τὰ ἑξῆς.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α'. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἀπ' ἐνὸς σημείου προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐπί τινος εὐθείας, ἡ μὲν κάθετος ἐλαχίστη ἐστὶν, ἀεὶ δὲ ἡ ἀπώτερον τῆς ἐγγύτερον μείζων.

Β'. Ἔτι ἐν μὲν τοῖς ὀρθογωνίοις ἢ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα γωνίαν μείζων ἐστὶ τῶν λοιπῶν, ἐν δὲ τοῖς ἀμβλυγωνίοις ἢ τὴν ἀμβλεῖαν.

Πρότασις Κ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι παντῇ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω δὴ τρίγωνον τὸ αβγ, λέγω, ὅτι τοῦ αβγ τριγώνου αἱ αβ, αγ πλευραὶ μείζονες εἰσὶ παντῇ μεταλαμβανόμεναι, ἡ μὲν αβ τῆς αγ, ἡ δὲ αγ τῆς αβ, καὶ ἔτι ἡ βγ τῆς αβ, καὶ ἡ βγ τῆς αγ. ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ βα ἐπὶ τὸ δ, ὥστε εἶναι τὴν αδ τῇ αγ ἴσην, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γδ.

ζεύχθω ἡ δγ. Ἐπεὶ ἴση ἐστὶ τῇ αγ, πάντως γε αἱ ὑπὸ αγδ, αδγ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ έ. τῷ παρόντος. τῆς δὲ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ βγδ, ἄρα ἡ αὐτὴ βγδ, μείζων ἐστὶ καὶ τῆς αδγ. ὥστε καὶ τὸ ἀνωτέρω ἡ βδ, πλευρὰ, μείζων ἐστὶ τῆς βγ. ἀλλὰ τῇ βδ, ἴσαι εἰσὶ συναμφότεραι αἱ βα, αγ, ἄρα καὶ αἱ βα, αγ, μείζονές εἰσι τῆς βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται, καὶ τὰς βγ, γα, μείζους εἶναι τῆς αβ, τὰς δὲ αβ, βγ, τῆς αγ. τῆς κατασκευῆς ὡς δεῖ γενομένης, καὶ τὸν προειρημένον τρόπον.

Eucl. Lib. 1. Fig. 23.

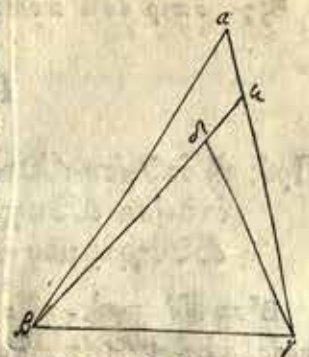
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι παντὸς τετραπλεύρου ἡ διαγώνιος διάμετρος, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἑκατέρωθεν δύο πλευρῶν.

Πρότασις ΚΑ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνσταθῶσιν, αἱ συνσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τοῦ αβγ, ἤδη τριγώνου, ἐπὶ τῆς βγ, πλευρᾶς, ἀπὸ τῶν περάτων βγ, συνεστάθωσαν δύο εὐθεῖαι ἐντὸς αἱ βδ, γδ. λέγω, ταύτας ἐλάττονας μὲν εἶναι τῶν βα, αγ, μείζονα δὲ γωνίαν τὴν ὑπὸ βδγ, περιέχειν, τῆς ὑπὸ βαγ. διήχθω γὰρ ἡ βδ, ἐπὶ τὸ ε, καὶ κατὰ τὸ ἀνωτέρω δήπεθεν αἱ βα, αε, πλευραὶ τοῦ αβε, τριγώνου μείζονές εἰσι τῆς βε, κοινοῦ δὲ τῆς εγ, προσκειμένης, αἱ βα, αγ, μείζονές εἰσι τῶν βε, εγ. ἐπεὶ δὲ καὶ τοῦ δεγ, τριγώνου αἱ δε, εγ, πλευραὶ μείζονές εἰσι τῆς δγ. κοινοῦ δὲ προσκειμένης τῆς βδ, πάντως γε αἱ γε, εβ, μείζονές εἰσι τῶν γδ, δβ. ἀλλὰ τῶν γε, εβ, μείζονες ἐδείχθησαν αἱ βα, αγ, ἄρα αἱ βα, αγ, πολλῷ μείζονές εἰσι τῶν βδ, δγ. ὅπερ ἐστὶ τὸ ά. Αὖθις τοῦ γεδ, τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δεγ, καὶ τὸ ις'. τῷ παρόντος, ἡ δὲ ὑπὸ δεγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ, καὶ τὸ αὐτὸ, ἡ βδγ, ἄρα γωνία πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ. ὅπερ ἐστὶ τὸ β'. Ἐὰν τριγώνου ἄρα ἐπὶ μιᾶς καὶ τὰ ἑξῆς.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου συνάγεται μὴ δύνασθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἀπὸ τῶν αὐτῶν περάτων, πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη δύο τρίγωνα ὅμοια συνίστασθαι.

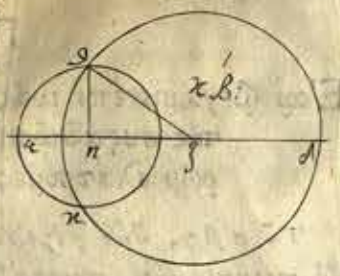
Πρό-

Πρότασις ΚΒ'. Πρόβλημα.

Ἐκ δοθέντων εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι. δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντη μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντη μεταλαμβανομένας.

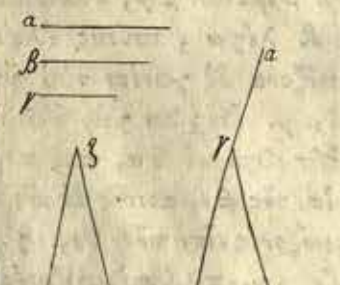
Ἐκ τριῶν δὴ εὐθειῶν ἴσων ταῖς α, β, γ, ἔστω τρίγωνον συστήσασθαι. ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ δε, καὶ ᾧ εἰς αὐτῆς τμηθήτω τῇ μὲν α, ἴση ἡ δζ, τῇ δὲ β, ἡ ζη, καὶ τῇ γ, ἡ ηε. καὶ κέντροις μὲν τοῖς ζ, η, διαστήμασι δὲ τοῖς ζδ, ηε, κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ δθκ, εθκ, τεμνόμενοι κατὰ τὸ θ, καὶ κ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θζ, θη. λέγω δὴ τὸ ζθη, τρίγωνον τὰς πλευρὰς εἶναι ἴσας ταῖς α, β, γ, δοθείσαις. ἡ γὰρ ζθ, ἴση ἐστὶ τῇ ζδ, κατὰ τὸν ιέ. ὅρον. κατὰ δὲ τὸ ά. αἴτημα καὶ τῇ α. ὡσαύτως δὴ ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ ηε, κατὰ τὸν αὐτὸν ὅρον. ἡ δὲ ηε, ἐλήφται ἴση τῇ γ, ἄρα κατὰ τὸ ρηθὲν ἀξίωμα, ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ γ. γέγονε δὲ καὶ ἡ ζη, ἴση τῇ β, ἄρα τὸ ζθη, τρίγωνον αἱ πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ ταῖς α, β, γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Encl. Lib. 1. Fig. 24.



Πρότασις ΚΓ'. Πρόβλημα.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.



Ἔστω δὴ πρὸς τῇ αβ, δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ γ, πρὸς αὐτῇ σημείῳ, γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι, ἴσην τῇ ὑπὸ εζδ, δοθείσῃ. λήφθήτωσαν πάντη τὰ ζε, ζδ, διαστήματα, ὡς ἔτυχε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εδ. εἶτα συνεστάθω διὰ τῆς ἀνωτέρω ἐπὶ τῆς αβ, εὐθείας πρὸς τῷ γ, σημείῳ τρίγωνον, ἐκ τριῶν πλευρῶν ἴσων ταῖς δε, εζ, ζδ, τὸ γηθ. ὥστε τὴν μὲν γη, ἴσην εἶναι τῇ ζε, τὴν δὲ γθ, τῇ ζδ, καὶ τὴν ηθ, τῇ εδ. Ἐπεὶ οὖν τὰ εζδ, καὶ ηγθ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς εζ, ζδ, ἴσας, δυσὶ ταῖς ηγ, γθ, καὶ τὴν εδ, βάσιν, βάσει τῇ ηθ, ἴσην, ἔξουσι πάντως γε καὶ τὴν ᾱ. καὶ τὴν ὑπὸ εζδ, γωνίαν, ἴσην τῇ ὑπὸ ηγθ. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

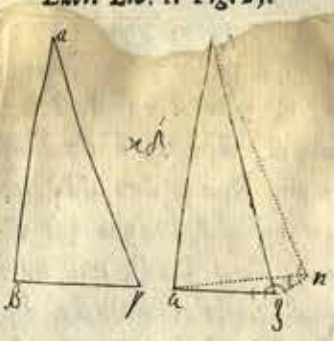
Ηρό-

Πρότασις ΚΔ'. Θεώρημα.

Ε'ὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

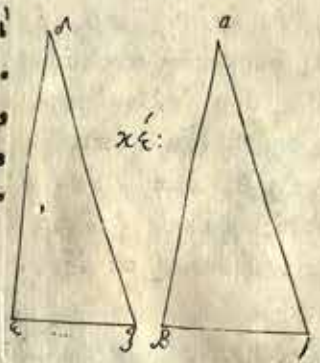
Τριγώνων ἤδη τῶν αβγ, δεζ, ἐχόντων τὰς δύο πλευρὰς αβ, αγ, ἴσας ταῖς δυσὶ πλευραῖς δε, δζ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, καὶ τῆς ὑπὸ βαγ, γωνίας μείζονος ἔστω τῆς ὑπὸ εδζ. λέγω καὶ τὴν βγ, βάσιν, μείζονα εἶναι τῆς εζ, βάσεως. κατασκευασθήτω γὰρ τοίνυν τὸ εδη, τρίγωνον ἴσον τῷ βαγ, καὶ τὴν κβ'. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζη. καὶ ἐπεὶ ἡ δη, ἴση γέγονε τῇ αγ, ἡ δὲ καὶ ἡ δζ, ἴση τῇ αὐτῇ αγ. παίτως γε αἱ δη, δζ, ἴσαι εἰσὶ καὶ τὸ α'. ἀξιώμα. καὶ ἡ ὑπὸ δηζ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ δζη, καὶ τὴν ε'. ἡ δὲ ὑπὸ δηζ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζηε, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δζη, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζηε. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ δζη, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ εζη, ἄρα ἡ ὑπὸ εζη, πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζηε. ὥστε καὶ τὴν ι Θ'. ἡ εη, ὑποτείνουσα, μείζων ἐστὶ τῆς εζ, ἡδὲ εη, ἴση ἐστὶ τῇ βγ, ἄρα καὶ ἡ βγ, μείζων ἐστὶ τῆς εζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 25.



Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

Ε'ὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



Ε'χέτωσαν ἤδη τὰ αβγ, εδζ, τρίγωνα πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ἴσας, πλευραῖς ταῖς δε, εζ, ἤδὲ βγ, βάσις μείζων ἔστω τῆς εζ, βάσεως. λέγω καὶ τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ὑπὸ εδζ. εἰ γὰρ μὴ, ἢ ἴση ἔσται, ἢ γὰν ἐλάττων. εἰ μὲν οὖν ἴση ὑπετέθη ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ εδζ, ἴση ἔσται καὶ ἡ βγ, βάσις τῇ εζ, βάσει, καὶ τὴν δ'. ὅπερ ἄτοπον, ὑπετέθη γὰρ καὶ μείζων. εἰδὲ ἡ ὑπὸ βαγ, ὑποτεθῇ ἐλάττων τῆς ὑπὸ εδζ. ἐλάττων ἔσται καὶ ἡ βγ, βάσις τῆς εζ, βάσεως, καὶ τὴν ἀνωτέρω. ὃ πολλῷ μᾶλλον ἄτοπον. ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κς'. Θεώρημα.

Ε'αμ δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ε'στωσαν δὴ τῶν αβγ, δεζ, τριγώνων αἱ ὑπὸ αβγ, αγβ, γωνίαι ἴσαι ταῖς ὑπὸ δεζ, δζε, καὶ μία πλευρὰ μιᾷ πλευρᾷ ἴση, πρότερον ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις πλευρὰ, ἡ βγ, ἴση τῇ εζ. λέγω ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἥ τε αβ τῇ δε, καὶ ἡ αγ τῇ δζ, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ πρὸς τῷ α τῇ πρὸς τῷ δ ἴση ἔσται. εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ αβ τῇ δε, μία αὐτῶν μείζων ἔσται. ἔστω μείζων ἡ αβ, καὶ κείσθω τῇ δε ἴση ἡ βη, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηγ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ βη τῇ δε, ἴση δὲ καὶ ἡ βγ τῇ εζ, δύο δὴ αἱ ηβ, βγ δυσὶ ταῖς δε, εζ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ηβγ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ηγ βάσει τῇ δζ ἴση ἔσται, καὶ τὸ ηβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' αἷς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηγβ γωνία τῇ ὑπὸ δζε γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ δζε τῇ ὑπὸ αγβ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ αγβ ἄρα τῇ ὑπὸ ηγβ ἐστὶν ἴση, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ αβ τῇ δε· ἴση ἄρα. ἀλλὰ καὶ ἡ βγ τῇ εζ ἴση ἐστίν· δύο δὴ αἱ αβ, βγ δυσὶ ταῖς δε, εζ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ ἴση· βάσις ἄρα ἡ αγ βάσει τῇ δζ ἴση ἔσται, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ ἴση ἔσται.

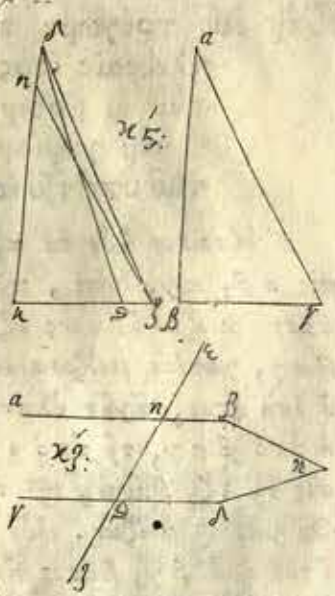
Εἰ δὲ αἱ πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, οἷον ἡ αβ τῇ δε, καὶ ἔστω πάλιν ἡ αβ τῇ δε ἴση· λέγω πάλιν ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἥ τε αγ τῇ δζ, καὶ ἡ βγ τῇ εζ, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ αγβ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δζε ἴση ἔσται. εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ αβ τῇ δε, μία αὐτῶν μείζων ἔσται. ἔστω μείζων ἡ αβ, καὶ κείσθω τῇ δε ἴση ἡ βθ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θγ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ βθ τῇ δε, ἴση δὲ καὶ ἡ βγ τῇ εζ, δύο δὴ αἱ θβ, βγ δυσὶ ταῖς δε, εζ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ θβγ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ ἴση· βάσις ἄρα ἡ θγ βάσει τῇ δζ ἴση ἔσται, καὶ τὸ θβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' αἷς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ θγβ γωνία τῇ ὑπὸ δζε γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ δζε τῇ ὑπὸ αγβ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ αγβ ἄρα τῇ ὑπὸ θγβ ἐστὶν ἴση, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ αβ τῇ δε· ἴση ἄρα. ἀλλὰ καὶ ἡ βγ τῇ εζ ἴση ἐστίν· δύο δὴ αἱ αβ, βγ δυσὶ ταῖς δε, εζ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ ἴση· βάσις ἄρα ἡ αγ βάσει τῇ δζ ἴση ἔσται, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ ἴση ἔσται.

Πρότασις ΚΖ'. Θεώρημα.

Ε'αμ εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς δύο γὰρ εὐθείας τὰς αβ, γδ, ἐμπίπτουσα ἡ εζ, ποιείτω τὰς ἐναλλὰξ γωνίας, τὴν μὲν ὑπὸ αηθ, τὴν δὲ ὑπὸ ηθγ, ἴσας ἀλλήλαις· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αβ τῇ γδ. εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ αβ, γδ συμπεσοῦνται ἢ ἐπὶ τὰ β, δ, μέρη ἢ ἐπὶ τὰ α, γ. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ β, δ, μέρη κατὰ τὸ κ. τριγώνου δὴ τοῦ κηθ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αηθ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ηθκ· καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ὑπὸ αηθ τῇ ὑπὸ ηθγ· καὶ ἡ ὑπὸ ηθγ ἄρα τῇ ὑπὸ ηθκ ἐστὶν ἴση, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα συμπεσοῦνται αἱ αβ, γδ ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ β, δ, μέρη. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ α, γ· αἱ δὲ μηδαμοῦ συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ τῇ γδ.

Εucl. Lib. 1. Fig. 26.

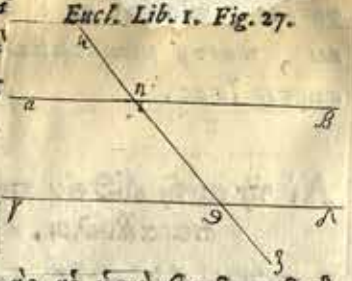


πιπτέτωσαν καὶ τὸ κ. καὶ ἐπεὶ τοῦ ηκΘ, τετράγωνε ἡ κΘ, πλευρὰ ἐκβέβληται ἐπὶ τὸ γ, πάντως γε ἡ ὑπὸ γΘη, γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βηΘ, καὶ τῶν ιϛ'. ὑπετέθη δὲ καὶ ἴση, ἄτοπον ἄρα. ὥστε αἱ αβ, γδ, παράλληλοί εἰσι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐ συμπίπτουσιν. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΗ'. Θεώρημα.

Ε'αν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς μοιρίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς δύο ἤδη εὐθείας τὰς αβ, γδ, πίπτουσά τις εζ, ποιείτω τὴν ὑπὸ εηβ, ἐκτὸς γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ηΘδ, ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. λέγω τὰς αβ, γδ, εὐθείας παραλλήλους εἶναι. ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ εηβ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηΘδ, τῇ δὲ ὑπὸ εηβ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ αηΘ, καὶ τὴν ιε'. πάντως γε αἱ ὑπὸ αηΘ, ηΘδ, ἐσὶν ἴσαι, ἀλλὰ καὶ ἐναλλάξ. ἄρα καὶ τὴν ἀνωτέρω αἱ αβ, γδ, παράλληλοί εἰσι.



Ποιείτω ἔτι ἡ εζ, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, τὰς ὑπὸ βηΘ, ηΘδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. λέγω τὰς αβ, γδ, εὐθείας παραλλήλους εἶναι. ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ βηΘ, ηΘδ, δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι καὶ τὴν ὑπόθεσιν, εἰσὶ δὲ ὁμοίως καὶ αἱ βηΘ, Θηα, δυσὶν ὀρθαῖς εἶσαι καὶ τὴν ι γ'. πάντως γε αἱ βηΘ, ηΘδ, ἴσαί εἰσι ταῖς βηΘ, Θηα. κοινῆς δὲ ἀφαιρεμένης τῆς βηΘ, ἐγκαταλείπονται ἴσαι αἱ ηΘδ, Θηα, καὶ εἰσιν ἐναλλάξ. αἱ αβ, γδ, ἄρα εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν καὶ τὴν ἀνωτέρω. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΘ'. Θεώρημα.

Η' εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ.

Εἰς παραλλήλους ἤδη τὰς αβ, γδ, εὐθεῖα πιπτέτω ἡ εζ. λέγω, πρῶτον τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ αηΘ, ηΘδ, ἴσας εἶναι. εἰ γὰρ μή, ἔσω ἡ ὑπὸ ηΘδ, ἐλάττων τῆς ὑπὸ αηΘ, καὶ κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ βηΘ. καὶ ἔσονται πάντως αἱ ὑπὸ αηΘ, βηΘ, μείζονες τῶν ὑπὸ βηΘ, ηΘδ. ἀλλ' αἱ ὑπὸ βηΘ, αηΘ, ἴσαί εἰσι δυσὶν ὀρθαῖς καὶ τὴν ι γ'. ἄρα αἱ ὑπὸ βηΘ, ηΘδ, ἐλάττονές εἰσι δύο

ὀρθῶν ; καὶ ἐπομένως ἐκβαλλόμεναι καὶ τὰ β, καὶ δ, μέρη , συμπεσοῦνται , καὶ τὸ ια'. ἀξίωμα . ὅπερ ἄτοπον . ὑποτίθενται γὰρ καὶ παράλληλοι. ἄρα αἱ ὑπὸ αηθ, ηθδ, γωνίαι ἴσαι εἰσι. λέγω δὴ ὅτι , τῇ ἐκτὸς , τῇ ὑπὸ εηβ, ἴσην εἶναι τὴν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον , καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ηθδ. ἡ γὰρ ὑπὸ εηβ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αηθ, καὶ τὴν ια'. τῇ δὲ αηθ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ηθδ, ὥστε καὶ τὸ α', ἀξίωμα , ἡ ὑπὸ εηβ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηθδ. λέγω τοίνυν , καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ βηθ, ηθδ, ἴσας εἶναι δυσὶν ὀρθαῖς. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ εηβ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηθδ, κοινῆς προσκειμένης τῆς ὑπὸ βηθ, ἔσονται πάντως καὶ τὸ β'. ἀξιώμα , αἱ ὑπὸ εηβ, βηθ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ βηθ, ηθδ, ἀλλ' αἱ ὑπὸ εηβ, βηθ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς . ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ βηθ, ηθδ, δυσὶν ὀρθαῖς ὁμοίως εἶσαι εἰσιν . ἡ εἰς τὰς παραλλήλους ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 1. Fig. 28.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον , παντὸς παραλληλογράμμου τὰς δύο γωνίας , τὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι , πάντῃ μεταλαμβανομένας , καὶ τὰς τέσσαρας τέσσαρσιν ἴσας.

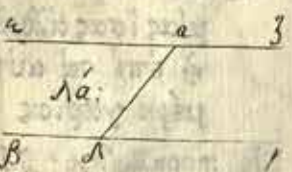
Πρότασις Λ'. Θεώρημα.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Εὐθεῖα γὰρ ἥδη τὴν εζ, ἔστωσαν παράλληλοι αἱ αβ, γδ, λέγω ὅτι καὶ ἀλλήλαις παράλληλοί εἰσιν αἱ αβ, γδ. ἐμπιπτούσης γὰρ εἰς αὐτὰς τῆς ηθκ, ἔσονται αἱ ὑπὸ αηθ, ηθζ, γωνίαι, καὶ τῇ ἐντὸς ὑπὸ ηθζ, ἴση τῇ ἐντὸς ὑπὸ θκδ. ὥστε καὶ τὸ α'. ἀξίωμα καὶ αἱ ὑπὸ αηθ, ηκδ, ἴσαι εἰσὶν , ἀλλὰ καὶ ἐναλλάξ , ἄρα καὶ τῇ κζ'. αἱ αβ, γδ, παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον , ὅτι ἐπὶ παντὸς παραλληλογράμμου καὶ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀχθεῖσα παράλληλος καὶ τὴν ἑτέρᾳ παράλληλος ἔσται.



Πρότασις ΛΑ'. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἀπὸ σημείου ἥδη τοῦ α, εὐθεῖα τῆς βγ, ἔστω εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Ἀχθέτω τοίνυν ὡς ἔτυχεν ἡ αδ, καὶ γωνιάσθω, καὶ τῇ κγ'. τῇ ὑπὸ αδγ, γωνίᾳ

ἴση

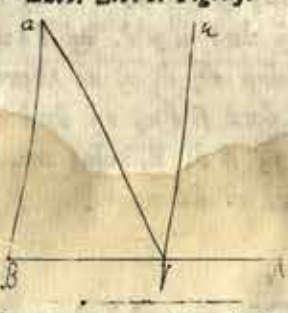
ἴση ἡ ὑπὸ δαε. καὶ διὰ τῆς α, καὶ ε, σημείων διήχθω ἡ εζ, λέγω παύτῳ παράλληλον εἶναι τῇ βγ. ἐπεὶ γὰρ ἐπὶ τῆς εζ, βγ, δύο εὐθειῶν πεσοῦσα ἡ αδ, πεποίηκε τὰς ἐναλλὰξ ἴσας κατὰ τὸ κζ'. παύπως γε αἱ εζ, βγ, παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΒ'. Θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῆς πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

Τετριγώνου γὰρ τοῦ αβγ, ἐκβεβλήθω ἡ βγ, πλευρὰ ἐπὶ τὸ δ. λέγω τὴν ὑπὸ αγδ, ἐκτὸς γωνίαν ἴσην εἶναι δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, ταῖς ὑπὸ βαγ, αβγ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ γ, παράλληλος τῇ αβ, ἡ γε. καὶ ἐπεὶ εἰς τὰς αβ, γε, παράλληλους ἐνέπεσεν ἡ αγ. παύπως γε αἱ ὑπὸ αγε, γαβ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ κθ'. Ἐπεὶ δ' αὖθις εἰς τὰς αὐτὰς παραλλήλους ἐνέπεσε καὶ ἡ βγ. δῆλον, ὅτι αἱ ὑπὸ εγδ, αβγ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ αὐτό. αἱ δύο ἄρα γωνίαι, αἱ ὑπὸ αγε, εγδ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ γαβ, εβγ. ἀλλ' αἱ αγε, εγδ, ἴσαι εἰσὶ τῇ ὑπὸ αγδ, ἐκτός. ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αγδ, ἐκτὸς ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ γαβ, αβγ. ὅπερ πρῶτον ἐδείχθη. Λέγω δ' ἔτι, καὶ αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου πλευραὶ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αγδ, ἴση δέδεικται ταῖς ὑπὸ γαβ, αβγ, κοινῆς προσκειμένης τῆς ὑπὸ αγβ, ἔσονται αἱ ὑπὸ αγδ, αγβ, ἴσαι ταῖς τρισὶ τοῦ τριγώνου τούτου γωνίαις, ταῖς ὑπὸ γαβ, αβγ, βγα. ἀλλ' αἱ αγδ, αγβ, ἴσαί εἰσι δυσὶν ὀρθαῖς, κατὰ τὸ ιγ'. ἄρα καὶ τὸ α. ἀξιώμα, καὶ αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαί εἰσιν. ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

Eucl. Lib. 1. Fig. 29.



ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ.

Α'. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τῆς μὲν ὀρθογωνίου ἑκατέρα τῶν λοιπῶν ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, τῆς δὲ ἀμβλυγωνίου, ἐλάττων ἡμισείας ὀρθῆς, καὶ τῆς ὀξυγωνίου μείζων.

Β'. Ἔτι τῆς ἰσοπλεύρου ἑκάστη τῶν γωνιῶν δύο τρίτα μέρη περιέχει τῆς ὀρθῆς.

Γ'. Ἔτι παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ὁμοῦ ἴσαι εἰσὶ ταῖς οἱασδήποτε τριγώνου δυσὶ γωνίαις ὁμοῦ λαμβανομέναις.

Δ'. Ἔτι παντὸς τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαί εἰσιν.

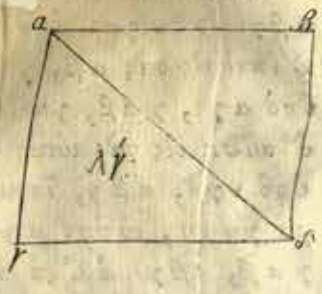
Πρό-

Πρότασις ΛΓ'. Θεώρημα.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, ἴσαί τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Αἱ αγ, βδ, ἤδη εὐθεῖαι ἐπιζευγνύουσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς αβ, γδ, ἴσας τε καὶ παραλλήλους εὐθείας. λέγω καὶ τὰς αγ, βδ, ἴσας τε καὶ παραλλήλους εἶναι. ἤχθω γὰρ ἡ αδ, διαγώνιος· καὶ ἐπεὶ τῶν αβδ, δγα, ξιγώνων αἱ βα, αδ, πλευραὶ ἴσαί εἰσι ταῖς γδ, δα, καὶ ἡ ὑπὸ βαδ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γδα, παντὸς γε καὶ τοῦ κϑ'. καὶ βάσις ἡ αγ, ἴση ἐστὶ βάσει τῇ βδ· ὅπερ ἦν τὸ α. Αὖθις ἐπεὶ τῶν αβδ, αγδ, αἱ δύο πλευραὶ αβ, βδ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς δγ, γα, καὶ βάσις ἡ αδ, κοινή· παντὸς γε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβδ, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αγδ. καὶ ὅλον τὸ ξίγωνον αβδ, ὅλῳ τῷ ξιγώνῳ αγδ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς· τουτέστιν ἡ ὑπὸ βδα, τῇ ὑπὸ γαδ, καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ· ἄρα αἱ αγ, βδ, εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσι, καὶ τοῦτο κζ'. ὅπερ ἐστὶ τὸ δεύτερον.

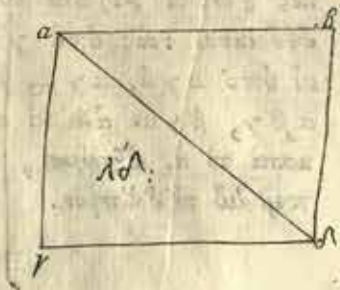
Eucl. Lib. 1. Fig. 30.



Πρότασις ΛΔ'. Θεώρημα.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω δὴ παραλληλόγραμμον τὸ αβγδ, λέγω ὅτι τοῦ αβγδ ἀπεναντίον πλευρὰς, τὰς αβ, γδ, αγ, βδ, ἴσας εἶναι, καὶ τὰς γωνίας ἔτι τὰς ὑπὸ αβδ, αγδ, καὶ τὰς ὑπὸ γαβ, βδγ, ἴσας ὁμοίως ἀλλήλαις εἶναι· τὴν δὲ αδ, διάμετρον δίχα αὐτὸ τέμνειν, τουτέστι τὰ αβδ, αγδ, ξίγωνα ἴσα εἶναι. ἐπεὶ γὰρ αἱ αβ, γδ, παράλληλοί εἰσι, καὶ εἰς αὐτὰς πέπτωκεν ἡ αδ, παντὸς γε καὶ τοῦ κϑ'. αἱ ὑπὸ βαδ, καὶ γδα, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὡσαύτως καὶ τοῦ αὐτοῦ καὶ αἱ ὑπὸ βδα, γαδ, γωνίαι ἴσαί εἰσιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰ κοινὴ, ἄρα καὶ τοῦ κς'. καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαί εἰσι, τουτέστιν ἡ αβ, τῇ γδ, καὶ ἡ αγ, τῇ βδ, καὶ ἔτι τὸ α. Ἔστι δ' ἔτι καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ αβδ, λοιπὴ τῇ ὑπὸ αγδ, ἴση, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ βαδ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γδα, ἡ δὲ ὑπὸ βδα, τῇ ὑπὸ γαδ, ἄρα καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ βδγ, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ βαγ, καὶ τοῦτό ἐστι τὸ β'. Ἐπεὶ δὲ τῶν αβδ, αγδ, ξιγώνων αἱ δύο πλευραὶ αβ, βδ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς αγ, γδ, καὶ βάσις ἡ αδ, κοινὴ, παντὸς γε καὶ ὅλον τὸ ξίγωνον αβδ, ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ξιγώνῳ αγδ. καὶ τοῦ κη. καὶ τοῦτό ἐστι τὸ γ'.



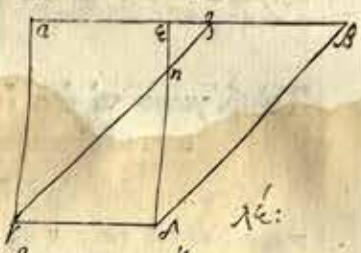
Προ-

Πρότασις ΛΕ'. Θεώρημα.

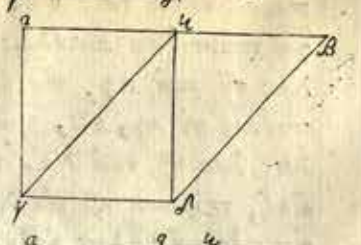
Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστωσαν ἤδη ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς γδ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αβ, γδ, τὰ αδ, ζδ, παραλληλόγραμμα. λέγω ταῦτα ἴσα εἶναι. ἐπεὶ δὲ ταὐτὶ ζχῶς συμβλῶαι δύναται. Πιπτέτω πρῶτον ἡ γζ, ἐκτὸς τῆ ε. ἐπεὶ ἔν αἱ αε, ζβ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, διὰ τὸ ἴσλω εἶναι ἑκατέραν τῇ γδ, κατὰ τλω αὠτέρω· κοινῆς προσκειμένης τῆς εζ, ἔσαι παύπως ἡ αζ, ἴση τῇ εβ, κατὰ τὸ β'. ἀξίωμα. ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν αγ, δύθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ εδ, κατὰ τλω αὠτέρω, ἡ δὲ ὑπὸ εαγ, γωνία τῇ ὑπὸ βεδ, κατὰ τλω κθ'. ἄρα καὶ βάσις ἡ γζ, βάσει τῇ δβ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αγζ, ζίγωνον τῆς εδβ. κοινὸ δὲ ἀφηρημένω τὸ εηζ, ζιγώνω, ἐγκαταλείπεται τὸ αγηε, ζαπέζιον, ἴσον τῆς ζηδβ, ζαπεζίῳ κατὰ τὸ γ'. ἀξίωμα. προσκειμένω δὲ κοινὸ τὸ γδη, ζιγώνω, ἔσαι τὸ αδ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῆς ζδ.

Eucl. Lib. 1. Fig. 31.



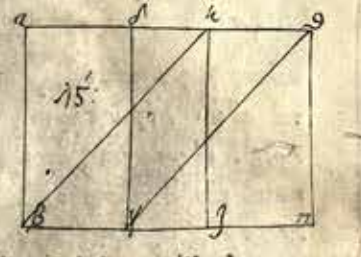
Ὑποκείσθω β'. πάλιν γε, δύθεῖαν ἐπὶ τὸ ε. πίπτειν τῆ γὴν εαγ, βεδ, τειγώνων ἴσων δειχθεώντων, ὡς καὶ πρότερον, καὶ τὸ γεδ, κοινὸ προσκειμένου· ἔσαι τὸ αδ, παραλληλόγραμον ἴσον τῆ γβ. Ὑποκείσθω τείτον τλω γζ, μεταξὺ τῆ α, καὶ ε, πεσεῖν σημείων· τῆ ἔν ζαγ, βεδ, τειγώνων ἴσων ὁμοίως δειχθεώντων, καὶ τὸ εζγδ, ζαπεζίω κοινὸ προσκειμένω, ἔσαι τὸ αδ, παραλληλόγραμον ἴσον τῆ ζδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις Λς'. Θεώρημα.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστωσαν δὴ παραλληλόγραμμα τὰ αγ, εη, ἐπὶ ἴσων μὲν βάσεων τῆ βγ, ζη, ἐνταῖς δὲ αὐταῖς δὲ παραλλήλοις ταῖς αθ, βη. λέγω, ὅτι ταὐτὰ ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. Ἀχθήπωσαν γὰρ αἱ βε, γθ, καὶ ἐπεὶ ἡ βγ, ἴση ὑπετέθη τῇ δὲ ζη, τῇ δὲ ζη, ἴση ἐστὶν ἡ εθ, καὶ τλω λδ'. παύπως γε καὶ τὸ α, ἀξίωμα ἡ βγ, ἴση ἐστὶ τῇ εθ, ἔστι δὲ καὶ παράλληλος, ἄρα καὶ αἱ βε, γθ, δύθεῖαι ἴσαί τέ εἰσι καὶ παράλληλοι, καὶ τλω λγ'. ὥστε τὸ βθ, παραλληλόγραμμόν ἐστιν. Ἐπεὶ δὲ διὰ τῆς ἀνωτέρω ἑκάτερον τῶν αγ, εη, ἴσον δέδεικται τῆ εβγθ, παραλληλογράμμῳ, παύπως γε καὶ



καὶ τὸ α'. ἀξίωμα τὰ αγ, εη, παραλληλόγραμμα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

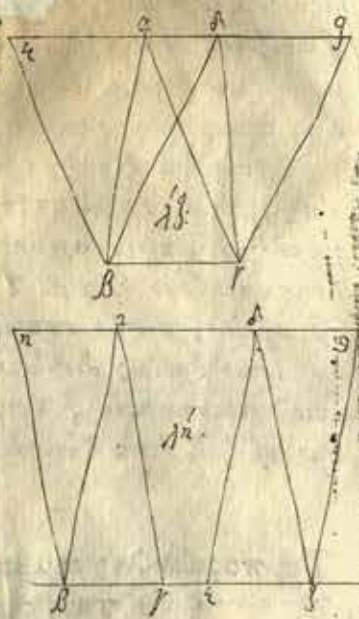
Πρότασις ΛΖ' Θεώρημα.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστωσαν ἤδη τρίγωνα τὰ αβγ, δβγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς εζ, βγ· λέγω ταῦτα, ἴσα ἀλλήλοις εἶναι. Ἀχθείσης γὰρ τῆς βε, παραλλήλως τῇ αγ, καὶ τῆς γζ, τῇ βδ, ἔσονται τὰ εγ, βζ, παραλληλόγραμμα, καὶ ἴσα ἀλλήλοις· κατὰ τὸ λε'. τὰ ἥμισυ δὲ τῶν ἐστὶ τὸ αβγ, δβγ, τρίγωνα, καὶ τὸ λδ'. ἄρα καὶ τὸ ζ'. ἀξίωμα τὰ αβγ, δβγ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Eucl. Lib. 1. Fig. 32.

Πρότασις ΛΗ'. Θεώρημα.

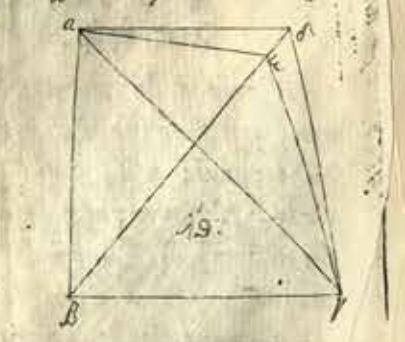
Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν παραλλήλοις ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Ἐστωσαν ἤδη ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν βγ, εζ, καὶ ἐν παραλλήλοις ταῖς ηθ, βζ, τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ· λέγω ταῦτα ἴσα ἀλλήλοις εἶναι. Ἀχθείσης γὰρ παραλλήλως τῇ μὲν αγ, τῆς βη, τῇ δὲ εδ, τῆς ζθ. ἔσονται παντὸς τὰ ηγ, εθ, χωρία παραλληλόγραμμα, καὶ ἀλλήλοις ἴσα καὶ τῷ λε'. τῶν δὲ τὰ ἥμισυ ἐστὶ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα καὶ τὸν λδ'. ἄρα καὶ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΘ'. Θεώρημα.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.



Ἐστωσαν δὴ ἴσα τρίγωνα τὰ αβγ, δβγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βγ, βάσεως, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δὸς εἰπεῖν, τὰ αὖω· λέγω ταῦτα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἶναι παραλλήλοις. εἰ γὰρ μή, ἐπεζεύχθω ἡ αδ, καὶ ἐπεὶ αἱ αδ, βγ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν οὐκ εἰσὶ παράλληλοι, ἔσω παράλληλος τῇ βγ, ἡ αε. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ. Ἐπεὶ οὖν τὰ αβγ, εβγ, τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσι βάσεως τῆς βγ, καὶ παραλλήλοις ταῖς αε, βγ. παντὸς γε καὶ τῷ λζ'. ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν· ὑπετέθη δὲ καὶ τὸ αβγ, τρίγωνον ἴσον τῷ αβγ. ἄρα καὶ τὸ α'. ἀξίωμα, τὸ δβγ, ἴσον

ἐστι

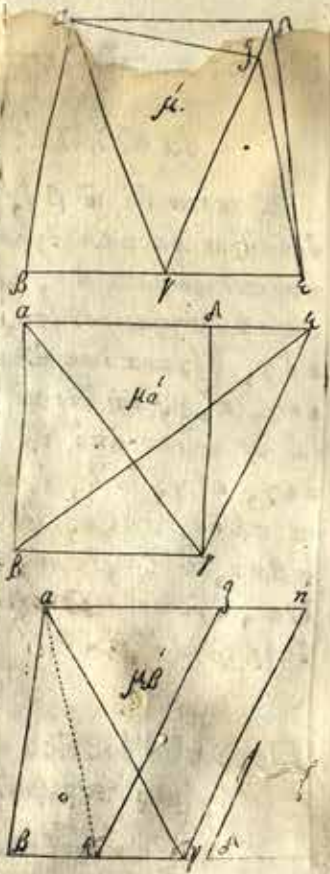
ἐστι τῷ εβγ, ἀλλὰ καὶ περιέχει αὐτό, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ αε, παράλληλός ἐστι τῇ βγ, ἀλλ' ἡ αδ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Μ'. Θεώρημα.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐστωσαν δὴ τρίγωνα τὰ αβγ, δγε, ἴσα, ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν βγ, γε. Λέγω πρῶτον καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἶναι παραλλήλοις ταῖς βε, αδ. εἰ γὰρ μή, ἔστω παράλληλος τῇ βε, ἡ αζ, καὶ ἐπεὶ τὸ αβγ, ζγε, τρίγωνα ἐπὶ ἴσων βάσεών εἰσι, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βε, αζ, πάντως γε καὶ τῷ λή. ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὑπέκειτο δὲ καὶ τὸ δγε, ἴσον τῷ αβγ, ἄρα καὶ τὸ αδγε, ἀξίωμα, τὸ δγε, ἴσόν ἐστι τῷ ζγε, ἀλλὰ καὶ ὑπερέχει, ἄτοπον ἄρα τῷ αζ, παράλληλον εἶναι τῇ βε· οὐκ ἄρα ἡ αδ, παράλληλός ἐστι τῇ βε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 33.



Πρότασις ΜΑ'. Θεώρημα.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Ἐχέτω δὴ παραλληλόγραμμον τὸ αγ, τὴν αὐτὴν βάσιν τῷ βγε, τριγώνῳ τῷ βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἔστω παραλλήλοις ταῖς βγ, αε. Λέγω τὸ αγ, παραλληλόγραμμον διπλάσιον εἶναι τοῦ βγε, τριγώνου. τῆς γὰρ αγ, ἀχθείσης, ἔσται πάντως τὸ αγ, παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ αβγ, τριγώνου καὶ τῷ λδ'. ἀλλὰ τῷ αβγ, τριγώνῳ ἴσόν ἐστι τὸ βγε, τρίγωνον καὶ τῷ λζ'. ἄρα τὸ αγ, παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι καὶ τοῦ βγε, τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

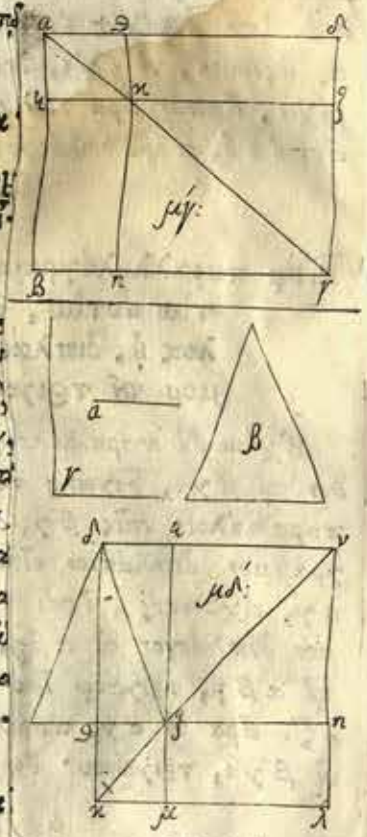
Πρότασις ΜΒ'. Θεώρημα.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω δὴ τρίγωνον τὸ αβγ· ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ πρὸς τῷ δ· καὶ ζητήσω συστήσασθαι παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι αβγ, τριγώνῳ, ἔχον μίαν πρὸς τῷ δ, γωνίαν. τετμήσθω πολλαπλασία ἡ βγ, βάσις τοῦ αβγ, τριγώνου δίχα κατὰ τὸ ε, διὰ

τῆς ι'. καὶ πρὸς τῇ ε, σημείῳ συνεστάθω ἡ ὑπὸ γεζ, γωνία ἴση τῇ πρὸς τῇ δ, καὶ τοῦ κγ'. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ α, σημείου ἤχθω παράλληλος τῇ βγ, ἡ αη. ἀπὸ δὲ τοῦ γ, ἤχθω ὁμοίως παράλληλος τῇ εζ, ἡ γη. καὶ ἐκβεβλήχθω ἡ αε. Λέγω δὴ τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον ἴσον εἶναι τῷ αβγ, τριγώνῳ ἐν τῇ δ, δοθείσῃ γωνίᾳ. τὰ γὰρ αβε, αεγ, τρίγωνα ἴσα ἐστὶ καὶ τοῦ λη'. ὥστε τὸ διπλάσιον ἐστὶ τοῦ αβγ, τριγώνου, ἅπερ τὸ ὅλον αβγ, τοῦ αὐτοῦ αεγ, διπλάσιόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ αὐτοῦ αεγ, καὶ τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον ἴσόν ἐστι τῷ αβγ, τριγώνῳ καὶ τὸ ς'. ἀξίωμα. ἔχει δὲ τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ὑπὸ ζεγ, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῇ δ, δοθείσῃ. τῷ δοθέντι ἄρα αβγ, τριγώνῳ συνέστηται ἴσον τὸ εζηγ, παραλληλόγραμμον ἐν τῇ πρὸς τῇ δ, δοθείσῃ γωνίᾳ. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 1. Fig. 44.



Πρότασις ΜΓ'. Θεώρημα

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τοῦ διαμέτρου παραλληλογραμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστωσαν δὴ τοῦ βδ, παραλληλογράμμου περὶ τοῦ αγ, διάμετρον παραλληλόγραμμα τὰ ζη, θε, λέγω τὰ τόπωι παραπληρώματα βκ, κδ, ἴσα εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ τὸ βδ, παραλληλόγραμμόν ἐστι, παντὸς γε καὶ τῶν λδ'. τὰ αβγ, αδγ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ὡσαύτως δὴ καὶ τὰ κηγ, κζγ, καὶ ἔτι τὰ αεκ, αθκ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἐὰν ἓν πρῶτον ἀπὸ τοῦ αβγ, αδγ, ἴσων ἀφαιρεθῇ τὰ κηγ, κζγ, ἴσα, ἐγκαταλειφθήσεται καὶ τοῦ ε'. ἀξίωμα τὰ αβηκ, αδζκ, παραλληλόγραμμα ἴσα. ἐὰν δ' αὖθις ἀπὸ τοῦ αβηκ, αδζκ, ἴσων, ἀφαιρεθῇ τὰ αεκ, αθκ, ἴσα, ἐγκαταλειφθήσεται τὰ βκ, κδ, ἴσα ἀλλήλοις. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΜΔ'. Πρόβλημα

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω ἤδη παραβαλεῖν ἐπὶ τῆς α, δοθείσης εὐθείας παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι β, τριγώνῳ, ἔχον τὴν πρὸς τῇ γ, γωνίαν. συνεστάθω διὰ τῆς μβ', τὸ δεζθ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ β', τριγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ εζθ, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῇ γ'. τῇ δὲ εζ, κείσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ζμ, ἴση τῇ α. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ δθ, καὶ τοῦ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ θ, ἀορίστως. εἶτα διὰ τοῦ μ, παράλληλος τῇ θζ.

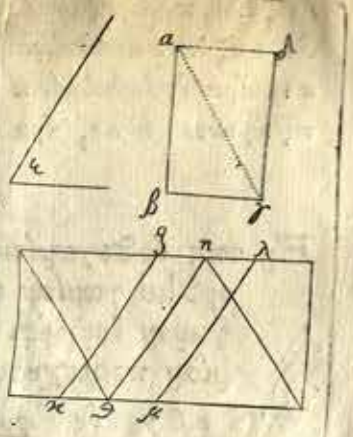
ἤχθω

ἤχθω ἡ κλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κζ. ἐπεὶ δὲ αἱ κμ, δε, παράλληλοί εἰσι καὶ τὸ πόρισμα τῆς λ'. καὶ εἰς αὐτὰς πέπτωκεν ἡ δκ, παντως γε αἱ ὑπὸ μκδ, εδκ, γωνίαι ἴσαί εἰσι δυσὶν ὀρθαῖς, καὶ τῷ κθ'. αἱ δὲ ὑπὸ ζκδ, εδκ, ἐλάττονες δύο ὀρθῶν, ὥστε ἐκβαλλόμεναι αἱ δε, κζ, συμπεσοῦνται, συμπιπτέτωσαν δὴ καὶ τὸ ν. καὶ διὰ τοῦ ν, παράλληλος τῇ εμ, ἤχθω ἡ νλ, καὶ περατούσθω ἑκατέρα τῶν θζ, καὶ τὸ ν. τοῦ δλ, τοίνυν παραλληλογράμμου τὰ δζ, ζλ, παραπληρώματα τῆς περὶ τὴν κν, διαμέτρον παραλληλογράμμων ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ καὶ τῷ αὐωτέρω, ἀλλὰ τὸ δζ, γέγονεν ἴσον τῷ β, ξιγώνῳ, καὶ ἡ ὑπὸ εζθ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηζμ, καὶ τῷ ιέ. ἄρα καὶ τὸ ζλ, ἴσόν ἐστι τῷ β, ξιγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ ηζμ, γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ εζθ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εζθ, γωνία ἴση τῇ πρὸς τῇ γ, δοθείσῃ, ἡ δὲ ζμ, δοθεῖα ἴση τῇ α. ἄρα ἐπὶ τῆς ζμ, δοθείας ἴσης τῇ α, παραβέβληται τὸ ζλ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ β, ξιγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ ηζμ, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῇ γ, δοθείσῃ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 1. Fig. 35.

Πρότασις ΜΕ'. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.



Ἔστω δὴ συστήσασθαι παραλληλόγραμμον ἴσον τῇ δοθέντι αβγδ, εὐθυγράμμῳ, ἔχον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ε. Ἐπεζεύχθω ἡ αγ, καὶ συνεστάτω διὰ τῆς μβ'. τὸ ζθ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ αβγ, ξιγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ ζκθ, γωνίαν ἴσην τῇ ε. καὶ διὰ τῆς αὐωτέρω παρὰ τὴν ηθ, εὐθεῖαν παραβεβλήσθω τὸ ημ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ αδγ, ξιγώνῳ, ἔχον τὴν ὑπὸ ηθμ, γωνίαν ἴσην τῇ ε. Ἐπεὶ οὖν αἱ ὑπὸ ζκθ, ηθμ, γωνίαι, ἴσαί εἰσιν ἑκατέρα τῇ ε, γωνίᾳ, παντως γε καὶ τὸ α. ἀξίωμα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς ὑπὸ κθη, ἔσονται αἱ ὑπὸ κθη, ηθμ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ ζκθ, κθη, ἀλλ' αἱ ὑπὸ ζκθ, κθη, ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσι κατὰ τὸ πόρισμα τῆς κθ'. ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ κθη, ηθμ, ἴσαί εἰσι δυσὶν ὀρθαῖς, καὶ τῷ ιδ'. αἱ κθ, θμ, ἐπ' εὐθείας εἰσίν. ὁμοίως δειχθήσεται, καὶ τὰς ζη, ηλ, ἐπ' εὐθείας εἶναι. ὥστε ἐπεὶ αἱ ζλ, κμ, ἐπιζευγνύουσι τὰς ζκ, λμ, παραλλήλους, παράλληλοι καὶ αὐταί εἰσι καὶ τῷ λγ'. τὸ ζμ, ἄρα παραλληλόγραμόν ἐστιν. Ἐπεὶ δὲ πάλιν τὸ ζθ, ἴσον γέγονε τῷ αβγ, ξιγώνῳ, τὸ δὲ ημ, τῷ αδγ. τὸ ὅλον δηπεθεν ζμ, ἴσόν ἐστι τῷ αβγδ, εὐθυγράμμῳ. ἔχει δὲ καὶ τῷ ὑπὸ ζκθ, γωνίαν ἴσην τῇ ε, καὶ δέδεικται εἶναι παραλληλόγραμμον. τῷ δοθέντι ἄρα εὐθυγράμμῳ καὶ τῷ.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

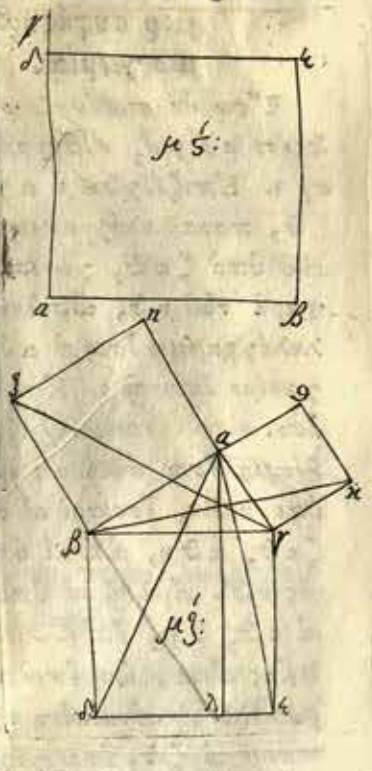
Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι κἂν δύο ὦσι τὰ δοθέντα εὐθύγραμμα, καὶ ζητηθῇ συσταθῆναι παραλληλόγραμμον ἴσον συναμφοτέροις τοῖς δοθεῖσιν, ἔξεσι διὰ τῆς αὐτῆς ἐφόδου τὸ προσαπτόμενον ποιεῖν, διαιροῦσι ά. τὰ δοθέντα εἰς τρίγωνα, εἰς ὅσα ἂν διαιρῆται· ὁμοίως κἂν πλείω ᾖ.

Πρότασις Μς'. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἀναγράψαι τετράγωνον ἀπὸ τῆς αβ, δοθείσης εὐθείας. Ἀνεσάθω δὴ ἀπὸ τοῦ α, σημείου πρὸς ὀρθὰς τῇ αβ, ἡ αγ, εὐθεῖα ἴση τῷ ια. καὶ ἀφῃρήθω ἀπὸ τῆς αγ, ἡ αδ, ἴση τῇ αβ, καὶ τῷ γ'. εἶτα ἀπὸ τοῦ δ, παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ δε. ἀπὸ δὲ τοῦ β, ὁμοίως παράλληλος τῇ αδ, ἤχθω ἡ βε, καὶ τὸ αε, ἔσται τετράγωνον. κατὰ γὰρ τὴν κατασκευὴν παραλληλόγραμμόν ἐστιν. ὥστε αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὸ λδ'. ἀλλὰ τῶν μὲν πρὸς τοῖς α, καὶ δ, γωνιῶν ἑκατέρα ὀρθή ἐστι κατὰ τὸ κθ'. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ αβ, αδ, πλευραὶ ἴσαι, ἄρα καὶ αἱ πρὸς τοῖς ε, καὶ β, αὐτοῦ γωνίαι ὀρθαί εἰσι, καὶ αἱ δε, εβ, λοιπαὶ πλευραὶ ἴσαι ταῖς δα, αβ, καὶ ἀλλήλαις. τὸ αε, ἄρα ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον. τὸ δὲ τοιοῦτον τετράγωνον· τὸ αε, ἄρα τετράγωνόν ἐστιν· ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 1. Fig. 36.



Πρότασις ΜΖ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Τὸ αβγ, ἤδη τρίγωνον τὴν πρὸς τῷ α, γωνίαν ὀρθὴν ἔχοντος, καὶ ἀπὸ τῶν αὐτοῦ πλευρῶν τετραγώνων γεγραμμένων τῶν βη, βε, γθ. Λέγω τὸ βε, ἴσον εἶναι τοῖς δυσὶ βκ, γθ. Ἀπὸ γὰρ τοῦ α, σημείου, τῇ αλ, παραλλήλως τῇ βδ, ἢ γε, ἀχθείσης, καὶ ἐπιζευχθεισῶν τῶν αδ, αε, γζ, βκ. ἐπεὶ αἱ ὑπὸ βαγ, βαη, εἰσὶν ὀρθαὶ, παντὸς γε ἡ αη, ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ αγ, κατὰ τὸ ιδ'. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ θα, ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ αβ. ὥστε ἡ μὲν ηγ, παράλληλός ἐστι τῇ ζβ, ἡ δὲ βθ, τῇ γκ. ἀλλ' ἐπεὶ αἱ ζβα, δβγ, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ διὰ τὸ ἑκατέραν ὀρθὴν εἶναι. κοινῆς προσκειμένης τῆς αβγ, ἴσονται αἱ ὑπὸ ζβγ, δβα, ἴσαι· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ γβ, βζ, ἴσαι δυσὶ ταῖς δβ, βα, ἄρα κατὰ τὸ δ'. καὶ ἡ ζγ, βάσις τῷ ζβγ, τριγώνου ἴση ἐστὶ τῇ αδ, βάσει τῷ αβδ, τριγώ-

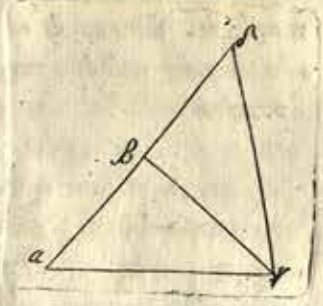
ξιγώνου, καὶ ὅλον τὸ ζβγ, ξίγωνον, ὅλῳ τῷ αβδ. Αὖθις ἐπεὶ τὸ ζα, παραλληλόγραμμον τῷ αὐτῷ ζβ, βάσιν ἔχει τῷ ζβγ, ξιγώνῳ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐσὶ παραλλήλοις ταῖς ζβ, ηγ, παντως γε καὶ τῷ μά. διπλάσιόν ἐσι τὸ ζα, παραλληλόγρ. τῷ ζβγ, ξιγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ βλ, παραλληλόγραμμον διπλάσιον εἶναι τῷ αβδ, ξιγώνῳ, ἐπεὶ τῷ αὐτῷ βδ, βάσιν ἄμφω ἔχουσι, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς βδ, αλ. ἀλλὰ τὸ ζβγ, ξίγωνον ἴσον δέδεικται τῷ αβδ, ἄρα τὰ βη, βλ, παραλληλόγραμμα διπλάσιά ἐσιν ἑκάτερον τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἐπομένως ἴσα καὶ τὸ ς'. ἄξιωμα. τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, καὶ τὸ γθ, ἴσον εἶναι τῷ γλ, ὥστε ὅλον τὸ βε, ἴσον ἐσὶ τοῖς βη, γθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΜΗ'. Θεώρημα.

Ε'αν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐσιν.

Ε'στω δή τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πλευρᾶς τετράγωνον τοῦ αβγ, τριγώνου, ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετραγώνοις. Λέγω τὴν ὑπὸ αβγ, γωνίαν ὀρθὴν εἶναι. εἰγὰρ ἡ βδ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς βγ, καθεῖσα, ἴση τῇ αβ, κείσθω, καὶ ἡ δγ, ἐπιζεύχθω, παντως γε τὸ ἀπὸ τῆς δγ, τετράγωνον ἴσον ἐσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δβ, βγ, τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς αὐτοῖς τετραγώνοις ἴσον ἐσὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον διὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς δγ, τετράγωνον ἴσον ἐσὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ ἐπομένως ἡ δγ, ἴση ἐσὶ τῇ αγ. ἐπεὶ οὖν τὰ αβγ, γβδ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς αβ, βγ, ἴσας δυσὶ ταῖς δβ, βγ, καὶ βάσιν τὴν αγ, βάσει τῇ γδ, ἴσην, ἔξουσι παντως, καὶ τὴν ὑπὸ αβγ, γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ γβδ, διὰ τὴν η. ἀλλ' ἡ ὑπὸ γβδ, ὀρθή ἐσιν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, ὀρθή ἐσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 1. Fig. 37.



Τέλος τῆς Πρώτης Βιβλίου τῆς Εὐκλείδου.

Προοι-

Προοιμιακὴ περίληψις τῦ Δευτέρυ τῦ τῦ Εὐκλείδυ Στοιχείων.

Τὸ αὐτὰ χεῖρας τῦτο Βιβλίον τῷ μὲν μεγέθει μικρὸν δοκεῖ, τῇ δ' ὀξοχότητι καὶ λυσιτελείᾳ τῦ αὐτῦ θεωρημάτων, καὶ ἱκανῶς μέγα. καὶ τοῖς νέοις, οἷδα ὃ λέγω, δυσκατάληπτον μυσηρία διδάσκειν δοκῦσιν. ἀλλ' ἂν ἐπὶ τὰ πρόσω προβεβηκότες, καὶ ἐπιμελῶς ἀναπολῦντες, ῥᾴσα καπανοήσονται. Αἱ γὰρ παραλαμβανόμεναι ἐν αὐτῷ ἀποδείξεις, χεδὸν πᾶσαι ἐπερείδονται τῷ σαφεστάτῳ ἀξιώματι, Τὸ ὅλον δηλ. ἴσον τοῖς ἰδίοις μέρεσιν. ὅθεν μὴ ἀπογνώσωντας, εἰ καὶ πρώτιον βολίῳ ἐντελῶς καταλαμβάνειν αὐτοῖς δυχερές. ἡ γὰρ περὶ τὰ τότε ἐπανάληψις σφόδρα ἐκπλαγῶαι αὐτὰς ποιήσει, πῶς τὰ ἔπω σαφῆ, πάλαι δυσκατάληπτα ἐδόκει;

Πραγματεύεται δὴ ἐπὶ τῦ παρόντος Δευτέρυ Βιβλίυ ὁ Στοιχειοτὴς περὶ δυνάμεως τῦ ὑθειῶν γραμμῶν, τυτ' ἔστι τῦ τετραγώνων. παραβάλλει τὰ ἐκ τῦ μερῶν τῦ γραμμῶν, ἢ διχοτομημένων, ἢ ἄλλως πως διαιρεμένων, ἀναφαινόμενα ὀρθογώνια, τοῖς ὀρθογωνίοις καὶ τετραγώνοις τῦ ὁλικῶν γραμμῶν. Τὸ μέρος τῦτο τῦ Στοιχείων λυσιτελέσατον πάνυ γε, μάλιστα δ' ὅτι θεμέλιον τῦ χρειωδεστέρων Ἀλγεβραϊκῶν πράξεων. Λί μὲν ξεῖς πρῶται προτάσεις ἀποδεικτέαι καὶ πολλαπλασιασμῷ. Ἡ δὲ τετάρτη τῇ ἐξαγωγῇ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τὰς ἀρχὰς παρέχει. ὥσπερ καὶ αἱ ἑπόμεναι, πέμπτη, ἕκτη, ἑβδόμη, καὶ ὀγδόη, ταῖς τῆς ἀναλυτικῆς μεθόδυ πράξεσι. Τὰ δὲ λοιπὰ θεωρήματα τετραγωνομετρικοῖς μᾶλλον λυσιτελῆ.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ
ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Ὅρος Α'. Παρ' παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τινὶ ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν.

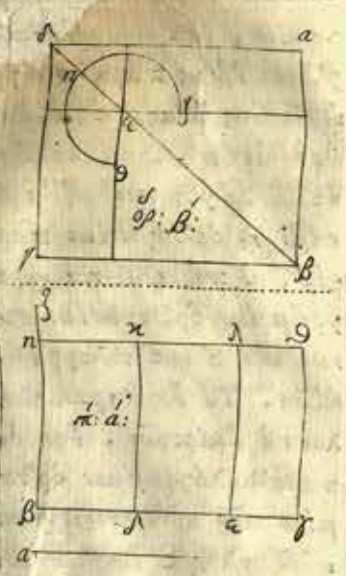
Εἴρηται ἐν τοῖς ἔμπροσθεν, ὅτι τὰ παραλληλόγραμμα εἰς δύο διαιρεῖται εἴδη τά τε καθολικώτερα, εἰς ὀρθογώνια καὶ μὴ ὀρθογώνια. καὶ τούτων αὖθις ἑκάτερον ὑποδιαιρεῖται εἰς ἰσόπλευρα καὶ ἀνισόπλευρα. καὶ τῶν μὲν ὀρθογωνίων, ὅσα εἰσὶν ἰσόπλευρα, καλεῖται τετράγωνα, ὅσα δὲ ἀνισόπλευρα, λέγονται ἰδίως παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια, καὶ ἔχουσι τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας, ὡς δέδεικται, προτάσει λδ'. τῶν δὲ μὴ ὀρθογωνίων, ὅσα εἰσὶν ἰσόπλευρα, καλεῖται ῥόμβοι, ὅσα δὲ ἀνισόπλευρα ῥομβοειδῆ. Ἐνταῦθα ἤδη ὁ λόγος περὶ τῶν ὀρθογωνίων, ἰσοπλεύρων τε καὶ ἀνισοπλεύρων φημὶ καὶ ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων. ἐπεὶ δὲ τῇ μὲν τοῦ τετραγώνου προσηγορίᾳ, ὁ περιλείεται καὶ τὰ παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια, τῇ δὲ τῶν παραλληλογράμμων ὀρθογωνίων συμπεριλαμβάνεται καὶ τὰ τετράγωνα· τούτου χάριν περὶ μόνων τῶν παραλληλογράμμων ὀρθογωνίων εἰπών, καὶ περὶ τῶν τετραγώνων ἡρμήνευσε. Τὸ μὲν παραλληλόγραμμον γωνίας χώραν ἐπέχει, τὸ δὲ ὀρθογώνιον καὶ τὰ λοιπὰ διαφορῶν. ἔφη δὲ, ὅτι ἐκ δύο πλευρῶν λέγεται περιέχεσθαι, ἐπεὶ πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, πολλαπλασιαζομένων τῶν δύο αὐτοῦ πλευρῶν, τῶν μίαν τῶν αὐτοῦ περιεχουσῶν γωνιῶν, συμπληροῦται. μᾶλλον δὲ, ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὡς προεῖρηται. ὅθεν ἐπεὶ τὸ τετράγωνον πᾶσαι αἱ πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ καὶ τὸν λ'. ὅρον, ἐκ ἄλογον, ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς περιέχεσθαι λέγεσθαι· τῶν γὰρ δύο αὐτοῦ πλευρῶν πρὸς ἀλλήλας πολλαπλασιαζομένων, τὸ αὐτὸ γενήσεται, ὅπερ καὶ τῆς μιᾶς πρὸς ἑαυτὴν πολλαπλασιαζομένης γίνεται. διὸ δὴ τοῖς μὲν παραλληλογράμμοις ἡ, ὑπὸ, προσίθεται πρόθεσις ἕπεται, τὸ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ὑπὸ δύο εὐθειῶν περιέχεται. τοῖς δὲ τετραγώνοις ἡ, ἀπὸ, οἷον τὸ τετράγωνον ἀπὸ μιᾶς πλευρᾶς περιέχεται.

Β'. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τινὰ διάμετρον αὐτοῦ παραλληλόγραμμον ὁποιομοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι, γνώμονα καλείσθω.

Τίνα μὲν τῶν τετραπλεύρων σχημάτων παραλληλόγραμμα ἤκουσεν, εἴρηται ἀνωτέρω, καὶ τοῖς ἔμπροσθεν ἔτι τινὰ σεσημείωται. Διάμετρος δὲ παραλληλογράμμου λέγε-

λέγεται εὐθεῖά τις, ἡ πρὸς δύο ἀπεναντίον αὐτῇ γωνίας τέμνουσα, ἥτις καὶ διάμετρος διαγώνιος προσαγορεύεται, καὶ δίχα τὸ παραλληλόγραμμον τέμνει, καὶ τῶν λδ', τὰ ά. Ὅταν δὲ ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ὑφ' ὧν περιέχεται τὸ παραλληλόγραμμον δύο ἐντὸς εὐθεῖαι παράλληλοι ἀχθῶσιν, ἔχουσαι κοινὴν τομὴν μὴ τῆς διαμέτρου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον γενομένων παραλληλογράμμων τὰ μὲν δύο, τὰ ὑπὸ τῆς διαμέτρου τεμνόμενα, παραλληλόγραμμα περὶ τὴν διάμετρον ὀνομάζεται. τὰ δὲ λοιπὰ παραπληρώματα. Ληφθέντος τοίνυν ἑνὸς τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων, καὶ τῶν δύο παραπληρωμάτων ἐπὶ πάντος παραλληλογράμμου, τὰ ξία ὁμοῦ Γνώμων καλεῖται. φέρει γάρ σοι τὸ χῆμα, ὅπερ, καὶ τὸ παρὰ τοῖς μαθηματικοῖς ὄργανον, τὸ καλούμενον γνώμων, ὡς ἐπὶ τοῦ δὲ τοῦ χήματος καθοράται. ἐν ᾧ διάμετρος μέν ἐστιν ἡ βδ, εὐθεῖα, παραλληλόγραμμα δὲ περὶ τὴν διάμετρον τὰ βε, εδ, καὶ παραπληρώματα τὰ αε, εγ. τὸ δὲ ζηθ, ὅλον χῆμα, Γνώμων καλεῖται.

Eucl. Lib. 2. Fig. 1.



Πρότασις Α'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου, καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ α, βγ, καὶ τετμήσθω ἡ βγ, κατὰ τὰ δ, ε, σημεῖα· λέγω ὅτι, τὸ ὑπὸ τῶν α, βγ, εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τοῖς ὑπό τε τῆς α, ἀτμήτου εὐθείας, καὶ τῶν βδ, δε, εγ, τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. Ἀνεστάθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β, σημείου πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν βγ, ἡ βζ. καὶ τῇ μὲν α, ἴση κείσθω ἡ βη, διὰ δὲ τοῦ η, τῇ μὲν βγ, παράλληλος ἤχθω ἡ ηθ, τῇ δὲ βη, αἱ δκ, ελ, γθ, διὰ τῶν λ, δ, ε, ἀπειλήφθωσαν. καὶ ἐπεὶ τὸ ηγ, σύγκειται ἐκ μερῶν τῶν βκ, δλ, εθ, ὀρθογωνίων. παντὸς γὰρ κατὰ τὸ ε δ'. ἀξίωμα, ἴσον ἐστὶ τοῖς βκ, δλ, εθ, ὀρθογωνίοις· ἀλλὰ τὸ μὲν ηγ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν α, καὶ βγ, εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται γὰρ ὑπὸ τῆς βγ, καὶ βη, ἴσης τῇ α, καὶ πρὸς ὀρθὴν συναφείσης γωνίαν· τὰ δὲ βκ, δλ, εθ, ἐστὶ τὰ ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια, τὸ μὲν γὰρ βκ, περιέχεται ὑπὸ τῆς βη, τῆς ἴσης τῇ α, ἀτμήτῳ, καὶ τοῦ βδ, τμήματος, τὸ δὲ δλ, ὑπό τε τῆς δκ, ἴσης καὶ αὐτῇ βσης τῇ α, καὶ τοῦ δε, τμήματος, καὶ τὸ εθ, ὑπό τε τῆς ελ, παντὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν τῆς α, καὶ τοῦ εγ, τμήματος. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν α, καὶ βγ, εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς α, ἀτ-

α, ἀτμήτῳ δ' εὐθείας, καὶ τῶν βδ, δε, εγ, τμημάτων, ὅπερ ἐδεῖ τὸ ὑποκείμενον.

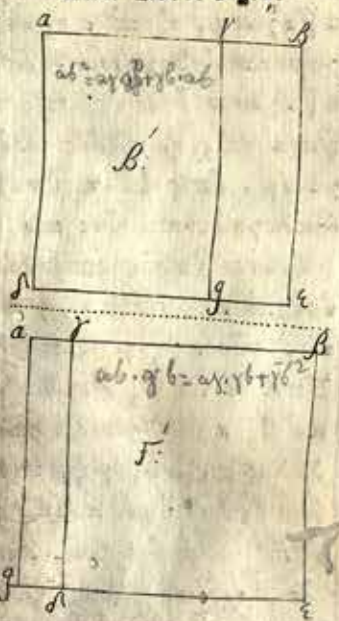
Ὅτι δὲ ἑκατέρα τῶν δκ, ελ, ἴση ἐστὶ τῷ α, δῆλον. τὰ γὰρ βκ, δλ, εθ, παραλληλόγραμμά εἰσι, τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ τὴν λδ', τῇ α. ὥστε ἑκατέρα τῶν δκ, ελ, ἴση ἐστὶ τῇ βκ, ἥτοι τῇ α, ἴση γὰρ ἐλλείπεται ἡ βκ, τῇ α.

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὰ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Τμηθήτω δή τις ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, καὶ τὸ γ. λέγω, ὅτι τὰ ὑπό τε τῶν αβ, καὶ τῶν αγ, γβ, μερῶν αὐτῆς περιεχόμενα ὀρθογώνια, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, τετραγώνῳ. Γεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ αε, διὰ τῆς με', τῆς α. καὶ ἀπὸ τοῦ γ, σημείου ἤχθω παράλληλος τῇ αδ, ἡ βε, ἡ γζ, καὶ τῇ λα, τῇ αὐτῇ. καὶ ἐπεὶ τὰ αζ, γε, ἴσα ἐστὶ τῷ αε, καὶ τὸ ιδ'. ἀξίωμα, τὰ δὲ αζ, γε, ἐστὶ τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ, καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων αγ, γβ, περιεχόμενα ὀρθογώνια. τὸ μὲν γὰρ αζ, περιέχεται ὑπὸ τῆς αδ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ αβ, καὶ τὸν λ'. ὅρον, καὶ τοῦ ἑνὸς τμήματος αγ. τὸ δὲ γε, περιέχεται ὑπὸ τῆς γζ, ἴσης καὶ αὐτῇ ἴσης τῇ αδ, καὶ τῇ λδ'. τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἑπομένως τῇ αβ, καὶ τὸ α. ἀξίωμα, καὶ τοῦ ἑτέρου τμήματος γβ. καὶ τὸ αε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης αβ, τετράγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 2. Fig. 2.



Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ, ὡς ἔτυχε, τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Τμηθήτω δή τις ἡ αβ, δοθεῖσα εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, καὶ τὸ γ, καὶ συνεστάθω ὀρθογώνιον τὸ αε, ἔχον τινὶ βε, ἴσῃ τῇ γβ, τμήματι. Λέγω τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης αβ, καὶ τοῦ γβ, τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ αγ, γβ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ γβ, τμήματος τετραγώνῳ. Ἀνεβλήθω γὰρ τῇ γδ, παραλλήλως τῇ αζ, ἡ βε, τὸ αε, πάντως ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τοῖς αδ, γε, ὀρθογωνίοις καὶ τὸ ιδ'. ἀξίωμα, ὡς εἰς αὐτὰ διαιρούμενον, καὶ ἐξ αὐτῶν συγκείμενον. ἀλλὰ τὸ μὲν αδ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθο-

γώνιον, περιέχεται γὰρ ὑπό τε τῶ α γ, ἐνὸς τμήματος, καὶ τῆς γ δ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῷ ἑτέρῳ γ β, τμήματι· τὸ δὲ γ ε, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆ γ β, τμήματος τετράγωνον, ἴση γὰρ ἡ γ β, τῇ β ε· ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης α β, καὶ τῆ γ β, τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων α γ, γ β, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆ γ β, τμήματος τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ ὑποκείμενον.

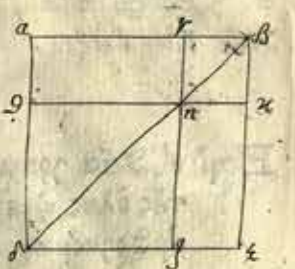
Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἔσται τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ α β, δοθεῖσα εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, κατὰ τὸ γ. Λέγω τὸ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον ἴσον εἶναι τοῖς τε ἀπὸ τῶν α γ, γ β, τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν α γ, γ β, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον τὸ α ε, καὶ τετράσθω ἡ β δ, διάμετρος· ἀπὸ δὲ τοῦ γ, παράλληλος τῇ α δ, ἡ β ε, ἤχθω ἡ γ ζ, καὶ τετράσθω ἑκατέρα τῶν αὐτῶν, ἑκατέρα τῶν β δ, διαμέτρων κατὰ τὸ η· καὶ διὰ τοῦ η, ἤχθω παράλληλος ἑκατέρα τῶν α β, ἡ δὲ ε ἡ θ κ. τὸ τοίνυν α ε, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ζ θ, γ κ, καὶ τοῖς α η, η ε, παραλληλογράμμοις καὶ τὸ ι δ', ἀξίωμα. ἀλλὰ τὸ μὲν α ε, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς α β, δοθείσης τετράγωνον, τὰ δὲ θ ζ, γ κ, τὰ ἀπὸ τῶν α γ, γ β, τμημάτων τετράγωνα, καὶ τὰ α η, η ε, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ὡς δειχθήσεται. ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν α γ, γ β, τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν α γ, γ β, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ ὑποκείμενον. Λείπεται δὲ δεῖξαι τὰ ἤδη ὁμολογηθέντα. ὅτι μὲν οὖν τὸ α ε, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον ἐκ τῆς κατασκευῆς δῆλον. ὅτι δὲ τὰ μὲν θ ζ, γ κ, ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν α γ, γ β, τετράγωνα, τὰ δὲ α η, η ε, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν α γ, γ β, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, δείκνυται καὶ τὸν Εὐκλείδην ὕπως. Ἐπεὶ τῶ δ α β, ἰσογώνιά εἰσι τὰ δ α, α β, πλευραὶ, εἰσὶν ἴσαι, πάντως γε καὶ αἱ ὑπὸ α δ β, α β δ, γωνίαι τῇ αὐτῇ ἴσαι εἰσὶ καὶ τοῦ ε, τῇ α. ἐπεὶ δὲ καὶ εἰς παραλλήλους τὰς α δ, γ ζ, πέπτωκεν ἡ β δ. δῆλον, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ β η γ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α δ β, ἐντὸς καὶ τοῦ κ θ', τῇ αὐτῇ. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ α δ β, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ α β δ, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ β η γ, ἴση ἐστὶ, καὶ τοῦ α. ἀξίωμα, τῇ ὑπὸ γ β η, καὶ καὶ τοῦ ε, τῇ α. αἱ γ β, γ η, ἴσαι εἰσι. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων, ἐπεὶ αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ καὶ γωνίαι ἴσαι εἰσὶ καὶ τοῦ λ δ'. τῇ αὐτῇ, πάντως γε τὸ γ κ, ἰσόπλευρόν ἐστιν. Λύθις ἐπεὶ αἱ γ ζ, β ε, παράλληλοί εἰσι, δῆλον, ὅτι αἱ ὑπὸ γ β κ, β γ η, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαί εἰσι καὶ τοῦ κ θ', τῇ αὐτῇ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ γ β κ, ὀρθή ἐστιν, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ β γ η, καὶ ἑπομένως

Eucl. Lib. 2. Fig. 3.

$\alpha\beta^2 = \alpha\gamma^2 + \gamma\beta^2 + 2\,\alpha\gamma.\gamma\beta$



νως καὶ τὴν λδ', τῷ αὐτῷ. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ γκ, παραλληλογράμμων ὀρθαί εἰσιν. ὥστε τὸ γκ, ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, τετράγωνον ἄρα. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ θζ, τετράγωνον εἶναι. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ αθ, ἴση ἐστὶ τῇ γκ, ἡ δὲ γκ, τῇ γβ, τμήματι καὶ τρίτῳ ῥητείσαν λδ'. τὸ ακ, δηπτεται περιέχεται ὑπὸ τῶν αγ, γβ, τμημάτων. ὡσαύτως ἐπεὶ αἱ βα, βε, ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἀφῃρέθησαν ἀπ' αὐτῶν ἴσαι αἱ γβ, βκ, ἡ κε, παντὸς ἴση ἐστὶ τῇ αγ, τμήματι. ἔστι δὲ καὶ ἡ κκ, ἴση τῇ ἑτέρᾳ γβ, τμήματι. ἄρα καὶ τὸ κε, περιέχεται ὑπὸ τῶν αγ, γβ, τμημάτων. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

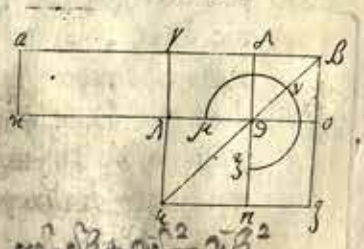
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐν παντὶ τετραγώνῳ τὰ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστι.

Πρότασις Ε'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῆς ἀνίσου τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῆς τομῶν τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Τμηθήτω δὴ ἡ αβ, εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ γ, ἄνισα δὲ κατὰ τὸ δ. Λέγω τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, τετραγώνου ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς γβ, τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ τὸ γζ, τετράγωνον ἀπὸ τῆς γβ. καὶ ἐπιζευχθείσης, ἀχθήτω ἡ δη, παράλληλος τῇ γε, ἡ βζ, τέμνουσα τὴν βε, κατὰ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ θ, παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ κο. ἀπὸ δὲ τοῦ α, παράλληλος τῇ γε, ἡ ακ. καὶ ἐπεὶ τὸ γθ, ἴσον ἐστὶ τῷ θζ, κατὰ τὴν μγ', τοῦ ά. κοινὸν προσλαμβανομένου τοῦ δο, παντὸς γε κατὰ τὸ β'. ἀξίωμα τὰ γο, δζ, ἴσα ἐστὶν, ἀλλὰ τῷ γο, ἴσον ἐστὶ τὸ κγ. κατὰ τὸ ά, ἄρα ἀξίωμα τὸ κγ, ἴσον ἐστὶ καὶ τῷ δζ. κοινὸν δὲ προσκείσθω τὸ γθ, τὸ αθ, παντὸς ἴσον ἐστὶ τῷ μνξ, γνώμονι. ἐὰν δὲ καὶ τὸ λη, κοινὸν ληφθῇ, τὸ αθ, ἄρα μετὰ τοῦ λη, ἴσον ἐστὶ τῷ μνξ, γνώμονι καὶ λη. ἀλλ' ὁ μνξ, γνώμων μετὰ τοῦ λη, ἴσός ἐστι τῷ γζ. τὸ αθ, ἄρα μετὰ τοῦ λη, ἴσον ἐστὶ τῷ γζ. ἔστι δὲ τὸ μὲν αθ, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων αδ, δβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον. περιέχεται γὰρ ὑπὸ τοῦ αδ, ἑνὸς τμήματος, καὶ τῆς δθ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ δβ, ἑτέρῳ τμήματι καὶ τὸ πόρισμα τῆς αὐτέρω, τὸ δὲ λη, τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τετράγωνον, γέγονε γὰρ ἀπὸ τῆς λθ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ γδ. καὶ τὸ γζ, τὸ ἀπὸ τῆς γβ, ἡμισείας τετράγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 2. Fig. 4.



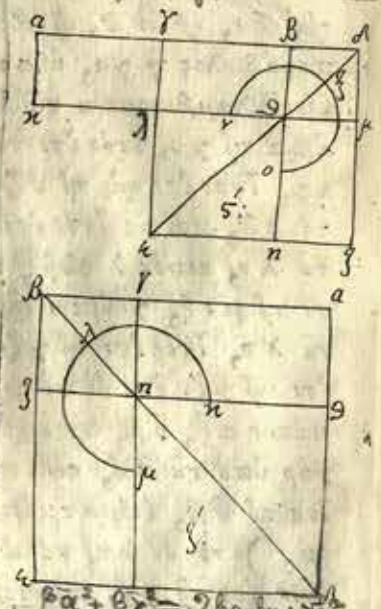
$\overline{\alpha\delta}^2 + \overline{\delta\beta}^2 + 2\gamma\delta^2 = \overline{\gamma\beta}^2$

Πρότασις ς'. Θεώρημα.

Ε'αν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Τμηθήτω δή ἡ αβ, γραμμὴ δίχα κατὰ τὸ γ, καὶ προστεθήτω ἡ βδ. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γβ, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γδ, τετραγώνῳ. τῆς γὰρ αὐτῆς κατασκευῆς τῇ τοῦ προτέρου γεγονέτω. ἐπεὶ τὸ θζ, ἴσον ἐστὶ τῷ γθ, τουτέστι τῷ λδ', τοῦ α. τῷ δὲ γθ, ἴσον ἐστὶ τὸ αλ, τουτέστι τῷ λς'. τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τὸ α. ἀξίωμα τὸ θζ, ἴσον ἐστὶ τῷ αλ. κοινὸν δὲ προσκείσθω τὸ γμ, ὅλον τὸ αμ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ νξο, γνώμονι. κοινὸν δ' αὖθις προσκείσθω τὸ λη, παντὸς γε τὸ αμ, μετὰ τοῦ λη, ἴσον ἐστὶ τῷ νξο, γνώμονι, καὶ λη, παραλληλογρ. ἀλλ' ὁ νξο, γνώμων μετὰ τοῦ λη, ἴσος ἐστὶ τῷ γζ, τετραγώνῳ καὶ τῷ ι δ'. ἀξίωμα, ἄρα τὸ αμ, μετὰ τοῦ λη, ἴσον ἐστὶ τῷ γζ, τετραγώνῳ. τὸ δὲ αμ, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῶν αδ, καὶ δβ, ἡ γὰρ δμ, ἴση ἐστὶ τῇ δβ, καὶ τὸ πόρισμα τῆς δ'. καὶ τὸ λη, τὸ ἀπὸ τῆς γβ, τετράγωνον, ἡ γὰρ λθ, αὐτοῦ πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ γβ, καὶ τοῦ λδ'. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δβ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γβ, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γδ, τετραγώνῳ. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Euclid. Lib. 2. Fig. 5.



Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ε'αν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Τμηθήτω δή ἡ αβ, εὐθεῖα, ὡς ἔτυχε, κατὰ τὸ γ. Λέγω τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετράγωνα ἴσα εἶναι τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος αγ, τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ αε, τετράγωνον διὰ τῆς με', τοῦ α. καὶ ἀναπεπληρώθω τὸ σχῆμα καὶ τὰ προειρημένα, καὶ ἔστω παντὸς τὰ βη, ηδ, παραλληλόγραμμα, τετράγωνα, καὶ τὸ πόρισμα τῆς δ'. τοῦ παρόντος. Ἐπεὶ δὲ ἡ ηθ, ἴση ἐστὶ τῇ γα, δῆλον, ὅτι τὸ μὲν βη, ἐστὶ τὸ ἀπὸ τοῦ γβ, τμήματος τε-

τρά-

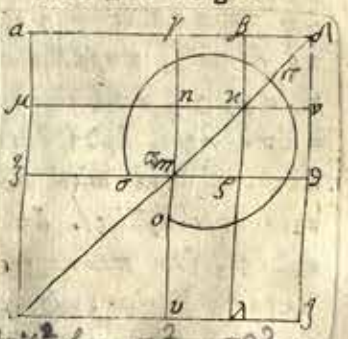
τράγωνον, τὸ δὲ ηδ, τὸ ἀπὸ τῆ αγ. Αὐθις ἐπεὶ τὰ αη, ηε, ἴσα ἐστὶ καὶ τὸ μγ. τῆ α. κοινῆ λαμβανομένη τῆ βη, παντως γε τὰ αζ, γε, ἴσα ἐστιν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ αβ, βε, καὶ γβ, βζ, ἴσαι καὶ τὸν λ'. ὅρον τῆ α. τὰ αζ, ἄρα γε, ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον. ἀλλὰ τὰ αζ, γε, ὁ κλμ, ἐστὶ γνώμων μετὰ τῆ βη, τετραγώνε, ἄρα ὁ κλμ, γνώμων μετὰ τῆ βη, ἴσος ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινῆ δὲ προσκειμένη τῆ ηδ, παντως γε ὁ κλμ, γνώμων μετὰ τῶν βη, ηδ, τετραγώνων ἴσος ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆ λοιπῆ τμήματος αγ, τετραγώνῳ, τῷ ηδ. ἀλλ' ὁ κλμ, γνώμων, καὶ τὰ βη, ηδ, τετράγωνα, ἐστὶ τὸ ὅλον αε, τετράγωνον καὶ βη. ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον δηλ. τὸ αε, μετὰ τῆ βη, τῆ ἀπὸ τῆ βγ, τμήματος τετραγώνε, ἴσόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης αβ, καὶ τῆ ἐφημένε τμήματος βγ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ηδ, τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ τῆ λοιπῆ δηλ. τμήματος αγ. ὅπερ ἔδει τὸ ὑποχεθέν.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιπῆ τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆ ἐφημένε τμήματος, ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα ἤδη ἡ αβ, τετμήσθω, ὡς ἔτυχε, καὶ τὸ γ, καὶ προσκείσθω αὐτῇ ἡ βδ, ἴση τῇ βγ. Λέγω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, ὅλης καὶ τῆ γβ, τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον τετράκις, μετὰ τῆ ἀπὸ τῆ λοιπῆ αγ, τμήματος τετραγώνου ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς αδ, τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αδ, τετράγωνον τὸ αζ. καὶ κατασκευάσθω τὸ σχῆμα διπλοῦν. καὶ ἐπεὶ τὸ αζ, τετράγωνόν ἐστι, παντως γε καὶ τὰ περὶ τὴν διάμετρον αὐτῆ παραλληλόγραμμα τὰ βν, ηρ, ξυ, τετράγωνά εἰσι καὶ τὸ πόρισμα τῆς δ'. τοῦ παρόντος. αὐθις ἐπεὶ ἡ βδ, ἴση γέγονε τῇ γβ, δῆλον, ὅτι τὰ γκ, βν, ἴσα ἐστὶ καὶ τὸν λς', τῆ α. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ηκ, κτ, ταῖς γβ, βδ, ἴσαι καὶ τὸν λδ', τῆ α. καὶ ἑπομένως ἀλλήλαις, ἄρα καὶ τὰ ηρ, κθ, ἴσα ἐστὶν. ἀλλὰ καὶ τὰ ηρ, βν, ἴσα ἐστὶν, ἡ γὰρ ηκ, ἴση ἐστὶ τῇ γβ, ἤτοι τῇ βδ. Τὰ τέσσαρα ἄρα παραλληλόγραμμα γκ, βν, ηρ, κθ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Πάλιν ἐπεὶ τὰ γκ, ηρ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἄρα καὶ αἱ τέτων βάσεις γη, ηπ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ τὸν λς'. τῆ αὐτῆ, καὶ ἑπομένως καὶ τὸν αὐτὸν ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ καὶ τὰ αη, μπ· τοῖς δὲ αη, μπ, ἴσα ἐστὶ τὰ πλ, ρζ, καὶ τὸν μγ'. τῆ α. ἄρα τὰ τέσσαρα παραλληλόγραμμα αη, μπ, πλ, ρζ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. προσκείσθω δὲ τῷ μὲν αη, τὸ γκ, τῷ δὲ μπ, τὸ ηρ, τῷ δὲ πλ, τὸ βν, καὶ τῷ

Eucl. Lib. 2. Fig. 6.



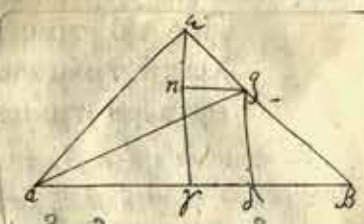
$\overline{\alpha\delta}^2 \cdot \overline{\gamma\beta}^2 + \overline{\alpha\gamma}^2 = \overline{\alpha\beta}^2$

καὶ τῷ ρζ, τὸ κθ. παύπως γε καὶ τὸ β'. ἀξίωμα τὰ ακ, μρ, κζ, καὶ πλ, μῆ τῷ βν, ἴσα ἀλλήλοις ἐσίν. ἀλλὰ τὸ ακ, ἐσὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς αβ, βγ, ἴση γὰρ ἡ βκ, τῇ γβ, ἄρα τὰ τέσσαρα παραλληλόγραμμα ακ, μρ, κζ, καὶ πλ, μῆ τῷ βν, ἐσὶ τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς αβ, βγ, περιεχόμενον. ἔσι δὲ καὶ τὸ ξυ, τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος ἀναγραφόμενον τετράγωνον, ἴση γὰρ ἡ ξπ, τῇ αγ, καὶ τὰ τέσσαρα παραλληλόγραμμα, ακ, μρ, κζ, πλ, μῆ τῷ βν, σωὶ τῷ ξυ, ὅλον ἐσὶ τὸ αζ, τετράγωνον, τὸ ἀπὸ τῆς αδ, ἀναγραφόμενον. ἄρα τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς αβ, ὅλης καὶ τοῦ γβ, τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον μῆ τοῦ ἀπὸ τοῦ αγ, τμήματος τετραγώνου, ἴσον ἐσὶ τῷ ἀπὸ τῆς αδ, τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῆς ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐσι τοῦτε ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῆς τομῶν τετραγώνου.

Eucl. Lib. 2. Fig. 7.



Εὐθείας ἤδη τῆς αβ, εἰς ἴσα μὲν τμηθείσης κατὰ τὸ γ, ἄνισα δὲ κατὰ τὸ δ, λέγω τὰ ἀπὸ τῆς ἀνίσων αὐτῆς τμημάτων αδ, δβ, τετράγωνα, διπλάσια εἶναι τοῦ ἀπό τε τῆς ἡμισείας αγ, καὶ τῆς μεταξὺ τῆς τομῶν γδ, τετραγώνων. Ἀνεσάθω γὰρ ἐπὶ τῆς αβ, κάθετος ἡ εγ', ἴση τῇ αγ, καὶ τῇ αε, εβ, ἐπιζευγνυμένων, καὶ κεχθω παράλληλος τῇ γε, ἡ δζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ. ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, παράλληλος τῇ αβ, ἤχθω ἡ ζη. καὶ ἐπεὶ $\overline{\alpha\delta}^2+\overline{\delta\beta}^2=2\overline{\alpha\gamma}^2+2\overline{\gamma\delta}^2$.
αἱ αγ, γε, ἴσαι εἰσὶ. παύπως γε αἱ ὑπὸ γαε, γεα, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἀλλ' ἡ ὑπὸ αγε, ὀρθὴ ἐσὶν, ἄρα ἑκατέρα τῆς ὑπὸ γαε, γεα, ἡμίσεια ἐσὶν ὀρθῆς. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῆς ὑπὸ γβε, γεβ, ἡμίσειά ἐσιν ὀρθῆς. ὥσε ἐπεὶ δέδεικται ἑκατέρα τῆς ὑπὸ γεα, γεβ, ἡμίσεια ὀρθῆς, ὅλη παύπως γε ἡ ὑπὸ αεβ, ὀρθή ἐσιν. Ἐπεὶ δὲ πάλιν, αἱ ηζ, αβ, παράλληλοί εἰσι, καὶ εἰς αὐτὰς πέπτωκεν ἡ εγ. δῆλον, ὅτι αἱ ὑπὸ εηζ, εγβ, γωνίαι ἴσαί εἰσι καὶ τῷ κθ', τῶ α'. ἀλλ' ἡ ὑπὸ εγβ, ὀρθή ἐσιν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ εηζ, ὁμοίως ὀρθή ἐσι. δέδεικται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ηεζ, ἡμίσεια ὀρθῆς, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ηζε, ἡμίσειά ἐσιν ὀρθῆς. ὥσε αἱ ηε, ηζ, ἴσαί εἰσι κατὰ τῷ ε', τῶ αὐτῶ. ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ δβ, δζ, ἴσαι εἰσιν. Ἐπεὶ οὖν τὸ αγε, τρίγωνον ὀρθογόνιόν ἐσι καὶ τὸ γ, παύπως γε τὸ ἀπὸ τῆς αε, τετράγωνον ἴσον ἐσὶ τοῖς ἀπὸ τῆς αγ, γε, τετραγώνοις καὶ τῷ μζ', τῶ α'. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῆς αγ, γε, τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς αγ, γε. τῶ ἄρα εἰὸς ἄρα, δηλ. τῶ ἀπὸ τῆς αγ, διπλάσιόν ἐσι τὸ ἀπὸ τῆς αε. ὡσαύπως δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εζ, διπλάσιον τῶ ἀπὸ τῆς ηζ, ἤτοι τῶ ἀπὸ τῆς γδ, ἴσαι γὰρ αἱ ηζ, γδ, καὶ τῷ λδ', τῶ α'. ὥσε τὰ ἀπὸ τῶν αε, εζ, τετρά-

γωνα

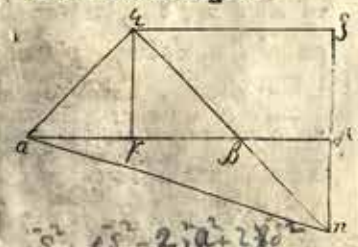
γωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γδ, σωαμφότερα συναμφοτέρων. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν αε, εζ, τετραγώνοις ἴσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αζ, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν μζ. ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αζ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῶν αγ, γδ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αζ, τετραγώνῳ ἴσά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν αδ, δζ, καὶ τοῖς αὐτοῖς, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αδ, δζ, τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γδ. ἀλλ' ἡ δζ, ἴση δέδεικται τῇ δβ. ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν αδ, δβ, τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αγ, γδ. ὅπερ ἔδει τὸ ὑποχεθέν.

Πρότασις Ι'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προσεθῇ δέτις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦτε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκτε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Τῆς αβ, ἤδη εὐθείας δίχα καὶ τὸ γ, τμηθείσης, καὶ τῆς βδ, ἐπ' εὐθείας αὐτῇ προσκειμένης, λέγω, ὅτι τό, τε ἀπὸ τῆς ὅλης αδ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης βδ, τὰ συναμφότερα τοῦτα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦτε ἀπὸ τῆς αγ, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, τετραγώνου. Ἀπὸ γὰρ τοῦ γ, κάθετος ἀνεσάθω κατὰ τοῦ ι α', τοῦ α'. ἡ γε, ἴση τῇ αγ, καὶ τῶν αε, εβ, ἐπιζευγνυμένων, ἤχθω ἀπὸ τοῦ δ, σημείου παράλληλος τῇ γε, καὶ ἴση ἡ δζ. ἐξαγομένη δὲ ἡ εβ, ἀπὸ τοῦ β, σημείου συμπιπτέτω τῇ δζ, καὶ αὐτῇ ἐξαγομένη κατὰ τὸ η. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αη. καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸ δ'. πόρισμα τῆς ιζ', τοῦ α'. ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αεγ, βεγ, ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστι, παντὸς γε ὅλη ἡ ὑπὸ αεβ, ὀρθή ἐστι. καὶ δὲ τοῦ λδ'. τοῦ αὐτοῦ ὀρθή ἐστιν ἔτι καὶ ἡ ὑπὸ εζη, ὅτι τὸ γζ, παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἐπὶ τῆς κατασκευῆς. αὖθις ἐπεὶ ἡ εζ, παράλληλός ἐστι τῇ γδ, κατὰ τοῦ λγ', τοῦ α'. δῆλον, ὅτι ἡ ὑπὸ ηδβ, ὀρθή ἐστι κατὰ τοῦ κθ', τοῦ αὐτοῦ. ὥστε ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δβη, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γβε, κατὰ τοῦ ιε', τοῦ α'. ἡδὲ ὑπὸ γβε, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς κατὰ τὸ δ'. πόρισμα τῆς ιζ'. τοῦ αὐτοῦ. παντὸς γε καὶ ἡ ὑπὸ δβη, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ δηβ, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. ὥστε ἡ δβ, ἴση ἐστὶ τῇ δη, κατὰ τοῦ ε', τοῦ α'. δέδεικται δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ, ὀρθή. ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ζεη, ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. ὥστε καὶ ἡ εζ, ἴση ἐστὶ τῇ ζη, κατὰ τὴν ῥηθεῖσαν ε'. τούτων δ' ὕπω προαποδεδειγμένων, ὑπωσί συνακτέον. Ἐπεὶ τὸ αγε, ὀρθογώνιόν ἐστι, παντὸς γε τὸ ἀπὸ τῆς αε, τετράγωνον ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν αγ, γε, τετραγώνοις. ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ γε, τοῦ ἑνὸς ἄρα, ἤτοι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, διπλάσιόν

Eucl. Lib. 2. Fig. 8.



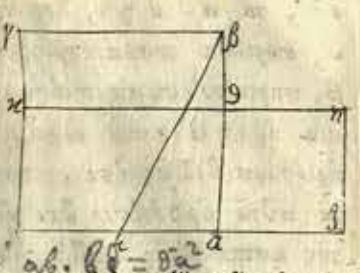
σιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς α ε. Διὰ τὰ αὐτὰ δείκνυται καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε η, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ε ζ, ὅπερ τῷ ἀπὸ τῆς γ δ, ἴσαι γὰρ αἱ ε ζ, γ δ, ὡς δέδεικται. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν α ε, ε η, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α η, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς α η, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν α δ, δ η, τετράγωνα, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν α δ, δ η, τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν α γ, γ δ, τετραγώνων, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δ η, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β δ, ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν α δ, δ β, διπλάσιά ἐστι τῶν αὐτῶν. Ε'ὰν ἄρα εὐθεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΑ'. Πρόβλημα.

Τῶ δοθείσαμ εὐθείαμ τεμεῖμ, ὥςε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης, καὶ τῆ ἑτέρα τῶμ τμημάτωμ περιεχόμεμομ ὀρθογώνιομ ἴσομ εἶμαι τῷ ἀπὸ τῆ λοιπῆ τμήματος τετραγώμῳ.

Ε"ςω δὴ τεμεῖν τὴν α β, δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς δύο μέρη, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης α β, καὶ ἑνὸς τῶν αὐτῆς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆ λοιπῆ τμήματος τετραγώνῳ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον τὸ α β γ δ, τῆς δὲ α δ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ ε, ἐπεζεύχθω ἡ ε β, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ε α, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπὶ τὸ ζ, ὥστε τὴν ε ζ, ἴσην εἶναι τῇ β ε. ἀπὸ δὲ τῆς α ζ, ἀναγραφομένου τετραγώνου, παρεκπεσέτω ἡ η θ, ἐπὶ τὸ κ. καὶ ἐπεὶ ἡ α δ, τέτμηται δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ α ζ, παντὸς γε κατὰ τὸν ς'. τὸ παρόντος, τὸ ὑπὸ τῆς δ ζ, καὶ ζ α, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἤτοι τὸ ζ κ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς α ε, τετραγώνου ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ε ζ, τετραγώνῳ, ἢ τῷ ἀπὸ τῆς ε β, ἴσης παντὶ. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς ε β, τετραγώνῳ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν α β, α ε, καὶ τῶν μ ζ, τοῦ ἀ. ἄρα τὸ ζ κ, ὀρθογ. μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς α ε, τετραγώνου, ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν α β, α ε, τετραγώνοις. κοινοῦ δὲ ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ τῆς α ε, ἐγκαταλείπεται τὸ ζ κ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς α β, τετραγώνῳ, ἤτοι τῷ α γ. ἀφαιρουμένου δ' ἔτι κοινοῦ τοῦ α κ, ἐγκαταλείπεται ἴσον τὸ ζ θ, τῷ θ γ. ἀλλὰ τὸ μὲν θ γ, ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ὅλης α β, ἴση γὰρ ἡ α β, τῇ β γ, καὶ τοῦ ἑτέρου θ β, τμήματος· τὸ δὲ ζ θ, τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ α θ, τμήματος τετράγωνον· ἡ δοθεῖσα ἄρα εὐθεῖα τέτμηται κατὰ τὸ προσαχθέν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

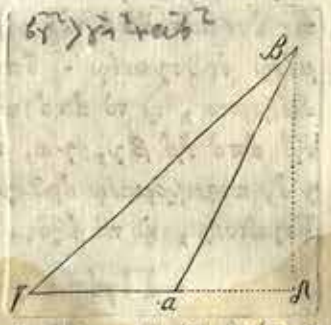
Eucl. Lib. 2. Fig. 9.



Πρό-

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ. *Eucl. Lib. 2. Fig. 10.*



Ἔστω δὴ τρίγωνον τὸ αβγ, ἀμβλυγώνιον καὶ τὸ α. καὶ τῆς γα, ἐξαχθείσης καὶ τοῦ συνεχὲς ἀπὸ τοῦ α, πίπτέτω κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τοῦ β, ἡ βδ. Λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν γα, αβ, τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. καὶ γὰρ τῷ δ'. τοῦ παρόντος, ἐπεὶ ἡ γδ, τέτμηται, ὡς ἔτυχε καὶ τὸ α, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν γα, αδ, τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς δβ, λαμβανομένα ἔσονται τὰ ἀπὸ τῶν γδ, δβ, τετράγωνα, ἴσα τοῖστε ἀπὸ τῶν γα, αδ, δβ, τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν γδ, δβ, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ, καὶ τῷ μζ, τοῦ παρόντος, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αδ, δβ, ἴσον ἐστὶ καὶ τῷ αὐτῷ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς γβ, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν γα, αβ, τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς γβ, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν γα, αβ, τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῆς γα, αδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις ἄρα τριγώνοις καὶ τὰ ἑξῆς.

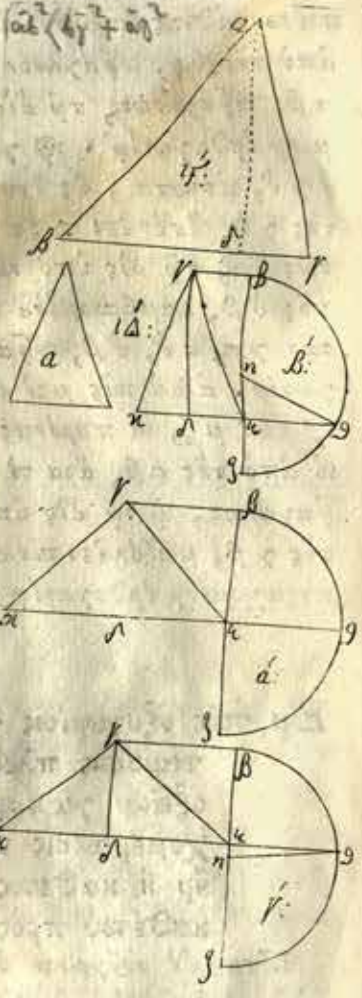
Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἔστω δὴ τρίγωνον ὀξυγώνιον τὸ αβγ· καὶ πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τὴν βγ, αὐτὴν πλευρὰς ἡ αδ. Λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον, ὑποτεινούσης τὴν πρὸς τῷ β, ὀξεῖαν γωνίαν, ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετραγώνων τῷ αὐτῷ γωνίαν τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπό τε τῆς βγ, καὶ βδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. τῆς γὰρ βγ, καὶ τὸ δ, ὡς ἔτυχε, τμηθείσης, ἔσται τὰ ἀπὸ τῶν γβ, βδ,

βδ, τετράγωνα ἴσα, τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς δγ, τετραγώνῳ καὶ τοῖς ζ. τὰ παρόντος. κοινὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τετραγώνου εἰλημμένου, ἔσται τὰ ἀπὸ τῶν γβ, βδ, δα, τετράγωνα ἴσα τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αδ, δγ, τετραγώνοις, καὶ τὸ β'. ἀξίωμα. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν αδ, δβ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αδ, δγ, τετραγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ τὴν μζ'. τὸ δ'. ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν γβ, βα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τετραγώνῳ. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον ἐλάττον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν γβ, βα, τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν γβ, βδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὡσαύτως δὲ δείξομεν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον ἔλαττον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς βγ, γα, τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῆς βγ, γδ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις ἄρα τριγώνοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 2. Fig. 11.



Πρότασις ΙΔ'. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Ἔστω δὴ συστήσασθαι τετράγωνον ἴσον τῷ α, δοθέντι εὐθυγράμμῳ. Συνεστάτω διὰ τῆς με'. τὸ α'. τῷ α, εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ βδ. εἰ οὖν ἡ βε, ἴση ἐστὶ τῇ εδ. γέγονε τὸ ἐπιταχθέν, τετράγωνον γὰρ ἔσται τὸ βδ, ὅπερ ἴσον γέγονε τῷ α. εἰ δὲ μή, ἔστω ἡ βε, τῆς εδ, μείζων. καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ. ὥστε τῇ εζ, ἴσην εἶναι τὴν εδ. τῆς δ' ὅλης βζ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ η, κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηβ, ἢ ηζ, γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ βθζ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ δε, κατὰ τὸ συνεχές. εἰπὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηθ. καὶ ἐπεὶ ἡ βζ, τέτμηται εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ η, ἄνισα δὲ κατὰ τὸ ε, ἔσται καὶ τὸ ιε. τῷ παρόντος, τὸ ὑπὸ τῶν βε, εζ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εη, τετραγώνου ἴσον, τῷ ἀπὸ τῆς ηζ, τετραγώνῳ, ἤτοι τῷ ἀπὸ τῆς ηθ. ἴσαι γὰρ αἱ ηζ, ηθ. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ηθ, τετράγωνον ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν θε, εη, τετραγώνοις καὶ τῷ μζ'. τῷ α. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βε, εζ, ὀρθογώνιον δηλ. τὸ βδ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς εη, τετραγώνου ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν θε, εη, τετραγώνοις. τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς εη, τετραγώνου κοινοῦ ἀφαιρεθέντος, ἐγκαταλειφθήσεται τὸ βδ, παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς εθ,

εθ, πεδαγώνῳ. ἀλλὰ τὸ βδ, παραλ. ἴσον γέγονε τῷ α, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εθ, πεδάγ. ἴσόν ἐστι τῷ α. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται τὸν αὐτὸν τρόπον γίνεσθαι τὸ προσαχθὲν, κἂν ἡ δε, μείζων εἶη τῆς εβ, καὶ ἡ βζ, τμηθῇ δίχα ἐκτὸς τῦ ε, ὡς ἐπὶ τῦ γ', καθορᾶται χήματος. τῇ δοθέντι ἄρα εὐθυγράμμῳ ἴσον πεδάγωνον συνέστη.

Τέλος τῦ Δευτέρυ τῆς Στοιχείωσ τῦ Εὐκλείδυ.

Προοιμιακὴ περίληψις τῦ Τρίτυ Εὐκλειδείυ Στοιχείυ.

✣ Ἐπὶ τοῦ παρόντος Τρίτυ Βιβλίυ ὁ Στοιχειωτὴς τὰ πλεῖσα περὶ κύκλυ πραγματεύεται, τὰς ἀρκτικὰς αὐτῦ ἀποδεικνὺς ἰδιότητας, αὐτῷ τέτῳ ὡηκέτας, οἷον ἐντελεσάσῳ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις χήματι. συμβάλλει ἀλλήλαις τὰς γραμμὰς ἤτοι ἐντὸς τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἢ ἐκτὸς ἀγομένας. τὰ πάθη τέτων, καὶ τῶν κύκλων ἁπτομένων ἢ τεμνομένων ἀλλήλοις ἐκτίθησιν. καὶ ἐπὶ τέτοις τὰς γωνίας ἤτοι πρὸς τῷ κέντρῳ, ἢ πρὸς τῇ περιφερείᾳ κειμένας πρὸς ἀλλήλας παραβάλλει. καὶ τέλος τὰ τῆς πρακτικῆς Γεωμετρείας Στοιχεῖα, ὅσα τῇ δυνάμει μάλιστα τῦ κύκλυ ἐπεροίδονται, διὰ βραχέων παραδίδωσιν. Ὅσης τοίνυν λυσιτελείας παρεκτικόν ἐστι τὸ Βιβλίον, τῦτο μόνον ἀρκεῖ πρὸς ἔνδειξιν, ὅτι περὶ κύκλυ, πηγῆς ὄντως θαυμασίων πραγμάτων ἐφ' ὅλῃ τῇ μάθησιν, καὶ τῶν ῥηθέντων πραγματεύεται.

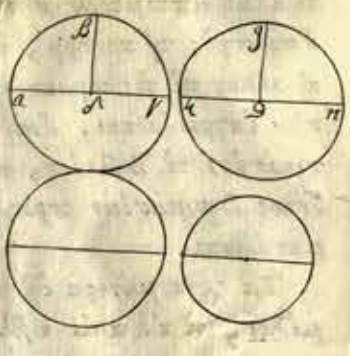
Τὰ χρησιμώτερα δὲ ταῖς ἐπισήμαις θεωρήμασι καθέστηκε ταῦτα. τὸ ις'. ἀμέλει, τὸ κ'. κά. κβ'. λά. λβ'. λέ. καὶ λς'.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΟΥ ΤΡΙΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Ὅρος Πρῶτος.

Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι, ἢ ὧν αἱ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσαι εἰσί.

Διαλαβὼν ἐν τοῖς πρότερον δυσὶ βιβλίοις Εὐκλείδης, ὁ πᾶς κλεὶς τῆς Μαθηματικῆς ἀπάσης ὑμεθόδως παραδοὺς, περίτε τοῦ τριπλεύρων, τετραπλεύρων σχημάτων, καὶ τοῦ πρὸς ἄλληλα τούτων σχέσεων· ἐνταῦθα ἤδη, ὡς περὶ τοῦ ἐν κύκλῳ θεωρουμένων διαληψόμενος, ὅσαγε τῷ κύκλῳ ὑποθετέα, οἱονεὶ ὅρους καὶ προγνώσεις ὑμαρείας χάριν προπάττει. Ἐπεὶ δὲ τὸν τοῦ κύκλου ὁρισμὸν ἐν τῷ πρώτῳ ἐκδέδωκε βιβλίῳ, ἐπὶ τὰ παρόντος γε πᾶς σχέσεις τοῦ κύκλων, καὶ τοῦ ἐν κύκλῳ εὐθειῶντε καὶ γωνιῶν, καὶ τῶν τοῦ κύκλου ἔτι μερῶν ὁρισκῶς διερμηνεύει. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ ἰσότης πρώτη ἐστὶ τῶν σχέσεων, πρὸ τοῦ χάριν καὶ τίνες ἴσοι κύκλοι πρῶτον ὁρίζεται. τοῦ δὲ κύκλου τό, τε μῆκος καὶ πλάτος ἴσον ἔχοντος, καὶ τούτων ἑκάτερον ἀδιόριστον, καὶ τῇ διαμέτρῳ μόνῃ παρισαυόμενον, τοῦτ' ὧν διαμέτρων ἰσότητα γνώρισμα τῆς τῶν κύκλων ἰσότητος τίθησι, λέγων, ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι, ἢ αἱ ἐκ τῶν κέντρων, ἤτοι αἱ ἡμιδιάμετροι ἴσαι εἰσὶ, ὡς οἱ αβγ, εζη, κύκλοι· ὧν αἵτε αγ, εη, διάμετροι ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων δ, καὶ θ, δηλονότι αἱ δα, δβ, δγ, καὶ θε, θζ, θη, ὁμοίως ἴσαι εἰσὶν· ὥστε τἀναντίον, ὧν αἱ διάμετροι, ἢ ἡμιδιάμετροι ἄνισοι, καὶ αὐτοὶ ἄνισοί εἰσιν· οὗ δὲ μείζων ἡ διάμετρος ἢ ἡμιδιάμετρος, καὶ κεῖνος μείζων. τίνος δὲ χάριν τῶν ἀνίσων ἐκ ἐμνήσθη; ἢ ὅτι τῶν ἐναντίον ἡ αὐτή ἐστιν ἐπιστήμη.



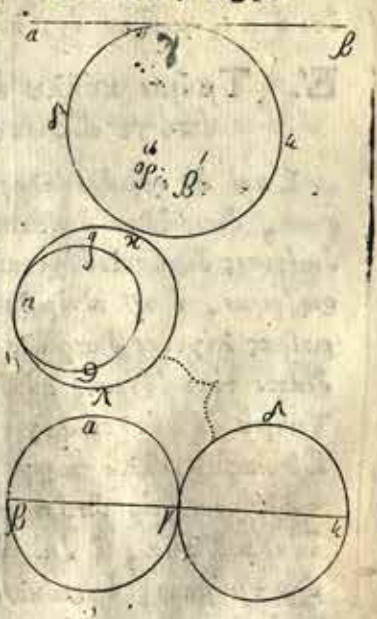
Eucl. Lib. 3. Fig. 1.

Β'. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη ὐ τέμνει τὸν κύκλον.

Τῆς σχέσεως δὲ δικαίως θεωρουμένης, κατ' ὐσίαν δηλονότι, ὡς ἐν τοῖς σωματικοῖς ἢ ἀσωμάτοις· καὶ ποσὸν, ὡς ἐν τοῖς μεγέθεσι καὶ ἀριθμοῖς· κατὰ ποιὸν,

ποιὸν, ὡς ἐν ταῖς ποιότησι χρώμασί τε καὶ τοῖς ὁμοίοις. καὶ τὰ πρός τι, ὡς ἐν τοῖς αἰτίοις καὶ αἰτιατοῖς. κατὰ τὸ πᾶ, ὡς ἐν τοῖς κατὰ τὸν αὐτὸν ἢ διαφόρως κειμένοις τόποις. κατὰ τὸ ποτὲ, ὡς ἐν τοῖς κατὰ τὸν αὐτὸν ἢ διαφόρως γενομένοις χρόνοις. καὶ τὸ κεῖσθαι, ὡς ἐν τοῖς κοινωνοῦσι καὶ διαφέρουσι τῷ θέσιν. κατὰ τὸ ποιεῖν, ὡς ἐν τοῖς ἐνεργοῦσι. κατὰ τὸ πάσχειν, ὡς ἐν τοῖς πάσχουσι. καὶ κατὰ τὸ ἔχειν, ὡς ἐν τοῖς περικειμένοις τε καὶ περιτιθεμένοις. Ἐπεὶ κατ' ἄλλο, ἢ τὸ ποσὸν μόνον οἱ κύκλοι διαφέρουσιν ἀλλήλων, καὶ ἢ κατὰ τοῦτο μόνον ἐν αὐτοῖς διαφορὰ ἐπισάσεως ἀξία, κατ' ἄλλον δέ τινα τῆς θέσεως τρόπον ἐξ ἀναγκαίου γινώσκειν, εἴτε διαφέρουσιν οἱ κύκλοι, εἴτε καὶ μή. τοῦτο χρὴ περὶ τῆς ἰσότητος τῶν κύκλων μόνον εἰπὼν, ἐπὶ τὰς θέσεις μεταβαίνω, τὰς μεταξὺ εὐθειῶν καὶ κύκλων θεωρουμένας, καὶ μηδὲν τοῦτο τὸ τοῦ κύκλου ἔλασσον τμῆμα, τῷ διαφορὰν, ἣν ἔχουσιν αἱ τῶν τμημάτων γωνίαι, καὶ αἱ ἐν τοῖς τμήμασι, διασαφεῖ. καὶ τοῦτο εἰκότως, τό, τε γὰρ τμῆμα καὶ αἱ γωνίαι ἐκ γραμμῶν ὁμοίων ἢ ἀνομοίων συνίστανται. Ἐπεὶ δ' αὐτὴ θέσις μεταξὺ κύκλων καὶ εὐθειῶν κατὰ τὸ ποιεῖν καὶ ἔχειν, ἢ πάσχειν μόνον θεωρεῖται. καὶ γὰρ τὸν κύκλον ἔχειν τῇ εὐθείᾳ φαμὲν ἐντὸς ἢ ἐκτὸς, καὶ τῇ εὐθείᾳ τέμνειν τὸν κύκλον, ἢ πάλιν ἅπτεσθαι, τὸ δὲ τέμνειν ἑκατέρου τοῦ ἅπτεσθαι, διότι τοῦτο τὸ ἅπτεσθαι διὰ τὸ μὴ τέμνειν διασαφεῖ. Ἡνίκα τοίνυν εὐθεῖά τις κύκλου τινὸς ἐφάπτηται, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη τὸ τέμνει τὸν κύκλον, τηνικαῦτα τοῦ κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται ἡ εὐθεῖα, ὡς ἡ αβ, τοῦ γδε, κύκλου ἁπτομένη κατὰ τὸ γ, καὶ ἐκβαλλομένη καὶ τὰ αβ, τὸ τέμνει τὸν γδε, κύκλον.

Eucl. Lib. 3. Fig. 2.



Γ. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων τὸ τέμνουσιν ἀλλήλους.

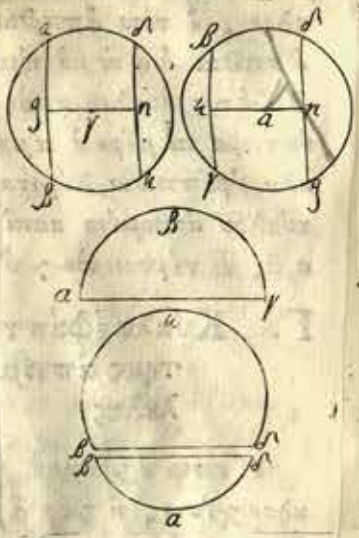
Ὥσπερ ἡ γραμμὴ διττήν πως κέκτηται πρὸς τὸν κύκλον θέσιν, ἢ γὰρ ἅπτεται τούτου, ἢ τέμνει αὐτόν. ἔστω γε καὶ κύκλος πρὸς κύκλον διττὴν ἔχει τὴν θέσιν, ἢ γὰρ ἀλλήλων ἅπτονται οἱ κύκλοι, ἢ τέμνουσιν ἀλλήλους. ὥσπερ δὲ πάλιν ἐν τῇ τῆς γραμμῆς πρὸς τὸν κύκλον θέσει, τὸ μὴ τέμνειν τὴν γραμμὴν τὸν κύκλον γνώρισμα τοῦ ἅπτεσθαι αὐτοῦ ταύτην πεποίηκεν, ὅπου καὶ ταῦθα διὰ τὸ μὴ τέμνειν ἀλλήλους τοὺς κύκλους, ὡς γνωριμωτέρου, τὸ ἅπτεσθαι ἀλλήλων δεδήλωκεν. Ἐπεὶ δέ τι διχῶς συμβαίνειν ἐνδέχεται, ἢ γὰρ ἐντὸς κύκλος κύκλου ἅπτεται, ἢ γὰρ ἐκτός. ὡς ὁ αβγ, τοῦ δγε, ἐκτός. καὶ ὁ ζηθ, τοῦ κηλ, ἐντὸς, καθ' ἑκάτερον τὸν τρόπον ὁ αὐτὸς ἔσται λόγος. ὅσοι μὲν οὖν τῶν κύ-

κύκλων ἐγγίζοντες ἀλλήλοις ὑ τέμνουσιν ἀλλήλους, ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, ἢ ἐκτὸς μόνοι, ἢ ἐντός.

Δ'. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τῶ κέντρῳ εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσι, μᾶλλον δ' ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

Τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν αἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου τῶ κύκλου διέρχονται, αἱ δὲ ἐκτὸς τέτυ, διὸ καὶ ἀπέχειν τοῦ κέντρου λέγονται. ἀλλ' ἐκεῖναι μὲν πᾶσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὁπωσδηποτοῦν διὰ τοῦ κέντρου ἀγόμεναι· αὗται δὲ ὁτὲ μὲν ἴσαι, ὁτὲ δὲ ἄνισοι. καὶ τοῦτο, ἐκ τοῦ μὴ τὸν αὐτὸν ἀεὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρεῖν ἀπόστασιν. Ἔστι δὲ μέζον τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆ ἐν κύκλῳ εὐθειῶν ἀποστάσεως αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὰς εὐθείας ἀγόμεναι κάθετοι. ὅθεν δὴ λοιπὸν αἱ τοιαῦται κάθετοι ἴσαι ὦσιν, ἴσον ἀπέχειν αἱ εὐθεῖαι, ἐφ' ἃς αἱ κάθετοι πίπτουσιν, ἀπέχειν τοῦ κέντρου λέγονται, ὡς αἱ αβ, δε, ἐφ' ἃς ἴσαι πεπτώκασι κάθετοι αἱ γζ, γη. ὅτε δὲ ἡ κάθετος μείζων, μεῖζον ἀπέχειν λέγεται καὶ ἡ εὐθεῖα τοῦ κέντρου, ὥσπερ καὶ τοὐναντίον. ἡ μὲν γὰρ βγ, μεῖζον ἀπέχειν λέγεται τοῦ α, κέντρου, ἐφ' ἣν ἡ αε, κάθετος πίπτει, ἔλαττον δὲ ἡ δζ, ἐφ' ἣν ἡ αη, ὅτι ἡ αε, μείζων ἐστὶ τῆς αη.

Eucl. Lib. 3. Fig. 3.



Ε'. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

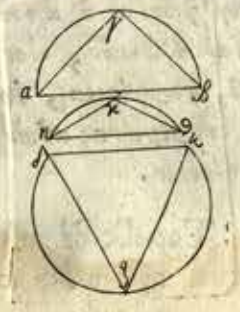
Ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ κύκλος, ὡς πρὸ δύο μεπέχων διαστάσεων, διαιρεῖσθαι δυνατὸν εἰς μέρη ἴδια· ἡ δὲ τοῦ κύκλου διαίρεσις διχῶς ἐνδέχεται γενέσθαι, ἢ κατὰ τὸν αὐτὸν περιφέρειαν, ἢ κατὰ τὸ ἐμβαδόν· καὶ κατὰ μὲν τὸν πρῶτον, εἰς μοίρας λέγεται διαιρεῖσθαι, κατὰ δὲ τὸν δεύτερον εἰς μέρη· διάπερ τοῦτο ἐδόκησεν αὐτῷ καὶ τὸ τοῦ κύκλου ὁρίσασθαι μέρος. Τμῆμα δὴ κύκλου λέγεται ὃ τὸ τυχὸν, ἀλλὰ τὸ ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας περιεχόμενον, ὡς τὸ βαδ, περιέχεται γὰρ ὑπό τε τῆς βδ, εὐθείας, καὶ τῆς βαδ, περιφερείας. ἐπεὶ δὲ ἡ ἐν κύκλῳ εὐθεῖα, ἢ διὰ τοῦ κέντρου, ἢ μὴ, διέρχεται· δῆλα παύτως ἐστὶ τὰ τοῦ κύκλου τμήματα, ἡμικύκλιον, μεῖζον τμῆμα, καὶ ἔλαττον. Καὶ ἡμικύκλιον μέν ἐστι τὸ ἐπὶ τῆς περιεχούσης αὐτὸ εὐθείας τὸ κέντρον ἔχον, ὡς τὸ αβγ. μεῖζον δὲ τμῆμα τὸ ἐντὸς τῆς τε εὐθείας καὶ περιφερείας, ὡς τὸ βεδ. καὶ ἔλαττον τὸ ἐκτὸς αὐτοῦ τὸ κέντρον ἔχον, ὡς τὸ βαδ. περὶ ὧν εὐκρινέστερον εἴρηται, ἐν τῷ ιζ'. καὶ ιη'. ὅρῳ τοῦ α'.

ε'. Τμή-

ς'. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

Ὑπογράψας ἤδη τὸ τοῦ κύκλου τμῆμα, καὶ ἑνὶ τῶν τρίων τούτου εἴδη ἐμπεριλαβὼν ὄρῳ, βέλεται ἐπίτε τοῦ παρόντος καὶ τοῦ ἑξῆς δεῖξαι, καὶ πόσα τὰ εἴδη τῆς ἐπὶ τοῦ τμήματος τοῦ κύκλου περιεχομένης γωνίας. Δύο δὲ ταῦτα, ἥ μὲν γὰρ λέγεται τμήματος γωνία, ἡ δὲ ἐν τμήματι. Τίς μὲν οὖν ἡ τοῦ τμήματος γωνία, ἐνταῦθα δείκνυσι, λέγων· Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας. ὥστε ἡ τοῦ τμήματος γωνία τοῦ μικτοῦ ἐστιν εἴδος· περιέχεται γὰρ ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας, τοιαύτη δὲ ἡ πρὸς τῷ α, καὶ β. Ἐπεὶ δὲ ὁ κύκλος τειχῇ δυνάται διαιρεῖσθαι, εἰς ἡμικύκλιον, εἰς μεῖζον τμῆμα, καὶ ἔλαττον· τρεῖς πάντως γε καὶ τὰς τῶν τμημάτων δυνάμεθα ἐννοεῖν τὰς γωνίας· καὶ τὴν μὲν ἡμικυκλίου γωνίαν καλεῖν χρεών· τὴν δὲ τοῦ μείζονος τμήματος· καὶ τὴν λοιπὴν ἐλάττονος· Ἡμικυκλίου μὲν οὖν γωνία ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ α, ἡ πρὸς τῷ β, ἥτις ὑπό τε τοῦ α γ β, ἡμικυκλίου περιέχεται, καὶ τῆς α β, διαμέτρου· μείζονος δὲ τμήματος ἡ πρὸς τῷ δ, ἡ ε, ἡ ὑπό τε τῆς δ ε, περιεχομένη χορδῆς, καὶ τῆς δ ζ ε, περιφερείας μείζονος τοῦ ἡμικυκλίου· τοῦ δὲ ἐλάττονος τμήματος ἡ πρὸς τῷ η, ἡ θ, ὑπό τε τῆς η θ, χορδῆς περιεχομένη καὶ τῆς η κ θ, περιφερείας ἐλάττονος ἡμικυκλίου.

Eucl. Lib. 3. Fig. 4.



ζ'. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ὑπὸ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

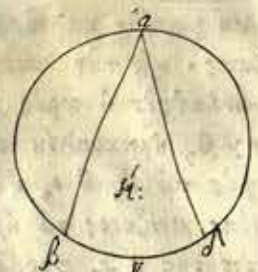
Δεδειχὼς ἐν τῷ ἀνωτέρω τίς ἡ τοῦ τμήματος γωνία, ἐπὶ τοῦ παρόντος, καὶ τίς ἡ ἐν τμήματι, διασαφεῖ, γωνία. Ἔστι δὲ ἡ ἐν τμήματι γωνία τοῦ ἁπλοῦ εἴδους, ὑπὸ εὐθειῶν μόνον περιεχομένη γραμμῶν, οἷα ἐστὶν ἡ ὑπὸ α γ β, ἡ η κ θ, ἡ δ ζ ε. ἡ μὲν ὑπὸ τῶν α γ, γ β, εὐθειῶν περιεχομένη, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν η κ, κ θ, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν δ ζ, ζ ε. Ἄγονται δὲ αἱ τὴν ἐν τμήματι γωνίαν περιέχουσαι γραμμαὶ ἀπὸ τοῦ τυχόντος ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος σημείου, ὡς αἱ α γ, γ β, ἀπὸ τοῦ γ· περατοῦνται δὲ ταῖς πέρασι τῆς βάσεως τοῦ αὐτοῦ τμήματος, ὡς αἱ α γ, γ β, αἵπερ ἀρχὴν μὲν ἔχουσι τὸ γ, τυχὸν σημεῖον τῆς α γ β, περιφερείας, πέρατα δὲ τὰ α, καὶ β, σημεῖα, πέρατα ὄντα καὶ τῆς α β, βάσεως τοῦ α γ β, τμήματος. Ἀλλ' ἐπεὶ καὶ ἐνταῦθα τρία δυνάμεθα ἐννοεῖν τὰ τοῦ κύκλου τμήματα, ὡς εἴρηται ἐν τῷ ε'. ὅρῳ, ἓξ εἰς δύο πάντα ἐσὶ καὶ αἱ ἐν τμήματι γωνίαι, ἡ ἐν ἡμικυκλίῳ, οἷα ἡ ὑπὸ α γ β· ἡ ἐν ἐλάττονι τμήματι, οἷα ἡ ὑπὸ η κ θ, καὶ ἡ ἐν μείζονι, οἷα ἡ ὑ-

πὸ

πὸ δ ζ ε. καὶ ἡ μὲν ἐν ἡμικυκλίῳ ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς, καὶ ἡ ἐν μείζονι τμήματι, ἐλάττων, ὡς δειχθήσεται προτάσει λά. τῶν παρόντος.

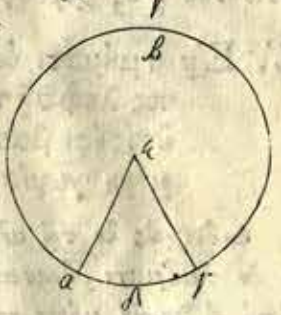
Η'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

Ἐπεὶ τῆς ἐν κύκλῳ γωνίας παρὰ τὰς περιεχούσας αὐτὴν εὐθείας, καὶ βάσιν τῆς αὐτῆς θεωρεῖν δέον τῷ τῶν μαθηματικῶν γλισχομένῳ ἡδυσμάτων, διά τοι τοῦτο ἐπὶ τοῦ παρόντος διδάσκει, καὶ τίς ἡ τῆς ἐν κύκλῳ γωνίας βάσις. Ἔστι δὴ βάσις τῆς ἐν κύκλῳ γωνίας ἡ ἀπολαμβανομένη τοῦ κύκλου περιφέρεια ὑπὸ τῶν περιεχουσῶν τὴν γωνίαν εὐθειῶν, οἷον ἐπὶ τοῦ α β δ, κύκλου, βάσις τῆς ὑπὸ δ α β, γωνίας ἐστὶν ἡ δ γ β, περιφέρεια, ἐφ' ἧς καὶ βεβηκέναι λέγεται ἡ αὐτὴ γωνία. διὰ τὸ τὰς α δ, α β, περιεχούσας αὐτὴν εὐθείας ἀπολαμβάνειν τὴν δ γ β, περιφέρειαν. Eucl. Lib. 3. Fig. 5.



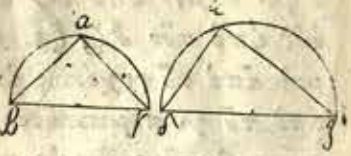
Θ'. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστίν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ αὐτοῦ τοῦ κύκλου συσταθῇ ἡ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.

Καὶ ὁ τομεὺς μέρος κύκλου ἐστὶν, διενήνοχε δὲ τοῦ τμήματος τοῦ κύκλου· ὅτι τὸ μὲν τμῆμα ὑπό τε μιᾶς εὐθείας, καὶ περιφερείας κύκλου περιέχεται, ὁ δὲ τομεὺς περιέχεται ὑπό τε δύο εὐθειῶν, καὶ κύκλου περιφερείας, οἷον τὸ α δ γ ε, σχῆμα. δεῖ δὲ ἀεὶ τὰς δύο τοῦ τομέως εὐθείας ἐν μὲν τῷ τοῦ κύκλου κέντρῳ ἁπλᾶς συνάπτεσθαι, περατοῦσθαι δὲ ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.



Ι'. Ὅμοια τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐπειδήπερ δύο ἄνισοι κύκλοι εἰς τμήματα ἄνισα μὲν, ὅμοια δὲ διαιρεθῆναι δυνάνται, τοῦτου ἕνεκα διδάσκει ἡμᾶς ἐπὶ τοῦ παρόντος, καὶ ὅπως ἔχομεν διαγινώσκειν καὶ τίνα τῶν τοῦ κύκλου τμημάτων ὅμοια, τίνα δ' ἀνόμοια. Ὅμοια τοίνυν τμήματα κύκλου ἐστὶν, ὅσα δέχεται γωνίας ἴσας, ἢ τὰ ἐν οἷς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, οἷα τὰ α β γ, ε δ ζ. εἴρηκε δὲ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἐχὶ δὲ ὧν αἱ γωνίαι ἴσαι, ὅτι ἄλλο μέν ἐστι γωνία τμήματος, καὶ



ἄλλο

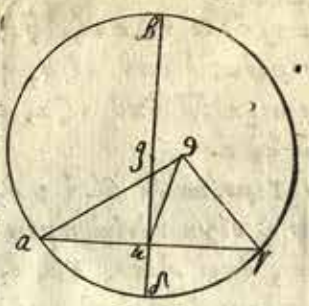
ἄλλο δὲ γωνία ἐν τμήματι, διὸ προσέθηκε καὶ τὸ, ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Πρότασις Α'. Πρόβλημα.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγδ, καὶ ζητηθήτω τὸ κέντρον αὐτοῦ. Ἀχθήτω δὴ ἡ αγ, διάμετρος, ὡς ἔτυχεν, ἐντὸς τοῦ κύκλου, καὶ τμηθείσης δίχα τῆς αγ, κατὰ τὸ ε, ἀνεστάθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ εβ, ἀπὸ τοῦ ε, σημείου, περατουμένη ἑκατέρωθεν ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. τῆς δὲ βδ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ ζ, τὸ ζ, λέγω κέντρον εἶναι τοῦ δοθέντος κύκλου. εἰ γὰρ μή, ἔστω κέντρον τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θα, θε, θγ. Ἐπεὶ οὖν αἱ αε, εγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κατὰ τὶν κατασκευήν. τῆς θε, κοινῆς λαμβανομένης, αἱ δύο αε, εθ, ἴσαι εἰσὶ πάντως δυσὶ ταῖς θε, εγ, ἔστι δὲ καὶ ἡ αθ, βάσις ἴση τῇ θγ, κατὰ τὸν ι. ὅρον τοῦ ά. ἄρα κατὰ τὸν η. τοῦ αὐτοῦ τὰ αεθ, θεγ, τρίγωνα ἴσά ἐστι, καὶ αἱ ὑπὸ αεθ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ θεγ, καὶ ἑκατέρα ὀρθὴ κατὰ τὸν ι. ὅρον τοῦ αὐτοῦ. ὥστε ἡ ὑπὸ θεγ, ὀρθή ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζεγ, ὀρθή, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ζεγ, τῇ ὑπὸ θεγ, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα τὸ θ, ἄλλα τὸ ζ, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγδ, δοθέντος κύκλου. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 3. Fig. 6.

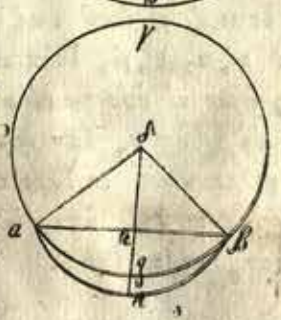


ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπ' αὐτῆς ἔσται τὸ κέντρον. καὶ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἄλλήλας τέμνουσιν, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ἔσται τὸ κέντρον.

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῶσι δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.



Ἐπὶ τῆς περιφερείας ἤδη τοῦ αγβ, κύκλου ληφθήτωσαν, ὡς ἔτυχε, τὰ α, καὶ β, σημεῖα. Λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ αβ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς τοῦ κύκλου πίπτει. εἰ γὰρ δυνατὸν πιπτέτω ἐκτὸς, ὡς ἡ αηβ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δα, δβ. τῆς δὲ αηβ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ η, ἐπεζεύχθω ἡ δη. καὶ ἐπεὶ αἱ δα, δβ, ἴσαι εἰσὶ καὶ τὸν ιε. ὅρον τοῦ ά. παύπωγε καὶ τὸν έ. τοῦ αὐτοῦ αἱ ὑπὸ δαβ, δβα, γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἰσοσκελὲς γὰρ τὸ αδβ, τρίγωνον. ἀλλ' ἐπεὶ καὶ τὸν ις'. τοῦ αὐτοῦ ἡ ὑπὸ δηα, γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δβη, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ αὐτὴ δηα, γωνία καὶ τῆς ὑπὸ δαη, ὥστε καὶ τὸν ιθ'. τοῦ ά.

ἡ δα, ἡ τῷ μείζονα γωνίαν ὑποτείνουσα μείζων ἐστὶ τῆς δη, ἴση δὲ ἡ δα, ἡ δζ, ὡς ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κέντρου, ἄρα καὶ ἡ δζ, μείζων ἐστὶ τῆς δη, τὸ μέρος τοῦ ὅλου, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου ἡ αβ. Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἡ καθ' πλείονα σημεῖα, ἢ εἰ ἅπτομένη τοῦ κύκλου εὐθεῖα πέμνει τὸν κύκλον, καὶ ἐκ ἅπτεται αὐτοῦ.

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

Ἐν κύκλῳ τῷ αβδ, εὐθεία ἡ γδ, διὰ τοῦ ε, κέντρου ἡγμένη τεμνέτω τινὰ αβ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου, τὸ πρῶτον δίχα κατὰ τὸ ζ, σημεῖον. Λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει. εἰλήφθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου αἱ αε, εβ, καὶ ἐπεὶ αἱ αε, εβ, ἴσαι εἰσὶ καὶ τὸν ιέ. ὅρον τοῦ α. κοινὴ δὲ ἡ εζ, πάντως γε αἱ δύο αε, εζ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς βε, εζ. ἔστι δὲ καὶ ἡ αζ, βάσις τῇ βζ, βάσει ἴση, ἄρα καὶ ὅλον τὸ αεζ, τριγώνον ἴσόν ἐστι τῷ βεζ, τριγώνῳ κατὰ τὸν ἡ. τοῦ α. καὶ ἑπομένως ἡ ὑπὸ εζα, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εζβ. κατὰ τὸν ι. ἄρα ὅρον τοῦ α. ἑκατέρα τῶν ὑπὸ εζα, εζβ, ὀρθή ἐστι, καὶ ἡ γδ, κάθετος ἐπὶ τῆς αβ. ὅπερ ἦν τὸ α.

Eucl. Lib. 3. Fig. 7.

Τεμνέτω δὴ β'. ἡ γδ, τὴν αβ, πρὸς ὀρθάς. Λέγω, ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ αἱ αε, εβ, εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν, ἔσονται πάντως ἴσαι καὶ αἱ ὑπὸ εαζ, εβζ, γωνίαι. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ εζα, εζβ, ἴσαι ἀλλήλαις, ἄρα τῶν αεζ, ζεβ, τριγώνων αἱ δύο γωνίαι ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ἔστι δὲ καὶ ἡ εα, ἴση τῇ εβ, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς εἰσὶν ἴσαι κατὰ τὸν κ'. τοῦ α. ὥστε ἡ αζ, ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, ὅπερ ἦν τὸ β'. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖαν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α'. Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν παντὶ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ ἡ τὴν βάσιν δίχα τέμνουσα κάθετός ἐστιν ἐπ' αὐτῆς. καὶ πάλιν, καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτοῦ γωνία δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς καθέτου.

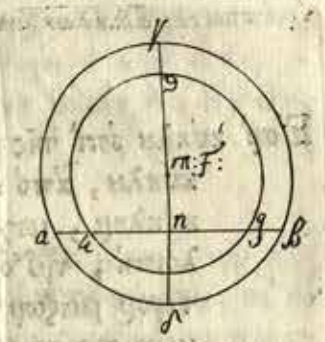
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Β'. Ἔτι συνάγεται, ὅτι ἐν τοῖς ὁμοκέντροις κύκλοις τὸ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τμῆμα τῆς τεμνούσης αὐτοὺς εὐθείας ἴσον ἀλλήλοις ἐστίν, ἐπὶ γὰρ τῶν

αγβδ,

κγ βδ, καὶ εθζ, ὁμοκέντρων κύκλων, ἐπεὶ τῆς αβ, τεμούσης τὰς αη, ηβ, μέρη ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, καὶ τῶν αὐτέρω. ὡσαύτως καὶ τὰ εη, ηζ, ἐὰν τὰ ἴσα εη, ηζ, παρὰ τὴν ἴσων αη, ηβ, ἀφαιρεθῶσιν, ἐναπολειφθήσονται τὰ αε, ζβ, τμήματα, τὰ μεταξὺ τῆς περιφερειῶν τῶν ὁμοκέντρων κύκλων ἴσα, καὶ τὸ γ'. ἀξίωμα.

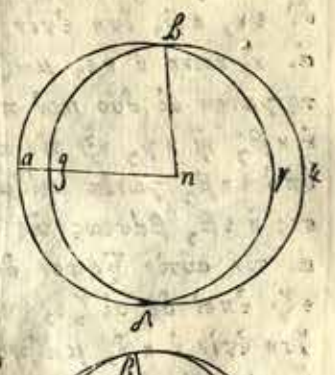
Euclid. Lib. 3. Fig. 8.



Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἐν κύκλῳ γὰρ τῷ αβγδ, τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ αγ, δβ, εὐθεῖαι καὶ τὸ ε, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι. Λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ἡ μὲν βε, ἴση τῇ εδ, ἡ δὲ αε, τῇ εγ· καὶ εἰλήφθω διὰ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν ἡ ζε. κατὰ τῶν αὐτέρω ἄρα ἴσαι εἰσὶν αἵτε ὑπὸ ζεγ, γωνία, καὶ ἡ ὑπὸ ζεδ, ὀρθαὶ, καὶ ἐπομένως ἴσαι, τὸ ὅλον δηλονότι τῷ μέρει, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις Ε'. Θεώρημα.

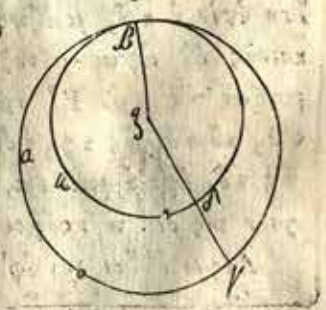
Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ αβγδ, καὶ βεδζ, τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ β, δ, σημεῖα. Λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω ἑκατέρου τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ η· καὶ εἰλήφθωσαν αἱ βη, ηζα, εὐθεῖαι. Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν αη, ζη, εὐθειῶν ἴση ἐστὶ τῇ βη, καὶ τὸν ἐξ. ὅρον τῶν ἀ. παντὸς γε καὶ ἀλλήλαις ἴσαι εἰσὶν, ἴση ἄρα ἡ αη, τῇ ζη, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ς'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ αβγ, βδε, ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ β. Λέγω μὴ εἶναι τὸ αὐτὸ ἀμφοῖν κέντρον. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω ἑκατέρου τῶν κύκλων τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βζ,



αἱ βζ, ζδγ· ἐπεὶ ὃν κῶ τὸν ιέ. ὅρον τῶ ά. ἑκατέρα τῆ ζδ, κὴ ζγ, ἴση ἐστὶ τῆ βζ. παντως γε κῶ τὸ ά. ἀξίωμα ἡ ζδ, ἴση ἐστὶ τῆ ζγ, ἡ ἐλάττων τῆ μείζονι, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα τὸ αὐτὸ κεντρον ἀμφοῖν ἐστιν. Ἐαν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς κὴ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ἐαν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῆ τι σημεῖον, ὃ μὴ ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή, τῶν δ' ἄλλων αἰεὶ ἡ ἐγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπωτέρω μείζων ἐστίν, δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἤδη τοῦ αβγ, κύκλου, τῆς αδ, ληφθήτω τυχὸν σημεῖον τὸ ε, κὴ προσπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ ε, σημείου αἱ εβ, εγ, εζ, εὐθεῖαι. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν εα, ἡ διὰ τοῦ κ, κέντρου μεγίστη ἐστὶν, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπὴ εδ, τῶν δ' ἄλλων ἡ μὲν εβ, μείζων τῆς εγ, ἡδὲ εγ, τῆς εζ. ἐπιζευχθεισῶν γὰρ τῶν βκ, γκ, ζκ, ἐπεὶ αἱ εκ, κβ, μείζονές εἰσι τῆς εβ, κὴ τλω κ'. τοῦ ά. ταῖς δὲ εκ, κβ, ἴση ἐστὶν ἡ εα, ἡ γὰρ κα, ἴση ἐστὶ τῇ κβ, κὴ τὸν ιέ. ὅρον τοῦ ά. κὴ κοινὴ ἡ κε, μείζων ἄρα ἐστὶ κὴ ἡ εα, τῆς εβ. Αὐθις ὧν εκβ, κὴ εκγ, τετγώνων αἱ δύο μὲν πλευραὶ εκ, κβ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς εκ, κγ, ἴση γὰρ ἡ κβ, τῇ κγ, κὴ τὸν αὐτὸν ὅρον, κὴ κοινὴ ἡ εκ, ἡ δὲ ὑπὸ εκβ, γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ εκγ, ὥστε κὴ βάσις ἡ εβ, βάσεως τῆς εγ, μείζων ἐστὶ κὴ τλω κδ'. τοῦ ά. τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται κὴ ἡ εγ, μείζων τῆς εζ. ἐπεὶ δὲ αἱ ζε, εκ, μείζονές εἰσι τῆς ζκ, τῇ δὲ ζκ. ἴση ἐστὶν ἡ κδ, μείζονες ἄρα εἰσὶν αἱ ζε, εκ, κὴ τῆς κδ, κοινῆς δὲ ἀφαιρεμένης τῆς κε, ἐναπολειφθήσεται ἡ εζ, μείζων τῆς εδ. Εἰ οὖν ἡ μὲν εα, μείζων δέδεικται τῆς εβ, αὖτη δὲ τῆς εγ, ἡ δὲ εγ, μείζων ἐστὶν ὁμοίως τῆς εζ, δέδεκται δὲ κὴ ἡ εζ, μείζων τῆς εδ, ἄρα ἡ μὲν εα, μεγίστη ἐστὶν, ἡδὲ εδ, ἐλαχίστη, τῶν δ' ἄλλων αἰεὶ ἡ ἐγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπωτέρω μείζων ἐστὶν· ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Euclid. Lib. 3. Fig. 9.

Λέγω δ' ἔτι κὴ ἐφ' ἑκάτερα τῆς εδ, δύο μόνας εὐθείας ἴσας προσπίπτειν. γεγράφθω δὴ τῇ ὑπὸ ζκδ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ δκθ, κὴ τλω κγ. τοῦ ά. κὴ ἐπεζεύχθω ἡ εθ. κὴ ἐπεὶ ἡ ζκ, ἴση ἐστὶ τῇ κθ, ὡς ἐκ τοῦ κέντρου ἄμφω, κοινὴ δὲ ἡ κε, παντως γε αἱ δύο ζκ, κε, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς θκ, κε, γέγονε δὲ κὴ γωνία ἡ ὑπὸ ζκε, ἴση τῇ ὑπὸ θκε, κὴ βάσις ἄρα ἡ ζε, βάσει τῇ εθ, ἴση ἐστὶ κὴ τλω δ'. τοῦ αὐτοῦ. ὅτι δὲ ἑτέρα ἄλλη εὐθεῖα δυνατὸν προσπεσεῖν ἴση τῇ εζ,

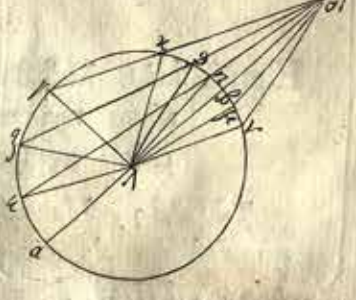
πλω

πλευρᾷ τῆς ε θ, δῆλον. προσπιπτέτω γὰρ, εἴγε δυνατὸν, ἡ ε κ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κ κ. καὶ ἐπεὶ αἱ ζ κ, κ ε, ἴσαι εἰσὶ ταῖς κ η, κ ε, ἡ γὰρ ζ η, ἴση ἐστὶ τῇ κ κ, καὶ τὸν ι ε, ὅρον τῶν ά. καὶ κοινὴ ἡ κ ε, ἔστι δὲ καὶ ἡ ζ ε, ἴση τῇ ε κ, καὶ τλὺ ὑπὸ θεσιν, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ζ κ ε, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κ κ ε, καὶ τλὺ ἡ. τῶν αὐτῶν, ἀλλὰ τῇ ὑπὸ ζ κ ε, ἴση γέγονε ἡ ὑπὸ θ κ ε, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ θ κ ε, τῇ ὑπὸ κ κ ε, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου λαφθῇ τι σημεῖον, ὃμή ἐστι καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου λαφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ, ὡς ἔτυχε, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη μὲν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἐγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἐγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερον ἐστιν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ἑφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἐκτὸς γὰρ τοῦ α β γ, κύκλου, ληφθήτω σημεῖόν τὸ δ, ἀφ' οὗ διαχθήτωσαν εὐθεῖαι πρὸς τὸν κύκλον, αἱ δ α, δ ε, δ ζ, δ γ, ὧν ἡ μὲν δ α, ἔστω διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ ἄλλαι, ὡς ἔτυχε. Λέγω δὴ ά. ὅτι τῶν πρὸς τὴν α ε ζ γ, κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ α δ, τῶν δὲ ἄλλων ἡ δ ε, μείζων τῆς δ ζ, καὶ ἡ δ ζ, μείζων τῆς δ γ. Ἀχθήτωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ λ, κέντρου αἱ λ γ, λ ζ, λ ε, καὶ ἐπεὶ αἱ ε λ, λ δ, μείζονές εἰσι τῆς ε δ, καὶ τὴν κ. τοῦ ά. ταῖς δὲ ε λ, λ δ, ἴση ἐστὶν ἡ α δ, ἴση γὰρ ἡ α λ, τῇ ε λ, καὶ τὸν ιέ. ὅρον τοῦ αὐτοῦ, καὶ κοινὴ ἡ λ δ, παντὸς γε καὶ ἡ α δ, μείζων ἐστὶ τῆς ε δ. αὖθις ἐπεὶ αἱ ε λ, λ δ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ζ λ, λ δ, ἴση γὰρ ἡ ε λ, τῇ ζ λ, καὶ κοινὴ ἡ λ δ, ἡ δὲ ὑπὸ ε λ δ, γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ζ λ δ, δῆλον, ὅτι καὶ βάσις ἡ ε δ, μείζων ἐστὶ τῆς ζ δ, καὶ τὴν κ δ'. τοῦ αὐτοῦ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ ζ δ, μείζων τῆς γ δ, ἐπεὶ οὖν ἡ α δ, μείζων δέδεικται τῆς ε δ, αὕτη δὲ τῆς ζ δ, ἡ δὲ ζ δ, τῆς γ δ, ἄρα ἡ μὲν α δ, μεγίστη ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν ἄλλων δὲ ἡ ἐγγιον ταύτης τῆς ἀπώτερον μείζων. ὅπερ ἐστὶ τὸ ά.



Eucl. Lib. 3. Fig. 10.

Λέγω δ' ἔτι, ὅτι τῶν πρὸς τὴν β η θ κ, κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ δ β, ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου δ, καὶ τῆς διαμέτρου β α,

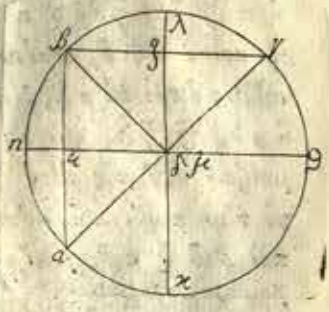
τῶν

τῆ δ' ἄλλων ἡ δν, ἐλάττων τῆς δϑ, ἢ ἡ δϑ, τῆς δκ. Ἀχϑήτωσαν γὰρ ἀπὸ τῦ λ, κέντρῳ αἱ λν, λϑ, λκ, καὶ ἐπεὶ αἱ λν, νδ, μείζονές εἰσι τῆς λδ, κατὰ τλῶ κ'. τῦ α'. ἡ δὲ λν, ἴση ἐστὶ τῆ λβ, καὶ τὸν ιέ. ὅρον τῦ αὐτῦ, ἐγκαπλείπεται πάντως ἡ νδ, μείζων τῆς βδ. Πάλιν ἐπεὶ ἐντὸς τῦ λϑδ, ἔσηγώνε ἐπὶ τῆς λδ, πλευρᾶς δύο εὐθεῖαι συνεστάθησαν αἱ λν, νδ, πάντως γε καὶ τλῶ κά. τῦ αὐτῦ, αἱ δύο αὗται συσταθεῖσαι εὐθεῖαι, ἐλάττονές εἰσι τῆ λϑ, ϑδ, ἀλλ' ἡ λν, ἴση ἐστὶ τῆ λϑ, καὶ τὸν ιέ. ὅρον τῦ αὐτῦ, ἄρα ἀφαιρεθεισῶν τῆ λν, λϑ, ἐγκαπλείπεται ἡ νδ, ἐλάττων τῆς ϑδ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχϑήσεται καὶ ἡ ϑδ, ἐλάττων τῆς κδ, ὥστε ἐπεὶ ἡ βδ, ἐλάττων δέδεικται τῆς νδ, ἡ δὲ νδ, τῆς ϑδ, καὶ αὖτε τῆς κδ. ἡ βδ, πολλῶ μᾶλλον ἐλαχίστη ἐστὶν, καὶ ἡ ἔγγιον ταύτης τῆς ἀπώτερον μείζων, ὅπερ ἦν τὸ β'.

Λέγω γ'. ὅτι ἐφ' ἑκάτερα τῆς βδ, δύο μόναι εὐθεῖαι ἴσαι πίπτουσι. γενέσθω δὴ τῆ ὑπὸ νλβ, γωνία ἴση ἡ ὑπὸ βλμ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δμ, καὶ ἐπεὶ ἡ λν, ἴση ἐστὶ τῆ λμ, κοινὴ δὲ ἡ λδ, πάντως γε αἱ δύο νλ, λδ, δυσὶ ταῖς μλ, λδ, ἴσαί εἰσι, γέγονε δὲ καὶ τῆ ὑπὸ νλβ, γωνία ἴση ἡ ὑπὸ μλβ, ἄρα καὶ βάσις ἡ δβ, βάσει τῆ δμ, ἴση ἐστὶ καὶ τλῶ δ'. τῦ α'. Ὅτι δὲ οὐδὲ δυνατὸν ἑτέραν τινὰ προσπίπτειν ἴσην τῆ δν, πλεῖω τῆς δμ, δῆλον. Πιπτέτω γὰρ ἡ δξ, εἴγε δυνατόν· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ λξ, καὶ ἐπεὶ ἡ δξ, ἴση ἐστὶ τῆ δν, πάντως γε ἴση ἐστὶ καὶ τῆ δμ, καὶ τὸ ά. ἀξίωμα. ἔστι δὲ καὶ ἡ λμ, ἴση τῆ λξ, καὶ βάσις ἡ αὐτὴ δλ, ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δμλ, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῆ ὑπὸ δξλ, καὶ τλῶ ή'. τῦ α'. ἡ ἐντὸς τῆ ἐκτὸς, ὅπερ ἄτοπον καὶ τλῶ κα'. τῦ αὐτῦ. Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῆ τι σημεῖον ἐκτὸς ἀπὸ δὲ τῦ σημείυ πρὸς τὸν κύκλον καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλυ ληφθῆ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τῦ σημείυ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτυσι πλείους, ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῦ κύκλυ. *Eucl. Lib. 3. Fig. 11.*



Τῦ αβγ, ἤδη κύκλυ ἐντὸς ληφθήτω σημεῖον τὸ δ, καὶ ἀπ' αὐτῦ ἀχϑήτωσαν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ δα, δβ, δγ. Λέγω, ὅτι τὸ δ, κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλυ. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αβ, βγ, καὶ τμηθήτωσαν δίχα κατὰ τὰ ε, ζ, σημεῖα, καὶ ἀχϑήτωσαν αἱ εδ, ζδ, περατέμενται καὶ τὰ νϑ, καὶ κλ, σημεῖα. καὶ ἐπεὶ αἱ αε, εβ, ἴσαί εἰσι, καὶ κοινὴ ἡ εδ, δύο δὴ, αἱ αε, εδ, ἴσαί εἰσι δυσὶ ταῖς βε, εδ, ἔστι δὲ καὶ βάσις ἡ αδ, βάσει τῆ βδ, ἴση, ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αεδ, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῆ ὑπὸ βεδ, καὶ τλῶ ή. τῦ α'. κάϑετος ἄρα ἡ νϑ, ἐπὶ τῆς βα. Ἐπεὶ δ' αὖϑις ἡ βα, τέμνεται ὑπὸ τῆς νϑ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς, πάντως καὶ τλῶ γ'. τῦ παρόντος

πος ἐπὶ τῆς ηθ, ἐστὶ τὸ κέντρον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς κλ, ὁμοίως ἐστὶ τὸ κέντρον. ἀλλὰ τῆ ηθ, κλ, κοινὴ τομή ἐστι τὸ δ, σημεῖον, τὸ δ, ἄρα σημεῖόν ἐστι τὸ κέντρον τῦ αβγ, κύκλυ. Ἐὰν ἄρα κύκλυ λεφθῆ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τῦ σημείυ πρὸς τὸν κύκλον καὶ τὰ ἑξῆς.

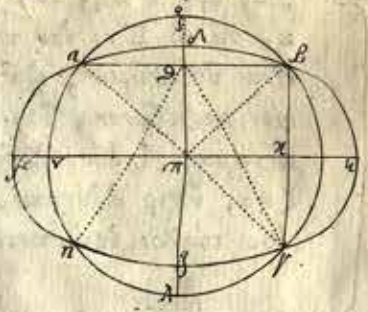
Ἄλλως. Ἐπὶ τῦ αὐτῦ χήματος τῶν αὐτῶν ὑποτιθεμένων, λέγω, ὅτι τὸ δ, σημεῖον, ἐστὶ τὸ κέντρον τῦ αβγ, κύκλυ· εἰ γὰρ μὴ, ἔστω τὸ μ· καὶ διήχθω διὰ τῦ δ, καὶ μ, ἡ ηθ· καὶ ἐπεὶ ἡ θη, διάμετρός ἐστι, καὶ ἐπ' αὐτῆς εἴληπται τυχὸν σημεῖον τὸ δ, ἀφ' ἑ αἱ δθ, δγ, δβ, πρὸς τλὼ περιφέρειαν τῦ κύκλυ προσπίπτυσι, παίπως γε ἡ δθ, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον μεγίστη ἐστὶ καὶ τλὼ ζ'. τῦ παρόντος, ἡ δὲ γδ, μείζων ἐστὶ τῆς δβ, ἀλλ' ὑπετέθη καὶ ἴση, ἄτοπον ἄρα. Ὁμοίως δὴ δείζομεν, ὅτι ὐδὲ ἄλλο τι σημεῖον κέντρον ἐστὶ παρὰ τὸ δ. τὸ δ, ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ι'. Θεώρημα.

Κύκλος ὐ τέμνει κύκλον καὶ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατὸν τεμνέτω ὁ αβγ, κύκλος τὸν δεζ, καὶ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο, τὰ α, β, γ, η. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, ὧν δίχα τετμημένων κατὰ τὰ θ, κ, διὰ τῆς λ. τῦ ά. ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τῦ θ, κ, τῆ μὲν αβ, ἡ θλ, τῆ δὲ βγ, ἡ κν, περατέτμηνται καὶ τὰ ξ, καὶ ε. καὶ ἐπεὶ τὰς αβ, βγ, εὐθείας μὴ διὰ τῦ κέντρυ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέτμηκεν αἱ ξλ, ον, εὐθεῖαι, παίπως γε καὶ τλὼ γ'. τῦ παρόντος ἐφ' ἑκατέρας τῶν ξλ, ον, ἐστὶ τὸ τῦ αβγ, κύκλυ κέντρον· αἱ δὲ ξλ, ον, κατ' ὐδὲν ἄλλο ξυμβάλλυσιν ἀλλήλαις, ἢ τὸ π, τὸ π, ἄρα κέντρον ἐστὶ τῦ αβγ, κύκλυ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται τὸ αὐτὸ π, σημεῖον κέντρον εἶναι καὶ τῦ δεζ, ἄρα δύο κύκλων τεμνόντων ἀλλήλυς τὸ αὐτό ἐστι κέντρον, ὅπερ ἄτοπον, καὶ τλὼ ε'. τῦ παρόντος· ὐ τέμνει ἄρα κύκλος κύκλον καὶ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ἢ καὶ ἄπως. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τῦ αβγ, κύκλυ, καὶ ἔστω τὸ π, ἀφ' ἑ ἀγόμεναι εὐθεῖαι πρὸς τλὼ περιφέρειαν τῦ αὐτῦ κύκλυ αἱ πα, πβ, πγ, ἴσαι ἔσονται καὶ τὸν ιέ. ὅρον τῦ ά. ἀλλ' ἐπεὶ ἐντὸς τῦ δεζ, κύκλυ εἴληπται τὸ αὐτὸ π, σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτῦ πρὸς τλὼ τῦ δεζ, κύκλυ περιφέρειαν ἤχθησαν πλείονες, ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι αἱ πα, πβ, πγ, τὸ π, ἄρα καὶ τλὼ ἀνωτέρω κέντρον ἐστὶ καὶ τῦ δεζ, κύκλου. δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τὸ αὐτό ἐστι κέντρον, ὅπερ ἀδυνατον καὶ τλὼ ε', τῦ περόντος. κύκλος ἄρα κύκλον ὐ τέμνει καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 3. Fig. 12.



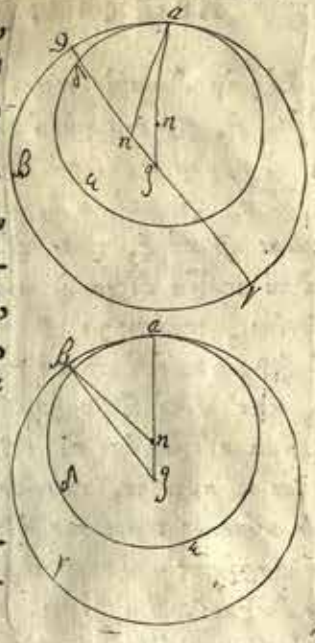
Πρό-

Πρότασις ΙΑ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῆς κύκλου.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ αβγ, αδε, ἁπτέσθωσαν ἐντὸς ἀλλήλων κατὰ τὸ α, τοῦ μὲν αβγ, ἔστω κέντρον τὸ ζ, τοῦ δὲ αδε, τὸ η. Λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ η, ζ, ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐπὶ τὸ α, πεσεῖται ἐκβαλομένη. εἰ γὰρ δυνατὸν, πιπτέτω ἐπί τινος ἄλλα σημεῖα, φερ' εἰπεῖν τὰ θ, ὡς ἡ ζηθ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, αζ, καὶ ἐπεὶ αἱ ζη, ηα, τῆς αζ, μείζονές εἰσι, καὶ τοῦ κ'. τοῦ α. τῇ δὲ ζα, ἴση ἐστὶν ἡ ζθ, κατὰ τὸν ιε, ὅρον, ἄρα καὶ αἱ ζη, ηα, μείζονές εἰσι καὶ τῆς ζθ'. κοινῆς δὲ ἀφῃρημένης τῆς ζη, ἐγκαταλείπεται ἡ ηα, μείζων τῆς ηθ, τῇ δὲ ηα, ἴση ἐστὶν ἡ ηδ, τὸ γὰρ η, κέντρον ἐστὶ τοῦ αδε, κύκλου καὶ τοῦ ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ ἡ ηδ, μείζων ἐστὶ τῆς ηθ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἄτοπον. ἡ καὶ ἔπω. Τοῦ ζ, ὄντος κέντρου τοῦ αβγ, κύκλου, καὶ τοῦ η, τοῦ αδε, λέγω τοῦ ἐπὶ τὰ ζη, ἐπιζευγνυμένου εὐθείαν ἐπὶ τὸ α, πίπτειν. εἰ γὰρ μὴ, πιπτέτω ἐπὶ τὸ β, ὡς ἡ ζηβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζβ, καὶ ἐπεὶ τὸ ζ, κέντρον ἐστὶ τοῦ αβγ, κύκλου, ἡ ζα, ἴση ἐστὶ τῇ ζηβ, τῇ δὲ ζα, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ζβ, ἄρα ἡ βζ, ἴση τῇ ζηβ, ὅπερ ἀδύνατον, καὶ τοῦ κ'. τοῦ α. Ἔτι ἐὰν τοῦ ζηβ, καὶ τὸν ἐναντίον, εὐθεῖαν εἶναι ὑποθώμεν, καὶ ἡ βζ, ἐπιζευχθῇ, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ πολλῷ μᾶλλον ἄτοπον καὶ τὸ ιβ, ἀξίωμα. ἡ δύο εὐθεῖαι κοινὸν ἔχουσι τμῆμα αἱ ζηβ, ζηα, ὅπερ ἀδύνατον, καὶ τὸ ιγ'. ἀξίωμα. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euel. Lib. 3. Fig. 13.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι δύο κύκλων ἀλλήλων ἁπτομένων ἐντὸς ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸ τοῦ ἑνὸς κέντρον ἀγομένη εὐθεῖα διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἑτέρου κύκλου.

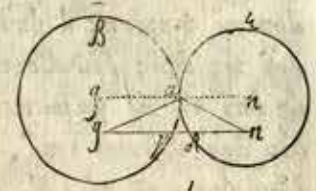
Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη διὰ τῆς ἁφῆς ἐλεύσεται.

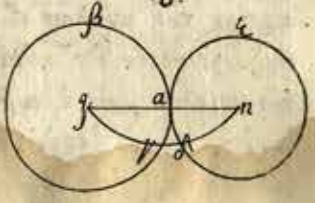
Δύο γὰρ κύκλοι οἱ αβγ, οὗ κέντρον τὸ ζ, καὶ αδε, οὗ κέντρον τὸ η, ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων καὶ τὸ α. Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὸ η, ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα

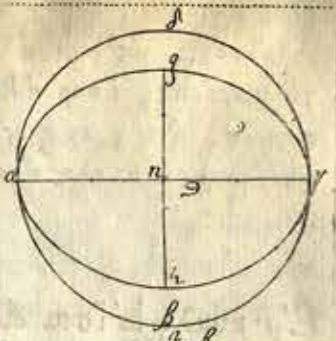
θεῖα διὰ τῶ α, διελεύσεται. εἰ γὰρ δυνατὸν, διελθέτω ὡς ἡ ζγδη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζα, να. καὶ ἐπεὶ τὸ ζ, κέντρον ἐστὶ τῶ αβγ, κύκλω, ἡ ζα, παντὸς ἴση ἐστὶ τῇ ζγ. ὡσαύτως καὶ ἡ να, ἴση ἐστὶ τῇ νδ, ὥστε αἱ ζα, αν, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ζγ, δν. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς γδ, ἔσται ἅπασα ἡ ζγδη, μείζων τῶν ζα, αν, ὅπερ ἀδύνατον καθ' τλῶ κέ. τῶ ά. ἡ καὶ ἄπω. Διελθέτω, εἰ δυνατὸν, ἡ ἀπὸ τῶ η, ἐπὶ τὸ ζ, μὴ διὰ τῶ α, ἀλλὰ διὰ τῶν γ, καὶ δ, ὡς ἡ ζγδη, ἐπὶ τῶ β'. σχήματος, ἧτις ἀθεῖα ὑποκείσθω. καὶ ἀπὸ τῶν ζ, η, κέντρων ἀχθήτωσαν αἱ ζκ, κη. εἰ δὴ καὶ ἡ ζκη, ἀθεῖά ἐστιν, ἐπεὶ ἀθεῖα ὑπόκειται καὶ ἡ ζγδη, παντὸς γε δύο ἀθεῖαι χωρίον περιέχουσιν, ὅπερ ἄτοπον. εἰδὲ ἡ ζκη, οὐκ ἔστιν ἀθεῖα, τὸ ζκη, σχῆμα τρίγωνον ἔσται, οὗ βάσις ἡ ζγδη, πλευραὶ δὲ αἱ ζκ, κη, καὶ δειχθήσεται ὡς ἀνωτέρω ἡ ζγδη, βάσις, μείζων τῶν ζκ, κη, πλευρῶν, ὅπερ ἀδύνατον κατὰ τλῶ κ'. τῶ ά. Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα καὶ τὰ ἐξῆς.

Eucl. Lib. 3. Fig. 14.



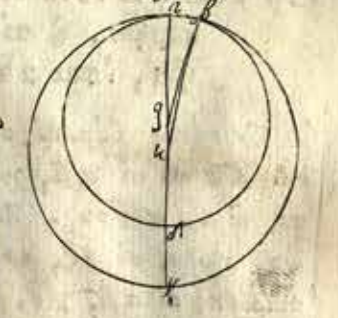
IB'.





Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Κύκλος κύκλω οὐχ ἑφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ καθ' ἕν, ἐαν τε ἐντὸς, ἐαν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.



Κύκλος γὰρ ὁ αβγδ, ἑ κέντρον τὸ η, ἁπτέσθω, εἰ δυνατὸν, τῶ αεγζ, κύκλου, ἑ κέντρον τὸ θ, ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ οὗ, τὰ α, γ. καὶ διὰ τῶν ηθ, ἄρα διερχομένη, ἐπὶ τὰς ἁφὰς πεσεῖται τῶν κύκλων, κατὰ τλῶ ιά. τῶ παρόντος, ὡς ἡ αγ, καὶ ἐπεὶ τὸ η, κέντρον ἐστὶ τῶ αβγδ, κύκλω, παντὸς γε ἡ να, ἴση ἐστὶ τῇ ηγ, ἡ δὲ ηγ, μείζων ἐστὶ τῆς θγ. ἄρα καὶ ἡ αν, μείζων ἐστὶ τῆς θγ, ἡ δὲ αθ, πολλῷ μείζων τῆς αὐτῆς θγ. Ἐπεὶ δ' αὖθις τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τῶ αεγζ, κύκλω, παντὸς γε ἡ θα, ἴση ἐστὶ τῇ γθ. δέδεικται δὲ καὶ πολλῷ μείζων ταύτης, ὅπερ ἄτοπον. Εἰδέ τις εἴποι τὰ τῶν ἁφῶν σημεῖα ἐγγὺς ἀλλήλων εἶναι, καὶ μὴ κατὰ διάμετρον. ἁπτέσθω ὅπως ὁ αβγ, τῶ αβδ, καὶ τὰ α, καὶ β. καὶ τῶ μὲν αβγ, ἔστω κέντρον τὸ ε, τῶ δὲ αβδ, τὸ ζ. παντὸς γε ἡ διὰ τῶν ε, ζ, διαβαίνουσα, ἐπὶ μίαν τῶν ἁφῶν, εἰμὴ καὶ ἐπὶ τῶν δύο, πεσεῖται, κατὰ τλῶ ιά. τοῦ παρόντος. πιπτέτω δὴ ἐπὶ τὸ α, ὡς ἡ αγ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βζ, βε. ἄρα αἱ εζ, ζβ, μείζους εἰσὶ τῆς εβ,

κατὰ τὸν κ'. τῆ ά. ὅποι τῆς α ε, ἴση γὰρ ἡ α ε, τῇ ε β. κοινῆς δὲ ἀφαιρεμένης τῆς ε ζ, ἐναπολειφθήσεται ἡ ζ β, μείζων τῆς ζ α, ὅπερ ἀδύνατον. ἡ γὰρ ζ α, ἴση ἐστὶ τῇ ζ β, ὅτι τὸ ζ, κέντρον ἐστὶ τῆ α β δ, κύκλυ. *Eucl. Lib. 3. Fig. 15.*

Ἀπτέσθω ἔτι ὁ α β δ, κύκλος, οὐ κέντρον τὸ ζ, τοῦ α β γ, ὃ κέντρον τὸ ε, ἐκτὸς κὴ τὰ α, κὴ β. κὴ τὸν ι β'. ἄρα τῆ παρόντος ἡ ἐπὶ τὰ κοίτρα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς ἁφῆς διελεύσεται. Διελθέτω γὰρ διὰ μὲν τῆ α, ὡς ἐπὶ τῆ ά. χήματος, ἡ ε α ζ, διὰ δὲ τῆ β, ἡ ε β ζ, δύο ἄρα εὐθεῖαι ε α ζ, ε β ζ, χωρίον περιέχουσιν, ὅπερ ἀδύνατον, κὴ τὸ ι β'. ἀξίωμα, ἡ κὴ ὅπως. Ἐπεὶ ἐφ' ἑκατέρα τῶν κύκλων εἴληπται δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπιζευγνυμένη ἐπ' αὐτὰ εὐθεῖα, ἡ ἐντὸς πεσεῖται ἑκατέρυ τῶν κύκλων, ὡς ἡ α β, ἐπὶ τῆ ά. χήματος, ἡ τῆ μὲν ἐντὸς, τῆ δὲ ἐκτὸς, ὡς ἐπὶ τῆ β'. χήματος· ἀλλὰ καθ' ἑκάτερον ἀδύνατον. εἰ γὰρ ἐντὸς ἑκατέρα τέμνουσιν οἱ κύκλοι ἀλλήλυς, κὴ οὐκ ἅπτονται. εἰδὲ τῆ μὲν ἐντὸς πῆ δὲ ἐκτὸς, ὡς μὲν ἀληθὴς, ὡς δὲ ψευδὴς ἔσται ἡ β'. τῆ παρόντος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐκτὸς κὴ πλείονα σημεῖα, ἡ δύο, κύκλος κύκλυ ἐφάπτεται. δέδεικται δὲ μηδὲ ἐντός. Κύκλος ἄρα κύκλυ οὐκ ἐφάπτεται κὴ τὰ ἑξῆς.

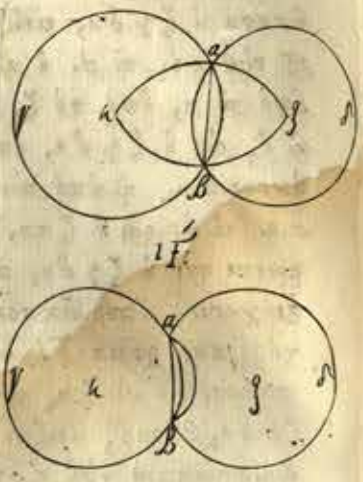
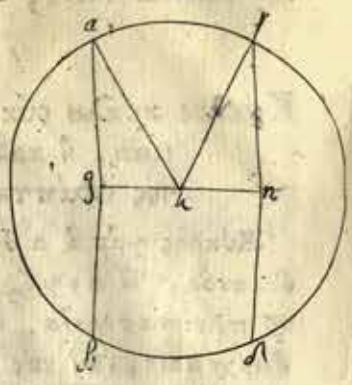


Fig.



Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τῆ κέντρυ, κὴ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τῆ κέντρυ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ α β δ γ, ὃ κέντρον τὸ ε, ἔστωσαν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ α β, γ δ. Λέγω ταύτας ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τῆ ε, κέντρου. Πιπτέτωσαν γὰρ ἐπ' αὐτῷ κάθετοι ἀπὸ τοῦ ε, αἱ ε ζ, ε η, κὴ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ε, ε γ. κατὰ τὸν γ'. ἄρα τῆ παρόντος αἱ α β, γ δ, δίχα τέμνονται ὑπὸ τῆ ε ζ, ε η, ὥστε ἥτε α β, διπλασία ἐστὶ τῆς α ζ, κὴ ἡ γ δ, τῆς γ η. ἀλλ' αἱ α β, γ δ, ἴσαι εἰσὶ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα κὴ αἱ α ζ, γ η, ὁμοίως ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ ζ'. ἀξίωμα. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς α ζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α η, ἀλλὰ κὴ τὸ ἀπὸ τῆς α ε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γ ε. ἴση γὰρ ἡ α ε, τῇ ε γ, κατὰ τὸν ι έ. ὅρον τῆ ά. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς α ε, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν α ζ, ζ ε, κὴ τὸν μ ζ'. τῆ αὐτῆ. κὴ τῷ ἀπὸ τῆς ε γ, τὰ ἀπὸ τῶν γ η, η ε, ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν α ζ, ζ ε, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν γ η, η ε. ἀφαιρεμένων οὖν τῶν ἀπὸ τῶν α ζ, γ η, ἴσων, ἐγκαταλείπονται ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ζ ε, η ε, ὥστε

καὶ ἡ

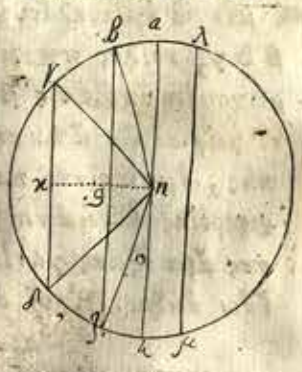
καὶ ἡ ζε. ἴση ἐστὶ τῇ ηε, ἀλλ' αἱ ζε, ηε, κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τῶν αβ, γδ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου· αἱ αβ, ἄρα γδ, ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ τὸν δ'. ὅρον τοῦ παρόντος. Ἀλλὰ δὴ ἀπεχέτωσαν αἱ αβ, γδ, ἴσον ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου, λέγω πάλιν ἴσας εἶναι. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, δειχθήσεται, ὡς καὶ ἀνωτέρω, ἑκατέρα τῶν αβ, γδ, δίχα τέμνεσθαι παρὰ τὴν ζ, η, καὶ τιθῶ γ'. τὸ παρόντος· καὶ ἑπομένως τὴν μὲν αβ, συναχθήσεται διπλασίαν εἶναι τῆς αζ, τιθῶ δὲ γδ, τῆς γη· ἐπεὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αε, ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῆς γε, διὰ τὸ ἴσας εἶναι ἀλλήλαις τὰς αε, γε, τοῖς δὲ ἀπὸ τῆς αη, ἴσά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν αζ, ζε, καὶ τοῖς ἀπὸ τῆς γε, τὰ ἀπὸ τῶν γη, ηε. δειχθήσεται παντὸς καὶ τὰ ἀπὸ τῶν αζ, ζε, ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν γη, ηε. ἀφαιρεμένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν ζε, ηε, ἴσων, ἐγκαταλειφθήσεται τὰ ἀπὸ τῶν αζ, γη, ἴσα, καὶ ἑπομένως αἱ αζ, γη, ὁμοίως ἴσαι. ὥστε καὶ αἱ τέσσαρες διπλάσιαι, αἱ αβ, γδ, ἴσαι ἔσονται καὶ τῷ ς'. ἀξιώματι. Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον καὶ τὰς ἐξῆς.

Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διάμετρος, τῆς δὲ ἄλλης ἀεὶ ἡ ἐγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

Ἐν κύκλῳ γάρ δὴ τοῦ αβγδ, οὗ κέντρον τὸ η, ἔστω διάμετρος μὲν ἡ αε, ἐγγιον δὲ ταύτης ἡ βζ, ἀπώτερον δὲ ἡ γδ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν αε, μεγίστη ἐστίν, ἡ δὲ βζ, μείζων τῆς γδ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ηβ, ἴση ἐστὶ τῇ ηα, κοινὴ ἡ ζη, τῇ ηε, καὶ τὸν ιέ, ὅρον τοῦ ά. παντὸς γε αἱ βη, ηζ, ἴσαι εἰσὶ τῇ αε, αἱ δὲ βη, ηζ, μείζονές εἰσι τῆς βζ, καὶ τιθῶ κ'. τὸ ά. καὶ ἡ αε, ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς βζ. Αὖθις ἐπεὶ αἱ βη, ηζ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς γη, ηδ, ὡς ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ κέντρου, ἡ δὲ ὑπὸ βηζ, γωνία, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γηδ, καὶ βάσις ἄρα ἡ βζ, μείζων ἐστὶ τῆς γδ, βάσεως, καὶ τὸν κδ'. τὸ ά. ὁμοίως δὴ δείξομεν. καὶν ἄλλης τις εὐθεῖα ἀπώτερον ᾖ τῆς γδ, ἐλάττονα εἶναι τῆς αὐτῆς γδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 3. Fig. 16.

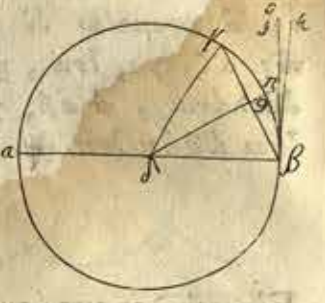


ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ἐφ' ἑκάτερα τῆς αε, δύο μόνας ἴσας σωίζεσθαι εὐθείας, εἰ γὰρ μή, ἔσονται αἱ ἀπώτερον τῆς ἐγγιον ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον.

Πρότασις Ιϛ'. Θεώρημα.

Η' τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων. *Eucl. Lib. 3. Fig. 17.*



Ἐπὶ τῆς αβ, ἤδη διαμέτρου τοῦ αγβ, κύκλου, οὗ κέντρον τὸ δ, κάθετος ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἀγομένη ἡ βε, λέγω, ὅτι ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. εἰ γὰρ δυνατὸν πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ βγ· καὶ ἀχθήτω ἡ δγ, ἐπεὶ οὖν ἡ δβ, ἴση ἐστὶ τῇ δγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ δβγ, γωνία, τῇ ὑπὸ δγβ, καὶ τλω ἑ. τοῦ ά. ἀλλ' ἡ ὑπὸ δβγ, ὀρθὴ ἐστι καὶ τὴν ὑπόθεσιν, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δγβ. αἱ δύο ἄρα γωνίαι τοῦ δγβ, τριγώνου δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, ὅπερ ἀδύνατον, καὶ τλω ιζ, τοῦ ά. Ὁμοίως δειχθήσεται μηδὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας πίπτειν, ἐκτὸς ἄρα, ὡς ἡ βε. Λέγω ἔτι μεταξὺ τῆς βε, εὐθείας, καὶ βθγ, περιφερείας μὴ δυνατὸν εὐθεῖαν ἑτέραν ἐμπίπτειν. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐμπιπτέτω, ὡς ἡ βζ, καὶ ἐπ' αὐτῆς κέχθω κάθετος ἡ δη, ἡ γὰρ δβ, οὐκ ἐπ' αὐτῆς, ἀλλ' ἐπὶ τῆς βε, κάθετος ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δηβ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ δβη, ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δβ, ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς δη, καὶ τλω ιθ'. τοῦ ά. τῇ δὲ δβ, ἴση ἐστὶν ἡ δθ, καὶ τὸν ιέ. ὅρον τοῦ ά. καὶ ἡ δθ, ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς δη, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα συνατὸν ἐμπεσεῖν. Λέγω δὲ καὶ γ'. ὅτι ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἡ περιεχομένη ὑπότε τῆς αβ, διαμέτρου, καὶ τῆς βθγ, κοίλης περιφερείας, ἁπάσης ὀξείας γωνίας μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἡ περιεχομένη ὑπότε τῆς βε, εὐθείας, καὶ τῆς βθγ, κυρτῆς περιφερείας, ἐλάττων ἐστίν. εἰ γὰρ αὖ εἴη ἄλλη τις γωνία μείζων μὲν τῆς τοῦ ἡμικυκλίου, ἐλάττων δὲ τῆς λοιπῆς, ἐμπεσεῖται πάντως εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς βε, εὐθείας, καὶ βθγ, περιφερείας εὐθεῖά τις ἄλλη, ὡς ἡ βζ, ὅπερ τῷ ἀδυνάτων εἶναι δέδεικται. πάσης ἄρα ὀξείας γωνίας μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ ἡμικυκλίου, ἐλάσσων δὲ ἡ λοιπή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Η' τῇ διαμέτρῳ ἄρα τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο Ρ Ι Σ Μ Α.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐπὶ τοῦ πέρατος τῆς διὰ τοῦ κέντρου, ἅπτεται τοῦ κύκλου, εἰ γὰρ μὴ, ἐντὸς πεσεῖται, ὅπερ ἀδύνατον. καὶ πάλιν, ἡ ἁπτομένη τοῦ κύκλου, πρὸς ὀρθὰς ἐστι τῇ διαμέτρῳ.

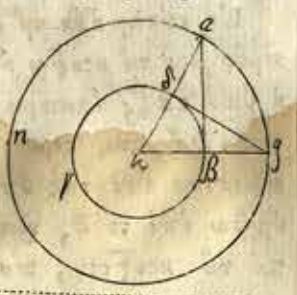
Πρό-

Πρότασις ΙΖ'. Πρόβλημα.

Α'πὸ τῆ δοθέντος σημείυ τῆ δοθέντος κύκλυ ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

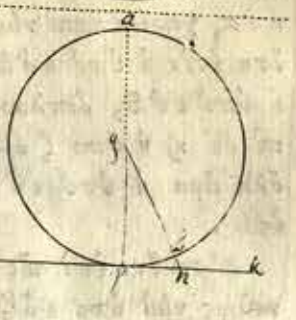
Α'πὸ τῆ δοθέντος ἤδη σημείυ τῆ α, τῆ δοθέντος βγδ, κύκλυ ἐφαπτομένην δεῖ ἀγαγεῖν. Εἰλήφθω τοίνυν τὸ ε, κέντρον τῆ βγδ, κύκλυ καπὰ τλὼ ά. τῆ παρόντος· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αε, τέμνυσα τὸν βγδ, κύκλον καῖ τὸ δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῆ ε, διαστήματι δὲ τῆ εα, κύκλος γεγράφθω ὁ αζη, καὶ ἀπὸ τῆ δ. κάθετος ἀχθήτω ἡ δζ, ἐπὶ τῆς εδ, καὶ ἐπεζεύχθω αἱ εβζ, καὶ ζδ. καὶ ἐπεὶ τὸ ε, κέντρον ἐστὶν ἑκατέρυ τῶν κύκλων, πάντως γε ἡ εα, ἴση ἐστὶ τῆ εζ, ἡ δὲ εδ, τῆ εβ. ὥστε αἱ αε, εβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ζε, εδ, περιέχυσι δὲ καὶ γωνίαν κοινὴν τλὼ πρὸς τῆ ε, καὶ βάσις ἄρα ἡ αβ, βάσει τῆ δζ, ἴση ἐστὶ, καῖ τλὼ δ'. τῆ ά. καὶ τὸ αεβ, τρίγωνον, ἴσον τῆ δεζ, τριγώνῳ, καὶ ἡ ὑπὸ αβε, γωνία τῆ ὑπὸ ζδε, ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ζδε, ὀρθή ἐστιν, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβε. ἡ αβ, ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς εβ, τῆς διὰ τῆ κέντρυ, ὥστε καπὰ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, ἅπτεται ἡ αβ, τῆ βγδ, κύκλυ. ὅπερ ἔδει τὸ προσαχθῆναι.

Eucl. Lib. 3. Fig. 18.



Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

Ε'ὰν κύκλυ ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆ κέντρου ἐπὶ τλὼ ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα, κάθετος ἔσται ἐπὶ τλὼ ἁπτομένην.



Κύκλου ἤδη τῆ αβγ, ἔστω κέντρον τὸ ζ, ἁπτέσθω ἡ δε, καῖ τὸ γ, καὶ ἀπὸ τῆ ζ, κέντρου ἐπὶ τὸ γ, ἀχθήτω ἡ ζγ. Λέγω ταύτλω κάθετον εἶναι ἐπὶ τῆς δε. εἰ γὰρ μὴ, ἔσω ἡ ζη, κάθετος ἐπὶ τῆς δε. ὥστε ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ζηγ, ὀρθή ἐστι, πάντως γε ἡ ὑπὸ ζγη, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, καὶ καπὰ τλὼ ιθ'. τῆ ά. ἡ ζγ, μείζων ἐστὶ τῆς ζη, ἀλλ' ἡ ζγ, ἴση ἐστὶ τῆ ζβ, καπὰ τὸν ιέ, ὅρον, ἄρα καὶ ἡ ζβ, μείζων ἐστὶ τῆς ζη, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄλλη τις ἔσται κάθετος ἐπὶ τῆς δε, πλὴ ἡ ζγ. Ε'ὰν ἄρα κύκλυ ἐφάπτηται καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

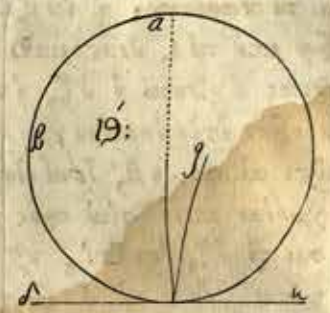
Ε'ὰν κύκλυ ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τῆ κύκλυ.

Κύκλυ ἤδη τῆ αβγ, ἁπτέσθω ἡ δε, καπὰ τὸ γ. καὶ ἀπὸ τῆ γ, πρὸς ὀρθὰς

ἐπὶ

ἐπὶ τῆς δε, ἤχθω ἡ γα. Λέγω ἐπὶ τῆς γα, εἶναι τὸ κέντρον τοῦ αβγ, κύκλου. εἰ γὰρ μή, ἔστω τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ, ἡ ζγ, ἄρα καὶ τῶν αὐτέρω κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς δε, ἔστι δὲ καὶ ἡ γα, ὁμοίως κάθετος ἐπὶ τῆς δε, καὶ τῶν κατασκευήν, ἄρα ἡ ὑπὸ ζγε, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγε, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. Ε᾽ων ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 3. Fig. 19.



Πρότασις Κ΄. Θεώρημα.

Ε᾽ν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὸν αὐτὸν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν.

Ε᾽ν κύκλῳ ἔστω τὸ αβγ, ἐ κέντρον τὸ δ, ἔστω γωνία πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ ἡ ὑπὸ εδζ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ ἡ ὑπὸ εαζ, ἑκατέρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βεβηκυῖα βάσεως, τῆς εθζ, περιφερείας. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ εδζ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ εαζ. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αδ, καὶ ἤχθω ἐπὶ τὸ θ, καὶ ἐπεὶ αἱ δα, δε, ἴσαι εἰσὶν, ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου, πάντως γε ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ δαε, δεα, γωνίαι κατὰ τὸν ε΄. τοῦ α΄. ταῖς δὲ ὑπὸ δαε, δεα, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εδθ, κατὰ τὸν λβ΄. τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ εδθ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δαε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ζδθ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δεζ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ εαζ, διπλασίων ἐστίν.

Ε᾽στω ἔτι ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας πλαγίως κειμένη ἡ ὑπὸ εβζ. Λέγω καὶ ταύτης τῶν ὑπὸ εδζ, διπλασίων εἶναι. Ε᾽πεὶ γὰρ αἱ δβ, δζ, ἴσαι εἰσὶν, ἴσαι πάντως εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ δβζ, δζβ, γωνίαι καὶ τῶν ε΄. τοῦ α΄. ταῖς δὲ ὑπὸ δβζ, δζβ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εδζ, καὶ τῶν λβ΄. τοῦ αὐτοῦ, ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ, τῆς μιᾶς αὐτῶν, ἤτοι τῆς ὑπὸ δβζ, διπλασίων ἐστίν.

Ε᾽στω καὶ γ΄. πλαγιώτερον πρὸς τῇ περιφερείᾳ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἡ ὑπὸ εγζ. ὅτι δὲ καὶ ταύτης διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ εδζ, δῆλον. Ε᾽πεζεύχθω γὰρ ἡ δγ, ἀγομένη ἐπὶ τὸ η. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ δγζ, δζγ, ἴσαι εἰσὶ, διὰ τὰ εἰρημένα, καὶ ταύταις ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηδζ, ἐκτὸς, πάντως γε τῆς μιᾶς, ἤτοι τῆς ὑπὸ δγζ, διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηδζ. ἀλλὰ καὶ τῆς ὑπὸ δγε, διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηδε, διὰ τὰ αὐτά. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ εδζ, διπλασίων ἐστὶ λοιπῆς τῆς ὑπὸ εγζ. Ε᾽ν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ καὶ τὰ ἑξῆς.

Π Ο΄ Ρ Ι Σ Μ Α.

Α΄. Ε᾽κ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐν κύκλῳ πᾶσαι αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαι ἴσαι

ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, κατὰ τὸ ζ'. ἀξίωμα, ὅταν τῶν αὐτῶν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν.

Β'. Ἔτι αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ τὰ κύκλα συνιστάμεναι γωνίαι ἐπὶ διπλασίων βεβήκασι περιφερειῶν, ἢ αἱ πρὸς τῷ κέντρῳ ἴσαι ταῖς πρὸς τῇ περιφερείᾳ συνισταμέναις.

Πρότασις ΚΑ'. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

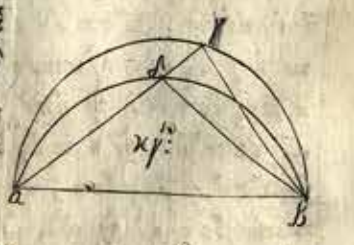
Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγδζ, ἔστωσαν γωνίαι ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ αβγδ, αἱ ὑπὸ αβδ, καὶ αγδ. Λέγω ταύτας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβδ, αγδ, τῶν αὐτῶν περιφέρειαν αζβ, βάσιν ἔχουσι, παντὸς γε κέντρου τὸ πόρισμα τῆς ὠιωτέρω ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 3. Fig. 20.

Πρότασις ΚΒ'. Θεώρημα.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγδ, ἔστω τετράπλευρον τὸ αβγδ, Λέγω ὅτι τῶν ἀπεναντίον γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, βδ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ γαδ, τῇ ὑπὸ δβγ, καὶ τὸ πόρισμα τῆς κ'. τοῦ παρόντος, τῶν αὐτῶν γὰρ γδ, περιφέρειαν βάσιν ἔχουσιν, ἡ δὲ ὑπὸ αβδ, ἴση ἐστὶ διὰ τὰ αὐτὰ τῇ ὑπὸ δγα, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ δαγ, δγα, κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς τε ὑπὸ αβγ, καὶ ταῖς ὑπὸ δαγ, δγα, τῆς ὑπὸ αδγ, ἔσονται πάντως αἱ ὑπὸ αβγ, αδγ, ἴσαι ταῖς ὑπὸ δαγ, αγδ, γδα, ἔστι δὲ αγδ, ἡμικυκλίου γωνίαι. αἱ δὲ ἐν τῷ αγδ, ἡμικυκλίου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ τῶν λβ'. τῶ ά. ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, αδγ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ τὰς ὑπὸ βαδ, δγβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι. Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις ἄρα τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον καὶ τ'ξ.



Πρότασις ΚΓ'. Θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συναθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αβ, εὐθείας συνεστάτωσαν τὰ αγβ, αδβ, ὅμοια καὶ ἄνισα τμήματα κύκλων. καὶ τῆς αδγ, ἡμικυκλίου, ἐπεζεύχθωσαν αἱ δβ, γβ.

καὶ

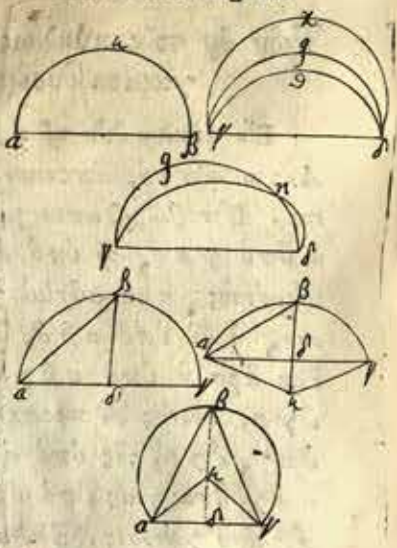
καὶ ἐπεὶ τὰ α δ β, α γ β, τμήματα, ὅμοιά εἰσι, παντὸς γε ἴσας γωνίας δέχονται, καὶ τὸν ί. ὅρον τῶ παρόντος. ἄρα ἡ ὑπὸ α δ β, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ α γ β, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἀδύνατον, καὶ τῷ λβ'. τῶ ά. οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλω ὅμοια καὶ ἄνισα συσταθήσονται.

Πρότασις ΚΔ'. Θεώρημα.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐπὶ ἴσων γὰρ εὐθειῶν τῶν α β, γ δ, συνεστάθωσαν ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ α ε β, γ ζ δ. λέγω ταῦτα ἴσα εἶναι. εἰ γὰρ μή, ἐφαρμοζομένης τῆς α β, ἐπὶ τὴν γ δ, ἡ ἐκτὸς τῶ γ ζ δ, πεσεῖται τὸ α ε β, τμῆμα, ὡς τὸ γ κ δ, ἡ ἐντὸς τάτε, ὡς τὸ γ θ δ. καὶ ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα ὅμοια καὶ ἄνισα, ὅπερ ἄτοπον, καὶ τῷ ἀνωτέρω. ἡ γοῦν μέρος μὲν τάτε ἐντὸς, μέρος δὲ ἐκτὸς πεσεῖται, ὡς τὸ γ κ δ, καὶ κύκλος κύκλον τεμεῖ κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ δύο, ὅπερ ἀδύνατον, καπὲ τῷ ί. τῶ παρόντος. Τὰ ἐπὶ ἴσων ἄρα εὐθειῶν ὅμοια τμήματα καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 3. Fig. 21.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τάτε δῆλον, ὅτι αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσά τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλω ἀφαιροῦσιν, ὁπωσδηποτοῦν ἐναρμοζόμεναι.

Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

Κύκλω τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον, ὅπερ ἐστὶ τμῆμα.

Ἔστω δὴ κύκλον προσαναγράψαι, δοθέντος τῶ α β γ, τμήματος. Ἐπεζεύχθω ἡ α γ, καὶ τμηθείσης δίχα τῆς αὐτῆς α γ, κατὰ τὸ δ, ἤχθω ἀπὸ ὀρθὰς ἐπ' αὐτῆς ἡ δ β, κατὰ τὸ ιά. τῶ ά. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ α β. ἡ οὖν ὑπὸ δ β α, γωνία ἤτοι μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ β α δ, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττων. Ἔστω δὴ ά. μείζων, καὶ γενέσθω ταύτῃ ἴση ἡ ὑπὸ β α ε. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ β δ, συμπίπτουσα τῇ α ε, κατὰ τὸ ε. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ε γ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ α β ε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β α ε, ἴση παντὸς ἐστὶ καὶ ἡ β ε, τῇ ε α, κατὰ τὸ έ. τῶ ά. ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ α δ, ἴση ἐστὶ τῇ δ γ, κοινὴ δὲ ἡ δ ε, καὶ ἡ ὑπὸ α δ ε, γωνία τῇ ὑπὸ γ δ ε, ἴση, καὶ βάσις ἄρα ἡ α ε, βάσει τῇ ε γ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸν δ'. τῶ ά. ἴση δὲ τῇ α ε, ἐστὶ καὶ ἡ ε β, ἄρα καὶ ἡ ε γ, ἴση ἐστὶ καὶ τῇ ε β. ὥστε αἱ τρεῖς ε α, ε β, ε γ, ἴσαι εἰσί. κέντρῳ ἄρα τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ α, κύκλος γραφόμενος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν β, καὶ γ, σημείων. καὶ δῆλον, ὅτι τὸ α β γ, ἔλαττον τμῆμά ἐστι κύκλω, διὰ τὸ ἐκτὸς εἶναι τὸ κέντρον.

Ἔστω δὲ ἡ ὑπὸ δ β α, ἴση τῇ ὑπὸ β α δ, ἄρα καὶ ἡ α δ, ἴση ἐστὶ τῇ δ β, ἔστι δὲ καὶ ἡ

καὶ ἡ δγ, ἴση τῇ αδ. αἱ ἄρα αδ, δβ, δγ, ἴσαι εἰσί, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ α, περιγεγράφθω ὁ κύκλος· καὶ δῆλον, ὅτι τὸ αβγ, ἡμικυκλιόν ἐστιν, ὅτι ἐπὶ τῆς αγ, ἐστὶ τὸ κέντρον.

Ἔστω ἔτι ἡ ὑπὸ δβα, ἐλάττων τῆς ὑπὸ βαδ. γεγράφθω ἡ ὑπὸ βαε, ἴση τῇ ὑπὸ εβα, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ εγ. αἱ τοίνυν αε, εβ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, διὰ τὸ ἴσας γωνίας ὑποτείνειν. ἔστι δὲ καὶ ἡ αε, τῇ εγ, ἴση κατὰ τὸ δ'. τῶν ά. αἱ τρεῖς ἄρα αε, εβ, εγ, ἴσαι εἰσί· καὶ κέντρῳ τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εα, περιγεγράφεται ὁ κύκλος, καὶ τὸ αβγ, μεῖζον τμῆμα κύκλου ἐστὶ, διὰ τὸ ἐντὸς ἔχειν τὸ κέντρον. Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, περιγεγράπται ὁ κύκλος· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. *Euel. Lib. 3. Fig. 22.*

Πρότασις Κς'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἐν ἴσοις κύκλοις ἤδη τοῖς αβγ, δεζ, ἴσαι γωνίαι συνεστάθωσαν πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αἱ ὑπὸ αηγ, δθζ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ. Λέγω, ὅτι αἱ αγ, δζ, περιφέρειαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ οἱ αβγ, δεζ, κύκλοι ἴσοι εἰσὶν, ἴσαι πάντως γέ εἰσι καὶ αἱ αη, ηγ, ταῖς δθ, θζ. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ αηγ, δθζ, γωνίαι, ἴσαι· καὶ βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐστίν. Ἐπεὶ δὲ πάλιν αἱ πρὸς τῷ β, καὶ ε, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, παντὸς γε τοῦ αβγ, δεζ, τμήματα ὅμοιά ἐστι, καὶ τὸν ι. ὅρον τῶν παρόντος, εἰσὶ δὲ καὶ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν αγ, δζ, ἄρα καὶ ἴσα, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς κδ'. τοῦ αὐτοῦ. ἀλλὰ καὶ οἱ αβγ, δεζ, κύκλοι ἴσοι εἰσὶ, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀφήρηται τὰ αβγ, δεζ, τμήματα ἴσα, ἄρα καὶ τὰ αγ, δζ, τμήματα, ἴσα ἐστί, κατὰ τὸ ε'. ἀξίωμα. δῆλον ἄρα, ὅτι ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάντε καὶ τὰ ἑξῆς.

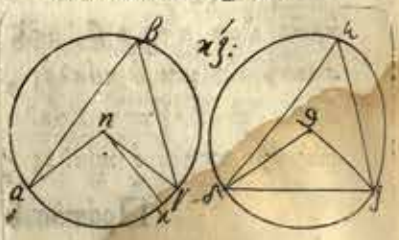
Πρότασις Κζ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Ἐν ἴσοις ἤδη κύκλοις τοῖς αβγ, δεζ, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν αγ, δζ, βεβηκέτωσαν γωνίαι, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις, αἱ ὑπὸ αηγ, δθζ. πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ. Λέγω τὴν ὑπὸ αηγ, ἴσην εἶναι τῇ ὑπὸ

δθζ, καὶ τῷ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ. εἰγὰρ μὴ, ἔσω ἡ ὑπὸ ανγ, μείζων, καὶ γενέσθω ἴση τῇ ὑπὸ δθζ, ἡ ὑπὸ ανκ. ἡ ακ, ἄρα περιφέρεια, καὶ τῷ ἀνωτέρω, ἴση ἐστὶ τῇ δζ, περιφερείᾳ. ἔστι δὲ τῇ δζ, ἴση καὶ ἡ αγ, ἄρα ἡ ακ, περιφέρεια, ἴση ἐστὶ τῇ αγ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ανγ, τῆς ὑπὸ δθζ, ἀλλ' ἴση. ἀλλὰ τῆς μὲν ὑπὸ ανγ, ἡμίσεια ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβγ, τῆς δὲ ὑπὸ δθζ, ἡ ὑπὸ δεζ. ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἐν τοῖς ἴσοις ἄρα κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

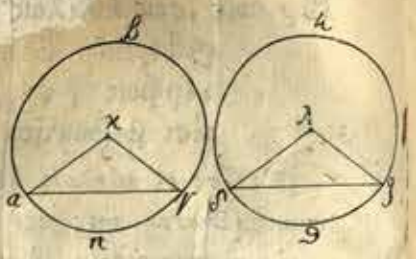
Eucl. Lib. 3. Fig. 23.



Πρότασις ΚΗ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσιν.

Ἐστωσαν ἤδη κύκλοι ἴσοι οἱ αβγ, δεζ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ αγ, δζ, ὑποτεινέτωσαν μείζεις μὲν περιφερείας τὰς αβγ, δεζ, ἐλάττας δὲ τὰς ανγ, δθζ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν αβγ, ἴση ἐστὶ τῇ δεζ, ἡ δὲ ανγ, τῇ δθζ. εἰλήφθωσαν γὰρ ἀμφοτέρων τὰ κέντρα, διὰ τῆς ά. τοῦ παρόντος, καὶ ἔστωσαν ταῦτα τὰ κ, λ. εἶτα ἐπεζεύχθωσαν αἱ κα, κγ, λδ, λζ. καὶ ἐπεὶ αἱ ακ, κγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δλ, λζ, ὡς ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ ἡ αγ, ὁμοίως ἴση τῇ δζ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ακγ, ἴση ἐστὶ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δλζ, τουτέστι τῷ ἡ. τοῦ ά. εἰσὶ δὲ καὶ πρὸς τῷ κέντρῳ ἀμφότεραι, ἄρα τουτέστι τῷ κς'. τοῦ παρόντος, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἴσαι ἄρα αἱ ανγ, δθζ, περιφέρειαι. ἀλλὰ καὶ οἱ κύκλοι εἰσὶν ἴσοι, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ αβγ, δεζ, περιφέρειαι ἴσαι εἰσὶ, καπὶ τὸ ε'. ἀξίωμα. Ἐν τοῖς ἴσοις ἄρα κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.



Πρότασις ΚΘ'. Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις καὶ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Ἐν ἴσοις ἤδη τοῖς αὐτοῖς κύκλοις ἔστωσαν ἴσαι περιφέρειαι αἱ ανγ, δθζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, δζ, λέγω ταύτας ἴσας εἶναι. τῶν αὐτῶν γὰρ γεγομένης κατασκευῆς, ἐπεὶ αἱ ακ, κγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δλ, λζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ακγ, γωνία τῇ ὑπὸ δλζ, ἴση, καπὶ τὸ κς'. τοῦ παρόντος, πρὸς τοῖς κέντροις γάρ ἀμφότεραι, καὶ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν. ἄρα καὶ βάσις ἡ αγ, ἴση ἐστὶ τῇ δζ, τουτέστι τῷ δ'. τοῦ ά. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις Λ'. Πρόβλημα.

Τῳ δοθείσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Τῳ δοθεῖσαν ἤδη αβγ, περιφέρειαν ἔστω τεμεῖν δίχα. ἐπεζεύχθω γοῦν ἡ αγ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ δ, διὰ τοῦ ι. τοῦ α. καὶ ἐπ' αὐτῆς ἀνεστάσθω κάθετος ἡ δβ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ. καὶ ἐπεὶ αἱ αδ, δγ, ἴσαι εἰσὶ, κοινῆς λαμβανομένης τῆς δβ, δύο αἱ αδ, δβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς γδ, δβ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αδβ, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ γδβ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα καὶ βάσις ἡ αβ, βάσει τῇ βγ, ἴση ἐστὶ, καὶ τῳ δ'. τοῦ α. ἄρα καὶ τῳ κη. τοῦ παρόντος ἡ αβ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ βγ, περιφερείᾳ, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

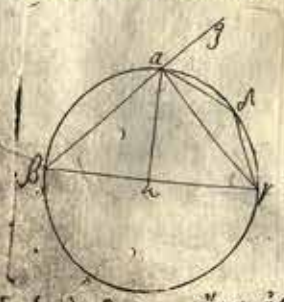
Eucl. Lib. 3. Fig. 24.

Πρότασις ΛΑ'. Θεώρημα.

Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ὀρθῆς. καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐν κύκλῳ ἤδη τῷ αβγ, ἔστω ἡμικύκλιον μὲν τὸ βαγ, μεῖζον δὲ τμῆμα, τὸ αβγ, καὶ ἔλαττον, τὸ αδγ. Ἔστω δὲ ἀπὸ μὲν τῷ βαγ, ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, ἐν δὲ τῷ μείζονι τμήματι, ἡ ὑπὸ αβγ, καὶ ἐν τῷ ἐλάττονι, ἡ ὑπὸ αδγ, καὶ ἔτι τοῦ μὲν αβγ, μείζονος τμήματος γωνία ἔστω ἡ περιεχομένη ὑπότε τῆς αβγ, περιφερείας καὶ αγ, εὐθείας, τοῦ δὲ αδγ, ἐλάττονος ἡ περιεχομένη ὑπότε τῆς αδγ, περιφερείας, καὶ αγ, εὐθείας. Λέγω δὴ, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ βαγ, ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ αβγ, ἐλάττων ὀρθῆς, καὶ ἡ ὑπὸ αδγ, μείζων ὀρθῆς. καὶ ἔτι ἡ μὲν ὑπὸ τῆς αβγ, περιφερείας, καὶ αγ, εὐθείας περιεχομένη, μείζων ὀρθῆς, ἡ δὲ ὑπὸ τῆς αδγ, περιφερείας, καὶ αγ, εὐθείας ἐλάττων ὀρθῆς. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αε, καὶ διήχθω ἡ βα, ἐπὶ τὸ ζ. καὶ ἐπεὶ αἱ βε, εα, ἴσαι εἰσὶν, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ αβε, τῇ ὑπὸ βαε, καὶ τῳ ε. τοῦ α. διὰ τὰ αὐτὰ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ αγε, τῇ ὑπὸ γαε, ὥστε ὅλη ἡ ὑπὸ βαγ, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, αγβ, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ζαγ, ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, αγβ, κατὰ τῳ λβ'. τοῦ α. ἄρα αἱ ὑπὸ βαγ, ζαγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα, καὶ τὸν ι. ὅρον τοῦ α. ἡ ὑπὸ βαγ, ἄρα ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὅπερ ἦν τὸ α. Ἡ δὲ ὑπὸ αβγ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ, ἐλάττων παντωσγὲ ἐστὶν ὀρθῆς, ὅπερ ἦν τὸ β'. Ἐπεὶ δὲ τοῦ αβγδ,

Eucl. Lib. 3. Fig. 25.



ἐν κύκλῳ τετράπλευρα αἱ ὑπὸ αβγ, αδγ, ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ τῷ κβ'. τοῦ παρόντος, ἡ δὲ ὑπὸ αβγ, ἐλάττων ὀρθῆς δέδεικται, πάντως γε ἡ ὑπὸ αδγ, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ὅπερ ἐστὶ τὸ γ'. Λύθεις ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῆς βα, αγ, περιεχομένη γωνία δέδεικται ὀρθή· δῆλον, ὅτι ἡ ὑπό τε τῆς αβγ, περιφερείας καὶ αγ, εὐθείας περιεχομένη, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὅπερ ἐστὶ τὸ δ'. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ ὑπὸ ζαγ, ὀρθή ἐστιν, πάντως γε ἡ ὑπό τε τῆς αδγ, περιφερείας, καὶ αγ, εὐθείας περιεχομένη ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ὅπερ ἦν τὸ ε.

Δυνατὸν δὲ καὶ ἄλλως δεῖξαι τὸ ὑπὸ βαγ, ὀρθόν. Ἐπεὶ γὰρ καὶ τὸ λβ'. τοῦ ά. ἡμισυ ὑπὸ αεβ, διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ γαε, ἥδε ὑπὸ αεγ, τῆς ὑπὸ βαε· δῆλον, ὅτι αἱ ὑπὸ αεβ, αεγ, διπλάσιαί εἰσι τῆς ὅλης ὑπὸ βαγ· ἀλλ' αἱ ὑπὸ αεβ, αεγ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ τῷ ιγ'. τοῦ ά. ἡ ὑπὸ βαγ, ἄρα ὀρθή ἐστιν. Ἐν κύκλῳ ἄρα, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

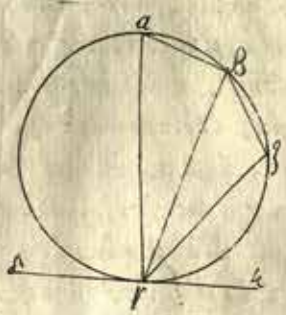
Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν τριγώνου ἡ μία τῶν γωνιῶν ταῖς λοιπαῖς δυσὶν ἴσην ᾖ, ὀρθή ἐστιν. ὅτι καὶ ἡ ἐφ' ἑξῆς ἐκείνης ταῖς δυσὶν ἴση ἐστί.

Πρότασις ΛΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Κύκλου γὰρ τοῦ αβγ, ἁπτέσθω τις εὐθεῖα, ἡ δε, κατὰ τὸ γ. ἀπὸ δὲ τοῦ γ, ἐπὶ τὸν κύκλον ἀχθήτω εὐθεῖα ἡ γβ, ποιοῦσα γωνίας μετὰ τῆς δε, τὰς ὑπὸ βγε, βγδ. Λέγω, ὅτι ἡμὲν ὑπὸ βγε, ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ βαγ, τμήματι συνισαμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ βγδ, τῇ ἐν τῷ βζγ, ὁμοίως ἐναλλὰξ τμήματι. Συνεστάθω γὰρ ἐπὶ τῆς δε, κατὰ τὸ γ, πρὸς ὀρθὰς ἡ γα, καὶ τῷ ιά. τοῦ ά. καὶ ληφθέντος ὡς ἔτυχε τοῦ ζ, σημείου, ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βζ, ζγ. καὶ ἐπεὶ ἡ δε, ἅπτεται τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς κάθετος συνέσταται ἐπ' αὐτῆς ἡ αγ, πάντως γε κατὰ τὸ ιθ'. τοῦ παρόντος ἐπὶ τῆς αγ, ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ αβζγ, ἄρα ἡμικύκλιόν ἐστιν, ἥδε ὑπὸ αβγ, γωνία ὀρθή, καὶ τῷ αὐτῷ. ὥστε καὶ αἱ λοιπαὶ δύο τῶν αβγ, βγα, γωνίαι, αἱ ὑπὸ βαγ, βγα, μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσί, καὶ τῷ λβ'. τοῦ ά. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ αγε, ὀρθή ἐστιν, αἱ ἄρα ὑπὸ βαγ, βγα, ἴσαι εἰσὶ τῇ ὑπὸ αγε, κοινῆς δὲ ἀφῃρημένης τῆς ὑπὸ βγα, ἐγκαταλείπεται πάντως ἡ ὑπὸ βγε, ἴση τῇ ὑπὸ βαγ· ὅπερ ἦν τὸ ά. Λύθεις ἐπεὶ τοῦ αβζγ, τετράπλευρα αἱ ὑπὸ βαγ, βζγ, ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ τῷ κβ'. τοῦ παρόν-

Euc. Lib. 3. Fig. 26.



τος,

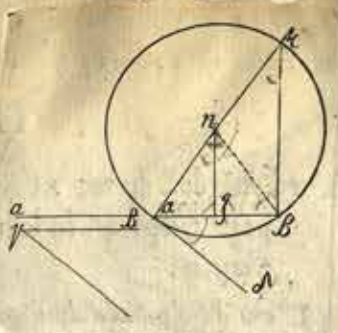
τος, εἰσὶ δὲ ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς καὶ αἱ ὑπὸ βγε, βγδ, καὶ τῷ ιγ. τῶ α. παντως γε αἱ ὑπὸ βαγ, βζγ, ἴσαί εἰσι ταῖς ὑπὸ βγε, βγδ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ βγε, ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ βαγ, ἐγκαπαλείπεται ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, ἴση τῇ ὑπὸ βζγ. ὅπερ ἔδει τὸ β'. Ἐαν κύκλε ἄρα ἅπτηταί τις εὐθεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΓ'. Θεώρημα.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλε δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἐπὶ τῆς αβ, ἤδη δοθείσης εὐθείας ἔστω γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γ. Ἀλλ' ἐπεὶ τὰ εἴδη τῶν γωνιῶν ἓξ εἰσιν, ἡ ὀξεῖα, ἡ ὀρθὴ, ἡ ἀμβλεῖα. Ἔστω α. ἡ δοθεῖσα ὀξεῖα, καὶ συνέστω ἴση ἡ ὑπὸ βαδ, καὶ τῷ κγ. τῶ α. καὶ ἐπὶ τῆς αδ, ἤχθω κάθετος ἀπὸ τῶ α, σημεῖα ἡ αε, διὰ τῆς ια. τῶ αὐτῶ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ αβ, κατὰ τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τῶ ζ, ἤχθω κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, ἡ ζη. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηβ. Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αζ. ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, κοινὴ δὲ ἡ ζη, καὶ ἡ ὑπὸ αζη, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ βζη, παντως γε, καὶ τῷ δ'. τῶ α. καὶ ἡ αη, ἴση ἐστὶ τῇ ηβ. ὥστε κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηα, κύκλος γραφόμενος διελεύσεται καὶ διὰ τῶ β. ἔστω δὴ ὡς ὁ αβε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εβ. καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ αε, διαμέτρῳ πρὸς τῷ α, αὐτῆς ἄκρῳ, δῆλον, ὅτι ἐφάπτεται τῶ κύκλε καὶ τὸ πόρισμα τῆς ις'. ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς α, διήχθη ἡ αβ, εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, καὶ γωνίαν ποιοῦσα μετὰ τῆς αδ, τὴν ὑπὸ βαδ. ἄρα ἡ ὑπὸ βαδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αεβ, ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ, καὶ τῷ αὐωτέρω. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ βαδ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, δοθεῖσα, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αεβ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ, δοθείσῃ. Ἐπὶ τῆς αβ, ἄρα γέγραπται τὸ αεβ, τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ.

Eucl. Lib. 3. Fig. 27.

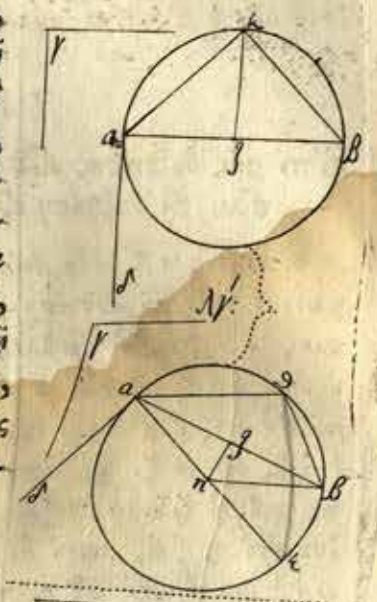


Ἔστω δὲ ἡ πρὸς τῷ χ, γωνία ὀρθὴ. καὶ συνέστω ταύτῃ ἴση ἡ ὑπὸ δαβ, καὶ τῷ κγ. τῶ α. καὶ τῆς αβ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ ζ. κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζα, γεγράφθω κύκλος ὁ αβε. τῆς δὲ ζε, καθέτε ἀγομένης ἐπὶ τῆς αβ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εβ. καὶ ἐπεὶ ἡ δα, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς αβ, ἅπτεται παντως τῶ κύκλε, καὶ τὸ πόρισμα τῆς ις'. τῶ παρόντος. ὥστε ἡ ὑπὸ δαβ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αεβ, καὶ τῷ αὐωτέρω, ἡ καὶ τῷ λα. τῶ παρόντος. ἀλλ' ἡ ὑπὸ δαβ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ. ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αεβ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ. δῆλον ἄρα, ὅτι ἐπὶ τῆς αβ, γέγραπται τὸ αεβ, τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γ'.

Ἔστω

Ἔστω τελεταῖον ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία ἀμβλεῖα, καὶ γενέσθω παύτῃ ἴση ἡ ὑπὸ δαβ, ὡς προηρμωσται. τῆς δὲ κατασκευῆς γενομένης, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς ά. καταγραφῆς, ἐπεὶ ἡ αβ, δίχα τέτμηται, παύπως γε αἱ αζ, ζη, ἴσαι εἰσὶ ταῖς βζ, ζη, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αζη, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ βζη, ἄρα καὶ βάσις ἡ αη, βάσει τῇ βη, ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηα, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ β, ὡς ὁ αβε. Εἰλήφθω δὲ τυχὸν σημεῖον τὸ θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αθ, θβ. καὶ ἐπεὶ ἡ δα, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς αε, ἅπτεται παύπως τοῦ κύκλου, καὶ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ'. τοῦ παρόντος. καὶ δὲ τοῦ αὐωτέρω, ἡ ὑπὸ δαβ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ αθβ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ δαβ, ἴση γέγονε τῇ πρὸς τῷ γ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αθβ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ γ. ἐπὶ τῆς αβ, ἄρα γέγραπται τὸ αθβ, τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

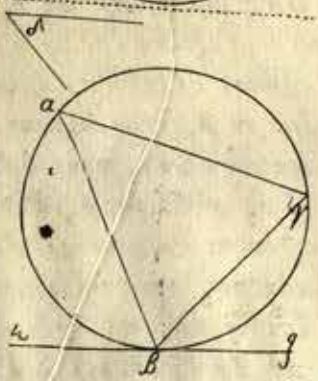
Eucl. Lib. 3. Fig. 28.



Πρότασις ΛΔ'. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω δὴ ἀφελεῖν ἀπὸ τοῦ αβγ, κύκλου τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ δ, δοθείσῃ. Ἀπὸ τοῦ ζ, τυχόντος σημείου ἀχθήτω ἁπτομένη τοῦ αβγ, κύκλου κατὰ τὸ β, ἡ ζε, διὰ τῆς ιζ'. τοῦ παρόντος, καὶ κατὰ τὸ β, σημεῖον πρὸς τῇ ε, εὐθεῖα γενέσθω ἴση τῇ πρὸς τῷ δ, γωνίᾳ ἡ ὑπὸ ζβγ, διὰ τῆς κγ'. τοῦ ά. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βα, αγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ε, ἅπτεται τοῦ κύκλου, παύπως γε ἡ ὑπὸ ζβγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαγ, ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ζβγ, ἴση γέγονε τῇ πρὸς τῷ δ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ. τέτμηται ἄρα τὸ βαγ, τμῆμα, ὡς ἐζητήθη, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Πρότασις ΛΕ'. Θεώρημα.

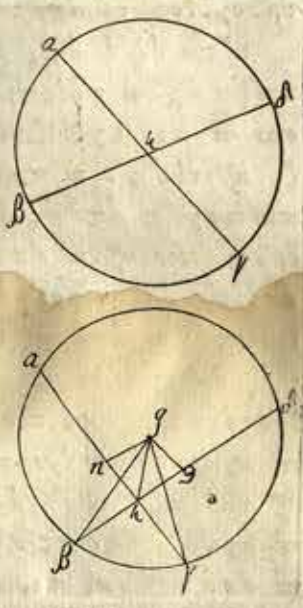
Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν κύκλῳ γὰρ τῷ αβγδ, τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ αγ, βδ, κατὰ τὸ ε. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν αε, εγ, ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν βε, εδ, ὀρθογωνίῳ.

εἰ μὲν

εἰ ἄν αἱ αγ, βδ, διὰ τὸ κέντρον διέρχονται, ἐπεὶ δίχα ἑκατέρα τέμνεται, δῆλον τὸ ὑποκείμενον. εἰ δὲ μὴ διὰ τὸ κέντρον εἰσὶν, ὡς ἐπὶ τῆς β'. διαγράμματος, διῃρήσθω τὸ τοῦ κύκλου κέντρον, διὰ τοῦ ἀ. τοῦ παρόντος, καὶ ἔστω τοῦτο τὸ ζ. ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, ἐφ' ἑκατέρας τῶν αγ, βδ, πιπτέτωσαν κάθετοι, αἱ ζη, ζθ, διὰ τοῦ ι β'. τοῦ ἀ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζβ, ζγ, ζε. ἑκατέρα γὰρ τῶν αγ, βδ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν ζη, ζθ, κατὰ τὰ γ'. τοῦ παρόντος· καὶ δὲ τὰ ε'. τοῦ β'. ἐπεὶ ἡ αγ, εἰς ἴσα μὲν κατὰ τὸ η, ἄνισα δὲ κατὰ τὸ ε, τέτμηται, παντὸς γε τὸ ὑπὸ τῶν αε, εγ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ηε, τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ηγ, τετραγώνῳ, κοινοῦ δὲ προσκειμένου τοῦ ἀπὸ τῆς ηζ, ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν αε, εγ, ὀρθογ. μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν εη, ηζ, τετραγώνων ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ηγ, ηζ, τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν εη, ηζ, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζε. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν γη, ηζ, τὸ ἀπὸ τῆς ζγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αε, εγ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζγ, ἤτοι τῷ ἀπὸ τῆς ζβ. ἴσαι γὰρ αἱ ζγ, ζβ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δε, εβ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, τετραγώνου ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ζβ, τετραγώνῳ. ὥστε καὶ τὸ ἀ. ἀξίωμα, τὸ ὑπὸ τῶν αε, εγ, ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν δε, εβ, ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, τετραγώνου, κοινοῦ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ζε, τετραγώνου ἀφαιρεθέντος, ἐγκαταλείπεται τὸ ὑπὸ τῶν αε, εγ, ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν δε, εβ, ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 3. Fig. 29.

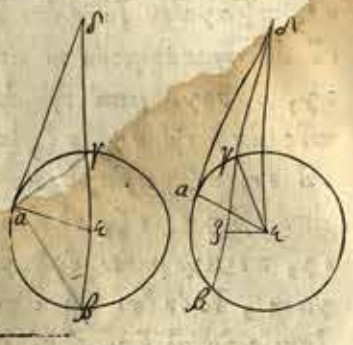


Πρότασις Λς'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου λαμβάνῃ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου γὰρ τοῦ αβγ, καὶ κέντρον τὸ ε, λαμβάνῃ τι σημεῖον ἐκτὸς, τὸ δ. ἀφ' οὗ πρὸς τὸν κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ δβ, δα, καὶ ἡ μὲν δβ, τεμνέτω, ἡ δὲ ἁπτέσθω τοῦ κύκλου. ἀλλ' ἐπεὶ ἡ τέμνουσα διήκει διὰ τοῦ κέντρου καὶ μή, διερχέσθω· ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ α. ἐπεζεύχθω ἡ εα, ἐφ' ἧς ὀρθή ἐστιν ἡ δα, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιε'. ἐπεὶ οὖν ἡ βγ, δίχα τέτ-

τέτμηται καὶ τὸ ε, κέντρον, προσκειται δὲ αὐτῇ ἡ γδ, παντως γε καὶ τιὼ ς'. τῶ β'. τὸ ὑπὸ τῆς βδ, δγ, ὀρθογ. μετὰ τῶ ἀπὸ τῆς γε, τετραγώνω ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ. ἀλλ' ἡ γε, ἴση ἐστὶ τῇ εα, ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς βδ, δγ, ὀρθογώνιον μετὰ τῶ ἀπὸ τῆς αε, τετραγ. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῆς δα, αε, τετράγωνα, ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς βδ, δγ, ὀρθογώνιον μετὰ τῶ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνω ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῆς δα, αε, τετραγώνοις. κοινῶ ἀφαιρεθέντω τῶ ἀπὸ τῆς αε, ἐγκαταλείπεται τὸ ὑπὸ τῆς βδ, δγ, ὀρθογ. ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δα, τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Eucl. Lib. 3. Fig. 30.*



Ἐὰν δὲ ἡ δβ, μὴ διὰ τῶ κέντρου, καὶ ἀπὸ τῶ ε, κέντρω κέχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ δβ, ἡ εζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εγ. Ἐπεὶ ἓν ἡ βγ, δίχα τέτμηται κατὰ τὸ ζ, καὶ τιὼ γ'. τῶ παρόντος, καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ γδ, παντως γε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης βδ, καὶ τῆς προσκειμένης γδ, ὀρθογώνιον μετὰ τῶ ἀπὸ τῆς γζ, τετραγώνω ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δζ, τετραγώνῳ καὶ τιὼ ς'. τῶ β'. κοινῶ προσκειμένω τῶ ἀπὸ τῆς εζ, τετραγώνω, τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γδ, ὀρθογώνιον μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν εζ, ζγ, τετραγώνων ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δζ, ζε, τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν εζ, ζγ, τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γε, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν δζ, ζε, τὸ ἀπὸ τῆς δε, καὶ τιὼ μζ'. τῶ α. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γδ, ὀρθογώνιον μετὰ τῶ ἀπὸ τῆς γε, τετραγώνω, ἤτοι τῆς αε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ. τούτῳ δὲ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν δα, αε, τετράγωνα κατὰ τιὼ ῥηθεῖσαν μζ'. τῶ α. ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γδ, ὀρθογώνιον μετὰ τῶ ἀπὸ τῆς αε, τετραγώνω ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δα, αε, τετραγώνοις. κοινῶ ἀφαιρεθέντω τῶ ἀπὸ τῆς αε, ἐγκαταλείπεται τὸ ὑπὸ τῶν βδ, γδ, ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δα, τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἀφ' ἑνὸς σημείου ἐκτὸς ὄντος τοῦ κύκλου ἐκατέρωθεν ἀπτόμεναι εὐθεῖαι ἀχθῶσιν, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. τὸ γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐναπολαμβανομένης μεταξὺ τῆς κυρτῆς περιφερείας καὶ τοῦ σημείου, ὡς δέδεικται.

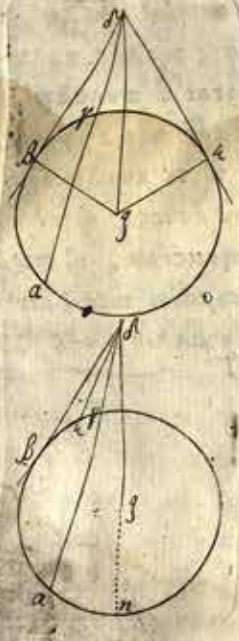
Πρότασις ΛΖ'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ἡ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τεμνούσης, καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

Τοῦ αβγ, ἤδη κύκλου εἰλήφθω σημεῖον ἐκτὸς τὸ δ, ἀφ' οὗ ἀχθήτωσαν αἱ δγα, δβ,

δβ, ἡ μὲν δγα, τέμνουσα, ἡ δὲ δβ, προσπίπτουσα τῷ κύκλῳ· ἔστω δὲ καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν αδ, δγ, ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δβ, τετραγώνῳ. Λέγω, ὅτι ἡ δβ, ἅπτεται τοῦ κύκλου. Ἀχθήτω γὰρ ἀπὸ τοῦ δ, ληφθέντος σημείου καθ' ἕτερον μέρος ἀπτομένη τοῦ κύκλου ἡ δε, διὰ τοῦ ι ζ'. τοῦ παρόντος· καὶ εὑρεθέντος τοῦ ζ, κέντρου καὶ τοῦ α. τοῦ παρόντος, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζβ, ζε. καὶ ἐπεὶ ἡ ζε, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τῆς δε, καὶ τοῦ ι ή. τοῦ αὐτοῦ, παντὸς γε ἡ ὑπὸ ζεδ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἀλλ' ἡ μὲν δε, ἅπτεται, ἡ δὲ δγα, τέμνει τὸν κύκλον, ἄρα καὶ τοῦ ἀφωτέρω, τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δγ, περιεχόμενον ὀρθογ. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ. ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δγ, ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ τῆς δβ, ἡ δε, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ δβ. ἀλλὰ καὶ ἡ ζε, ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, ὡς ἀπὸ τοῦ ζ, κέντρου ἀγομένη, ἄρα αἱ δε, εζ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς δβ, βζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ δζ, κοινή, παντὸς γε καὶ ἡ ὑπὸ ζεδ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζβδ, καὶ τοῦ ή. τοῦ α. ἀλλ' ἡ ζβ, διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶ, καὶ ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἐπ' αὐτῆς πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ βδ, ἅπτεται ἄρα ἡ βδ, τοῦ κύκλου καὶ τὸ πόρισμα τῆς ιε'. τοῦ παρόντος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. Lib. 3. Fig. 31.



Ἄλλως. Τῶν αὐτῶν γὰρ κειμένων, μὴ ἔστω ἀπτομένη, εἰ δυνατὸν, ἡ δβ, τοῦ αβγ, κύκλου, ἀλλ' ἑτέρα τις ἡ δε. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν δε, ἅπτεται, ἡ δὲ δγα, τέμνει τὸν κύκλον, παντὸς γε τὸ ὑπὸ τῶν αδ, δγ, ὀρθογώνιον ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς δε, τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν αδ, δγ, ἴσον ὑπετέθη καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δβ. ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς δε, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς δβ. καὶ ἐπομένως ἡ δε, ἴση ἐστὶ τῇ δβ, ὅπερ ἀδύνατον καθὰ τοῦ ή. τοῦ παρόντος. ἡ γὰρ δε, ὡς ἔγγιον τοῦ διὰ τοῦ κέντρου, ἐλάττων ἐστὶ τῆς δβ, τῆς ἀπώτερον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ περὶ οἱασδήποτ' ἄλλης. οὐκ ἄρα ἄλλη τις εὐθεῖα ἅπτεται τοῦ κύκλου, ἢ ἡ δβ. Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Τέλος τοῦ Τρίτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Προοιμιακὴ περίληψις τῆς τετάρτης τῶν Εὐκλείδου Στοιχείων.

✣ Τὸ μὲν χεῖρας Βιβλ. προβληματικὸν ὂν ἅπαν, διδάσκει τίνι μεθόδῳ ἐγγράπτεα τῷ κύκλῳ, ἢ περιγραπτέα τὰ πολύγωνα, καὶ πακτικὰ χήματα. Ἐκ τούτου μόνου παρήχθη ἡ μέθοδος τῆς κατασκευῆς, καὶ χρήσεως τῶν κανονίων τῶν ἡμιτόνων, ἀπτομενῶν τε καὶ τεμνεσῶν. Ὅθεν καὶ τῇ Τριγωνομετρίᾳ τὰ μάλιστα χρήσιμον. διὰ γὰρ τῆς ἐγγράφειν τῷ κύκλῳ καὶ περιγράφειν πολύγωνα, τὰ τῶν ὑποτεινεσῶν, ἀπτομενῶν, τεμνεσῶν τε, καὶ ἡμιτόνων Κανόνια κατασκευάζειν μανθάνομεν. ὧν τῇ δυνάμει τὰ μεγέθη τῶν οἱωνδηποτῶν σωμάτων ἐχηματισμένων, καὶ ἐπιπέδων χημάτων δυνάμεθα εὑρεῖν, καὶ ἔτι τὰς πρὸς ἄλληλα λόγους. Διὰ τούτων τὰς τῶν Ἀστέρων φάσεις, ὀρθῶς γινώσκομεν, καθ' ἃς πλανῶνται, τριγωνικῶν ἀμέλει, τετραγωνικῶν, καὶ ἑξαγωνικῶν, συνόδους τε καὶ παυσελήνους. αἵτινες τῆς τῶν πολυγώνων ὅλως ἐν κύκλῳ ἐγγραφῆς ἐξήρτηνται. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ πολυθρύλλητος Τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου. διὰ γὰρ τοῦ τετραγωνισμοῦ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἐγγραφομένων τῷ κύκλῳ καὶ περιγραφομένων πολυγώνων, γινώσκεται τὸ τοῦ κύκλου ἐμβαδόν. οἵ, τε τῶν κύκλων πρὸς ἀλλήλους λόγοι, διπλάσιος, τριπλάσιος, καὶ οἱ ἑξῆς, ἐκ τοῦ διπλασίου, τριπλασίου, καὶ τῶν ἑξῆς, τῶν ἐγγραφομένων, καὶ περιγραφομένων πολυγώνων, πρὸς ἄλληλα λόγων, γινώσκονται. χρησιμεύει τοῦτο λίαν τῇ πρὸς τὰ στρατιωτικὰ ὀχυρώματα Ἀρχιτεκτονικῇ, κεχρημένῃ μάλιστα τοῖς ἐγγεγραμμένοις πολυγώνοις τῷ κύκλῳ.

Ε' P-

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΟΥ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

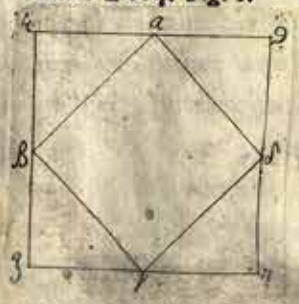
Ὅρος Πρῶτος.

Σχῆμα δ' εὐθυγράμμου εἰς σχῆμα δ' εὐθυγράμμου ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

Β'. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ γράφεται, ἅπτηται.

Ἐπεὶ τρόπος ἐπιστημονικῆς θεωρίας ἐστὶν ἀπὸ τῶν ἁπλουστέρων ἀρχομένους ἐπὶ τὰ τελειότερα μεταβαίνειν, καὶ συνθετώτερα, τοῦτο γε χάριν καὶ Εὐκλ. διδάξας ἐπὶ τοῦ προτέρου Βιβλίου, τὸ τρίτον λαχόντος τάξιν, περὶ τῶν εὐθειῶν τε καὶ γωνιῶν τῶν ἐν τοῖς κύκλοις καὶ τοῖς τῶν κύκλων τμήμασιν, ἄρχεται ἐπὶ τοῦ παρόντος ἑρμηνεῦσαι περὶ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, τῶν εἴτε τοῖς εὐθυγράμμοις, καὶ τοῖς κύκλοις ἐγγραφομένων τε καὶ περιγραφομένων. διὸ καὶ τὰ προσήκοντα τούτῳ τῷ Βιβλίῳ ἀποταμιεύσας, ὡς ὅρους τε καὶ ἀρχὰς τῶν ἄλλων προτίθησιν. ἄρχεται δὲ πῶς ἐγγραφῆς τε καὶ περιγραφῆς τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, τῆς ἐν ἀλλήλοις, αὐτοῦ τούτου ἴσως ἕνεκα. τῶν ὁμοειδῶν γὰρ ἡ χρῆσις εὐληπτοτέρα τῆς τῶν ἀνομοειδῶν καθέστηκε. φησὶ γοῦν, τοιγαροῦν σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι μὲν λέγεται, ὁπόταν ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος ἅπτηται ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, σχήματος· περιγράφεσθαι δὲ περὶ σχῆμα λέγεται, ὁπόταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου σχήματος ἅπτηται ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, σχήματος. οἷον τὸ μὲν α β γ δ, σχῆμα ἐγγράφεσθαι λέγεται εἰς τὸ ε ζ η θ, ὅτι ἑκάστη τῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἅπτεται ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ ε ζ η θ. τὸ δὲ ε ζ η θ, περιγράφεσθαι λέγεται περὶ τὸ α β γ δ, σχῆμα, ὅτι ἑκάστη τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἅπτεται ἑκάστης γωνίας τοῦ α β γ δ, σχήματος.

Eucl. Lib. 4. Fig. 1.



Γ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

Δ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἅπτηται.

Διλώσας ἐν τοῖς ἀνωτέρω δυσὶν ὅροις, τίνα τὰ συστατικὰ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, ὧν τε εἰς ἄλληλα ἐγγραφομένων, καὶ ὧν περὶ ἄλληλα περιγραφομένων, ἅπτεται ἐπὶ τοῦ παρόντος ἐν δυσὶν αὖθις ὅροις, τῶν συστατικῶν τῆς ἐγγραφῆς τε καὶ περιγραφῆς τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, τοῖς κύκλοις παραβαλλομένων. καὶ δή φησι, Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον τοιοῦτο ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος, ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. Περιγράφεσθαι δὲ τοιοῦτο, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου σχήματος τῆς τοῦ κύκλου ἅπτηται περιφερείας. οἷον τὸ μὲν αβγδε, σχῆμα εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένον λέγεται, ὅτι ἑκάστη τῶν αὐτοῦ γωνιῶν τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἅπτεται. τὸ δὲ ζηθκλ, περιγεγραμμένον, ὅτι ἑκάστη τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἅπτεται τοῦ κύκλου.

Encl. Lib. 4. Fig. 2.

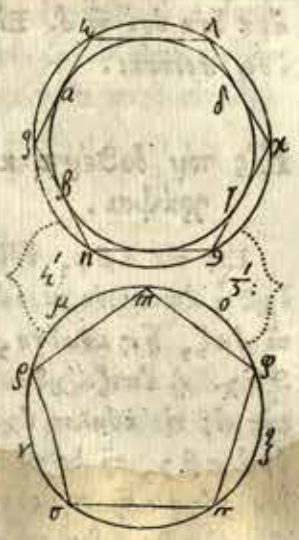
Ε'. Κύκλος δὲ ὁμοίως εἰς σχῆμα λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

ς'. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

Διδάξας ἐν τοῖς δυσὶ προτέροις ὅροις, πότε τῶν εὐθυγράμμων ἕκαστον σχημάτων εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, καὶ πότε περὶ κύκλον περιγράφεσθαι. ἐπεὶ ἄμφω ταῦτα δυνάται καὶ ὁ κύκλος παθεῖν, βούλεται ἐν τοῖς δυσὶ τούτοις ὅροις διαζωῦσαι, καὶ πότε μὲν εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον κύκλος ἐγγράφεσθαι λέγεται, πότε δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι. δύο μὲν οὖν ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων θεωρουμένων, τῶν γωνιῶν, φησι, καὶ πλευρῶν, ἑνὸς δὲ ἐπὶ τοῦ κύκλου, ὡς ἁπλουστέρου, τῆς αὐτοῦ δηλονότι περιφερείας. ἐν ἐκείνοις μὲν, ὧν αἱ γωνίαι τοῦ κύκλου ἥπτοντο, ἐγγεγραμμένα ἐλέγετο, ὧν δὲ αἱ πλευραὶ, περιγεγραμμένα. ἐπὶ δὲ τοῦ κύκλου, ὅταν μὲν ἡ περιφέρεια αὐτοῦ τῶν πλευρῶν ἅπτηται τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος, τότε ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ σχῆμα λέγεται, ὅτε δὲ ἡ περιφέρεια ἅπτηται τῶν γωνιῶν, τοιοῦτο ὁ κύκλος περιγεγραμμένος λέγεται περὶ τὸ σχῆμα. οἷον ὁ μὲν αβγδ, κύκλος ἐγγράφεσθαι λέγεται εἰς τὸ εζηθκλ, σχῆμα, ὅτι ἡ τύπου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ σχήματος ἅπτεται.

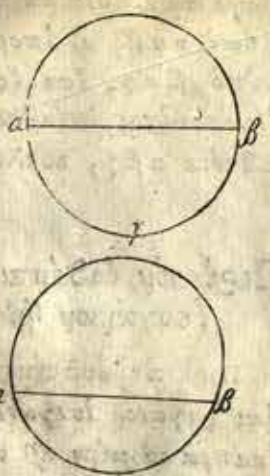
ται· ὁ δὲ μυξο, κύκλος περιγράφεσθαι περὶ πρστφ, χῆμα, ὅτι ἡ τότε περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τὸ χήματος ἅπτεται. ὥστε νῦνικα τὸ χῆμα ἐγγεγραμμένον ἐστὶν εἰς κύκλον, τιωικαῦτα ὁ κύκλος περιγεγραμμένος ἐστὶ περὶ τὸ χῆμα· καὶ ἀνάπαλιν, ὅτε τὸ χῆμα περιγεγραμμένον ἐστὶ περὶ τὸν κύκλον, τότε ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος ἐστὶν εἰς τὸ χῆμα.

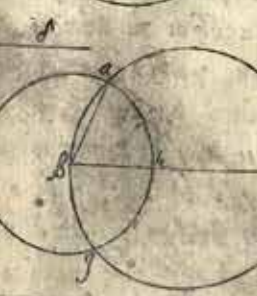
Euclid. Lib. 4. Fig. 3.



Ζ'. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἁρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

Ἐπεὶ τῶν μαθηματικῶν προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων τοῖς πλείοσιν ἡ μόνον ἡ δεῖξις ἀναγκαία, ἀλλ' ἐκ ἧττον καὶ ἡ κατασκευή· ἐν δὲ τῷ κύκλῳ ἔιχως ἐνδέχεται θεωρεῖσθαι τιὼ εὐθεῖαν. ἢ γὰρ ἅπτεται τοῦ κύκλου, ἢ τέμνει αὐτὸν, ἢ ἐναρμόζεται εἰς τὸν κύκλον· καὶ ἡ μὲν ἀπομένη εἰς κατασκεύιω τῶν περὶ κύκλον περιγραφομένων χημάτων συμβάλλει, περὶ ἧς ἐν τῷ προτέρῳ ἡρμιώσατο βιβλίῳ· ἡ δὲ ἐνηρμοσμένη εἰς κατασκεύιω τῶν ἐγγραφομένων εἰς κύκλον ἀναγκαία, ἧς ἐν ὀδνῖ τῶν προτέρων βιβλίων, ὡς μὴ χρειώδης τότε, μνήμιω ἐποιήσατο· τότε οὖσα ἐπὶ τοῦ παρόντος, ὡς ἀναγκαίας ὕσης καὶ τῆς παύτης γνώσεως, ἑρμιωδίει περὶ αὐτῆς. Ἐναρμόζεσθαι τοίνυν εὐθεῖα εἰς κύκλον, φησὶ, λέγεται, ὅταν τὰ τῆς ἐνηρμοσμένης πέρατα ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου, ὡς ἡ αβ, ἧς τὰ α, καὶ β, πέρατα ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αβγ, κύκλου ἐστίν. ὥστε ἐπεὶ ἐν κύκλῳ εὐθεῖα, ἡ διὰ τοῦ κέντρου, ἢ ἐκτὸς τότε γράφεται, παύτως γε δύο καὶ τῆς ἐνηρμοσμένης εἰς κύκλον εὐθείας τὰ εἴδη, ἥτε διάμετρος καὶ ἡ χορδή. τίς δὲ ὁ τρόπος τοῦ ἑκάστιω εὐθεῖαν, εἰς ἕκαστον κύκλον ἐναρμόζεσθαι, ἐξῆς ἐρεῖ.





Πρότασις Α'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσιω εὐθεῖαν ἁρμόσαι.

Ἔστω δὴ ἐναρμόσαι εἰς κύκλον τὸν αβγ, εὐθεῖαν ἴσιω τῇ δοθείσῃ δ. Ἤχθω ἡ βγ, διάμετρος τοῦ κύκλου· καὶ ἐὰν ἴση μὲν ἡ βγ, τῇ δ, γέγονε τὸ προσαχθέν· εἰ δὲ μείζων, ἀφῃρήσθω ἴση τῇ δ, ἡ βε.

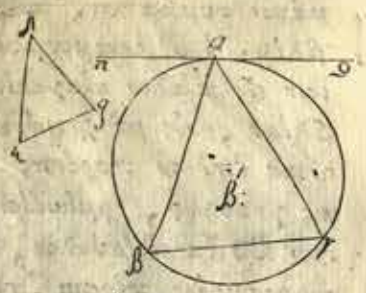
ἡ βε, καὶ τῷ γ. τῶ α. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βε, κύκλος γεγράφθω ὁ αεζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βα. Ἐπεὶ οὖν τὸ β, κέντρον ἐστὶ τοῦ αεζ, κύκλου, πάντως γε ἡ βα, ἴση ἐστὶ τῇ βε, ἀλλ' ἡ βε, ἴση εἴληπται τῇ δ, καὶ ἡ αβ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ δ. Εἰς τὸν αβγ, ἄρα κύκλον ἐνήρμοσαι ἡ βα, ἴση τῇ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Β'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογωνίῳ τρίγωνον ἐγγράψαι.

Εἰς τὸν αβγ, ἤδη κύκλον ἔστω ἐγγράψαι τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ δοθέντι δεζ. ἤχθω ἀπτομένη τοῦ κύκλου κατὰ τὸ α, ἡ ηθ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ζ, γωνία τῇ δεζ, τριγώνου ἴση, ἡ ὑπὸ ηαβ, καὶ τῷ κγ'. τῶ α. πρὸς δὲ τῇ ε, ἡ ὑπὸ θαγ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ηθ, ἅπτεται τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον ἤχθη τέμνουσα ἡ αγ, ἄρα ἡ ὑπὸ θαγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αβγ, τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι, καὶ τῷ λβ'. τῶ γ'. ἀλλ' ἡ ὑπὸ θαγ, ἴση γέγονε τῇ πρὸς τῇ ε, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῇ ε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ γ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ηαβ, καὶ ἑπομένως τῇ πρὸς τῷ ζ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ βαγ, ἴση ἔσται τῇ πρὸς τῷ δ. τὸ αβγ, ἄρα τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δεζ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα αβγ, κύκλον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 4. Fig. 4.



Πρότασις Γ'. Πρόβλημα.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Περὶ τὸν δοθέντα ἤδη αβγ, κύκλον ἔστω περιγράψαι τρίγωνον ἰσογώνιον τῷ δεζ. Ἐκβεβλήσθω ἡ εζ, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ η, θ, καὶ εἰλήφθω τὸ κ, κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ τῷ κα'. τῶ γ'. καὶ τῇ μὲν ὑπὸ δεη, γωνίᾳ, ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ βκα. τῇ δὲ ὑπὸ δζθ, ἡ ὑπὸ βκγ, καὶ τῷ κγ'. τῶ α. καὶ διὰ τῶν α, β, γ, σημείων ἤχθωσαν ἁπτόμεναι τοῦ κύκλου, καὶ τῷ ιζ'. τῶ γ'. αἱ λμ, μν, νλ, αἵτινες ὀρθαί εἰσι, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιε'. τῶ αὐτῶ, ὥστε ἑκάστη τῶν ὑπὸ καμ, κβμ, κγν, ὀρθή ἐστιν. Ἐπεὶ δὲ πάντος τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, διὰ τὸ εἰς δύο διαιρεῖσθαι τρίγωνα, καὶ τὰς τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι, κατὰ τῷ λβ'. τῶ α. ἄρα καὶ τοῦ ακβμ, τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, αἱ δὲ ὑπὸ καμ, κβμ, δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι, ἑκατέρα γὰρ ὀρθή,

ὡς

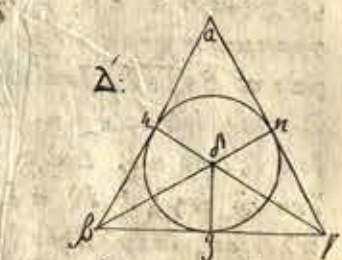
ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ ακβ, αμβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ δεη, δεζ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, κατὰ τὸ ιγ'. τὰ ἄ. ἄρα αἱ ὑπὸ ακβ, αμβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ δεη, δεζ. γέγονε δὲ ἡ ὑπὸ ακβ, ἴση τῇ ὑπὸ δεη, ἐγκαταλείπεται ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αμβ, ἴση τῇ ὑπὸ δεζ. Διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ὑπὸ βνγ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δζε. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ αλγ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εδζ. τὸ λμν, ἄρα τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δεζ. καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν δοθέντα αβγ, κύκλον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Δ'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω δὴ ἐγγράψαι κύκλον εἰς τὸ αβγ, τρίγωνον. Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβγ, αγβ, γωνιῶν δίχα, καὶ τῷ β'. τὰ ἄ. ταῖς βδ, γδ, εὐθείαις, συμβαλλούσαις ἀλλήλαις κατὰ τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ, ἀχθήτωσαν κάθετοι ἐπὶ τὰς αβ, βγ, γα, αἱ δε, δζ, δη. Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ὑπὸ εβδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζβδ, δίχα γὰρ ἡ ὑπὸ εβζ, τέτμηται· ἡ δὲ ὑπὸ βεδ, τῇ ὑπὸ βζδ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· ἄρα τρεῖς δεβ, δζβ, τριγώνων δύο γωνίαι δυσὶ γωνίαις ἴσαι εἰσίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ βδ, ὑποτείνουσα ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν κοινή, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ τοῖς δεβ, τριγώνοις, ἴσαι εἰσὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς τοῖς δζβ, κατὰ τὸ κς'. τὰ ἄ. ἡ δε, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ δζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ δη, ἴση τῇ δζ. ὥστε αἱ δε, δζ, δη, ἴσαι εἰσί· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δε, γραφόμενός τις κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν ζ, καὶ η, καὶ ἅψεται τῶν αβ, βγ, γα, πλευρῶν τοῖς αβγ, τριγώνοις, διὰ τὸ καθέτους εἶναι ἐπὶ τῶν εδ, δζ, δη, καὶ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ'. τοῦ γ'. ὅπερ ἔδει τὸ προσαχθέν.

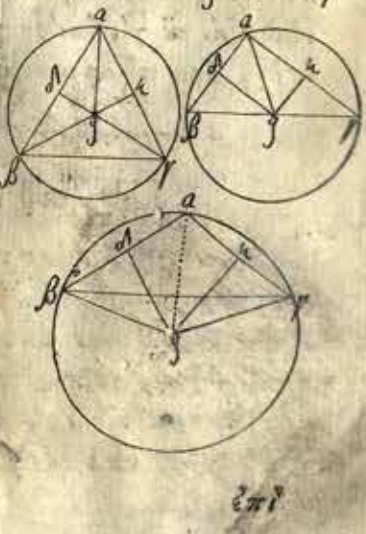
Eucl. Lib. 4. Fig. 5.



Πρότασις Ε'. Πρόβλημα.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω δὴ περιγράψαι κύκλον περὶ τὸ αβγ, τρίγωνον. Τετμήσθω ἑκάτερα τῶν αβ, καὶ αγ, πλευρὰ τοῦ τριγώνου δίχα καὶ τῷ δ, καὶ ε, σημείᾳ, ἀφ' ὧν ἀχθήτωσαν κάθετοι ἐπὶ τῶν αβ, αγ, αἱ δζ, εζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζβ, ζγ, ζα. Ἐπεὶ δὴ τῶν δζ, εζ, συμβαλλουσῶν ἀλλήλαις καὶ τῷ ζ, ἔτι ἐνδέχεται συμβλῆσαι τινὶ τῶν τοῦ τριγώνου, ἡ γὰρ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ἔσται τὸ ζ, ὡς ἐπὶ τῆς α'. καταγραφῆς τοῦ σχήματος, ἢ ἐπὶ τῆς βγ, ὡς ἐπὶ τῆς β'. ἢ γοῦν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, ὡς ἐπὶ τῆς γ'. ἐφ' ἑκάστης δὲ τῶν καταγραφῶν ἔσται ἡ αὐτὴ ἔκθεσις. φέρε δὴ



ἐπὶ

ἐπὶ τὸ ά. μόνα τῶν ἀπόδειξιν ποιήσωμεν. Αἱ μὲν οὖν δα, δβ, ἴσαι εἰσὶ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἑφέστηκεν ἑκατέρα ἡ δζ. ἄρα καὶ βάσις ἡ βζ, βάσει τῇ ζα, ἴση ἐστὶ καὶ τῶν ἡ. τοῦ ά. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ γζ, ἴση τῇ αζ. ὥστε αἱ τρεῖς ζα, ζβ, ζγ, ἴσαι εἰσί. καὶ ὁ κέντρῳ μὲν ζ, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ζα, γραφόμενος κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τῶν β, καὶ γ, σημείων, καὶ περιγεγραμμένος ἔσται περὶ τὸ αβγ, τρίγωνον, καὶ τὸν ἑ. ὅρον τοῦ παρόντος. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῆς β'. καὶ γ'. καταγραφῆς τὸ ζ, κέντρον εἶναι τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον περιγραφομένου κύκλου. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

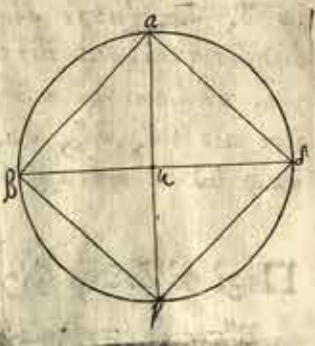
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ὅταν τινὸς δύο τοῦ τριγώνου πλευρῶν δίχα τμηθῶσιν, αἱ ἐπ' αὐτῶν ἀγόμεναι κάθετοι ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται, καὶ ὑπὸ τῆς ἀτμήτου ὑποτεινομένη γωνία, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, καὶ * πάλιν, ἐν μείζονι γὰρ ἐστὶ τμήματι. ὅταν δὲ ἐπὶ τῆς ἀτμήτου, ὀρθὴ, καὶ * πάλιν, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ. ὅταν δὲ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, μείζων ὀρθῆς, ἐν ἐλάττονι γάρ ἐστι τμήματι κύκλου.

Πρότασις ς'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ἐγγράψαι τετράγ. εἰς τὸν αβγδ, κύκλον, ἑ κέντρον τὸ ε. Ἤχθωσαν δὴ αἱ αγ, βδ, τοῦ κύκλου διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τεμνόμεναι. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δα. καὶ τὸ αβγδ, ἐγγεγραμμένον χῆμα εἰς τὸν κύκλον, τετράγωνον ἔσται. Ἐπεὶ γὰρ αἱ βε, εδ, ἴσαι εἰσὶν, ὡς ἡμιδιάμετροι, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ εα. ἄρα καὶ βάσις τῶν ἡ. τοῦ ά. καὶ ἡ βα, ἴση ἐστὶ τῇ αδ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ μὲν αβ. ἴση τῇ βγ, ἡ δὲ αδ, τῇ δγ. ὥστε τὸ αβγδ, τετράπλευρον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὀρθογώνιον, καὶ τῶν λά. τοῦ γ'. ἑκάστη γὰρ τῶν αὐτοῦ γωνιῶν ἐν ἡμικυκλίῳ ἐστὶν, ἄρα τετράγωνον ἐστίν. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 4. Fig. 6.



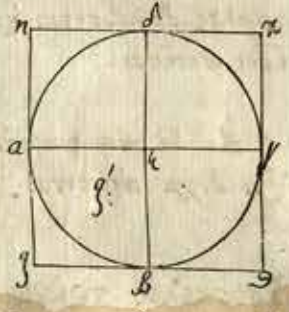
Πρότασις ζ'. Πρόβλημα.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἔστω περιγράψαι τετράγωνον περὶ τὸν αβγδ, κύκλον. Ἤχθωσαν δὴ αἱ αγ, βδ, διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τεμνόμεναι, καὶ διὰ τῶν αβγδ, σημείων διήχθωσαν ἁπτόμεναι τοῦ κύκλου αἱ ζη, ζθ, θκ, κη. καὶ τὸ ζθκη, τετράπλευρον, τὸ περὶ τὸν αβγδ, περιγραφὲν κύκλον, τετράγωνον ἔσται. καὶ γὰρ τὸ πόρισμα τῆς ιε'. τοῦ γ'. ἥτε ζη, καὶ θκ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἐπὶ τῆς αγ, διαμέτρου. ὥστε αἱ ὑπὸ ζαγ, θγα, γωνίαι, ὀρθαί εἰσι, καὶ ἑπομένως αἱ ζη, θκ, παρά-

παράλληλοί εἰσι καὶ τῶν κη. τῆ α. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ ζϑ, ηκ, παράλληλοί εἰσι. τὸ ζϑκη, ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστιν. ἀλλὰ ταῖς μὲν ζη, ϑκ, ἴσηται καὶ παράλληλός ἐστιν ἡ βδ, ταῖς δὲ ζϑ, ηκ, ἡ αγ, καὶ τῶν ῥηϑεισῶν κη. τῆ α. αἱ δὲ βδ, αγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὡς διάμετροι, ἄρα αἱ ζη, ζϑ, ϑκ, κη, ἴσαί εἰσιν, καὶ τὸ ζϑκη, ἰσόπλευρόν ἐστι. Λέγω δ' ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ αἱ ὑπὸ ζαγ, ϑγα, ὀρθαί εἰσι, καὶ τὸ ζγ, παραλληλόγραμμον, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ αζϑ, γϑζ, ἀπεναντίον ὀρθαί εἰσι καπὰ τῶν λδ'. τῆ α. καὶ δὲ τῶν αὐτῶν ἔτι καὶ αἱ ὑπὸ ζηκ, ϑκη, ὀρθαί εἰσιν, ἄρα τὸ ζϑκη, ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἀλλὰ δὴ καὶ ἰσόπλευρον, ὡς δέδεικται, τετράγωνον ἄρα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

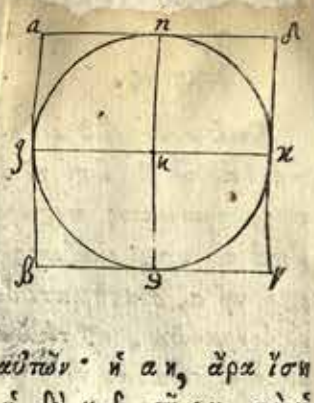
Euclid. Lib. 4. Fig. 7.



Πρότασις Η'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω ἐγγράψαι κύκλον εἰς τὸ αβγδ, τετράγωνον. Τετμήσθωσαν δὴ αἱ αβ, αδ, δίχα κατὰ τὰ ζ, καὶ η, σημεῖα. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ ζ, ἤχθω παράλληλος τῇ αδ, ἡ βγ, ἡ ζκ, ἀπὸ δὲ τοῦ η, ὁμοίως ἤχθω παράλληλος τῇ αβ, ἡ δγ, ἡ ηϑ, τέμνουσα τὴν ζκ, κατὰ τὸ ε. Λέγω τοίνυν ὅτι ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εζ, γραφόμενος κύκλος διέρχεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων η, κ, ϑ. Τὰ γὰρ αη, κβ, αϑ, ϑδ, παραλληλόγραμμά ἐστι, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι, κατὰ τὴν λδ'. τῆ α. ὥστε αἱ ζκ, αδ, ἴσαί εἰσιν, ἑπομένως δὲ καὶ αἱ ἡμίσειαι αὐτῶν· ἡ αη, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ζε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡμὲν αζ, ἴση ἐστὶ τῇ ηε. ἡ δὲ ηδ, τῇ εκ. καὶ ἡ ζβ, τῇ εϑ. ἐπεὶ δὲ αἱ αη, ηδ, καὶ αζ, ζβ, ἴσαί εἰσι, κατὰ τὴν κατασκευὴν, παντῶς γε καὶ αἱ ηε, ζε, ϑε, κε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ εζ, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν η, κ, ϑ, σημείων, ἁπτόμενος τῶν αδ, αβ, βγ, γδ, εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς η, ζ, ϑ, κ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ'. τῆ γ. εἰς τὸ δοθὲν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.



Πρότασις Θ'. Πρόβλημα.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον περιγράψαι.

Ἔστω δὴ περιγράψαι κύκλον περὶ τὸ αβγδ, τετράγωνον. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, βδ, τῶν τετραγώνου διάμετροι, τεμνόμεναι ἀλλήλας κατὰ τὸ ε, κέντρον ἔστω τοῦ κύκλου. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αδ, ἴση ἐστὶ τῇ αβ, κοινὴ δὲ ἡ αγ, καὶ βάσις ἡ γδ, βάσει τῇ γβ, ἴση, παντῶς γε, καὶ τὴν ὑπὸ δαγ, γω-

νία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β α γ, ὥστε ἡ πρὸς τῇ α, γωνία τοῦ τεθραγώνου δίχα τέτμηται. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς β, γ, δ, σημείοις γωνίαι δίχα τέμνονται. ἔστι δὲ ἡ πρὸς τῷ α, ἴση τῇ πρὸς τῷ β· καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ε α β, ἡμίσεια ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ α. ἡ δὲ ὑπὸ ε β α, τῆς πρὸς τῷ β· ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ ε α, ἴση ἐστὶ τῇ ε β, καὶ τῇ τλῶ ε. τοῦ α. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ε β, τῇ ε γ, καὶ ἡ ε γ, τῇ ε δ, καὶ ἡ ε δ, τῇ ε α, ὥστε αἱ ε α, ε β, ε γ, ε δ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἄρα ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ε, διαστήματι δὲ τῷ ε α, περιγραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν β, γ, δ, σημείων. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 4. Fig. 8.

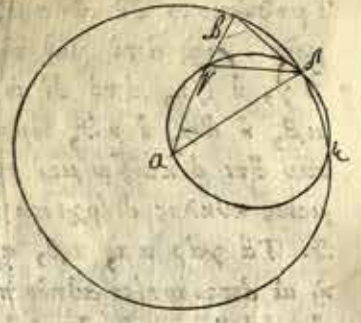
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι παντὸς τεθραγώνου αἱ διάμετροι δίχα τέμνονται.

Πρότασις Ι'. Πρόβλημα.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

Ἐκκείσθω δύο εὐθεῖαι αἱ α β. καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, διὰ τοῦ ια. τοῦ β. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ὅλης α β, καὶ β γ, ἐλάττονος τμήματος περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς α γ, μείζονος τμήματος τεθραγώνῳ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ α β, γεγράφθω κύκλος ὁ β δ ε, καὶ ἐνηρμόσθω, κατὰ τὸ α. τοῦ παρόντος, εἰς τὸν β δ ε, κύκλον δύο εὐθεῖαι ἴσαι τῇ α γ, αἱ β δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δ α, δ γ, καὶ ἔστω τὸ προσαχθέν. Περιγεγράφθω γὰρ τὸ α γ δ, τρίγωνον περιγεγράφθω ὁ α γ δ, κύκλος, κατὰ τὸ ε. τοῦ παρόντος· καὶ ἐπεὶ αἱ α β, α δ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὡς ἡμιδιάμετροι, παντὸς γε τοῦ α β δ, τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστιν. ὅτι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β δ, α δ β, πρὸς τῇ βάσει αὐτοῦ γωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ β α δ, πρὸς τῇ κορυφῇ, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν α β, β γ, ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς α γ, τεθραγώνῳ, κατὰ τὸ καταστάλιν, εἴληπται δὲ ἡ β δ, ἴση τῇ α γ, παντὸς τὸ ὑπὸ τῶν α β, β γ, ὀρθογ. ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β δ, τεθραγώνῳ. ὥστε κατὰ τὸ λ ζ'. τοῦ γ'. ἡ β δ, ἅπτεται τοῦ α γ δ, κύκλου. Ἐπεὶ δὲ πάλιν ἀπὸ τῆς ἁφῆς, δηλ. τοῦ δ, σημείου ἦκται ἡ δ γ, τέμνουσα τὸν κύκλον· παντὸς γε ἡ ὑπὸ β δ γ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ τμήματος γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ γ α δ, κατὰ τὸ λ β'. τοῦ γ'. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς ὑπὸ γ δ α, ἅπασα ἄρα ἡ ὑπὸ β δ α, ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ γ δ α, γ α δ. ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ γ δ α, γ α δ, ἴση ἐστὶ καὶ ἐκτὸς ὑπὸ β γ δ, κατὰ τὸ λ β'. τοῦ α'. ἄρα ἡ ὑπὸ β δ α, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β γ δ, τῇ δὲ ὑπὸ β δ α, ἴση ἐστὶν, ὡς δέδεικται, ἡ ὑπὸ α β δ, κατὰ τὸ ε. τοῦ α.



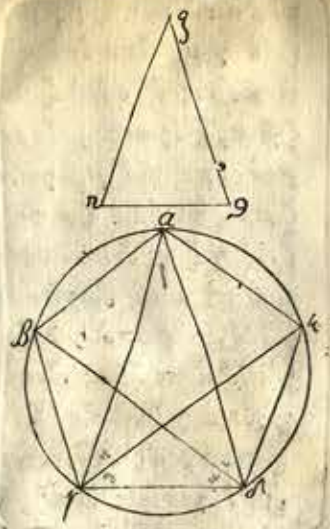
τῶ ά. ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αβδ, ὥστε ἡ δβ, ἴση ἐστὶ τῇ δγ, καὶ τῷ ρηθεῖσα ε. ἀλλὰ τῇ δβ, ἴση ἐστὶν ἡ γα, ἄρα ἡ γδ, ἴση ἐστὶ τῇ γα, καὶ ἑπομένως αἱ ὑπὸ γδα, γαδ, γωνίαι ἴσαί εἰσι, καὶ αἱ δύο ἄρα τῆς μιᾶς ὑπὸ γαδ, διπλάσιαι. ταῖς δὲ ὑπὸ γδα, γαδ, ἴση ἐστὶ καὶ ὑπὸ βδα, καὶ ἡ παύτη ἴση ἡ ὑπὸ δβα, ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβδ, αδβ, τῇ πρὸς τῇ βάσει τῶ ἔιγ. γωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαδ. γέγραπται ἄρα τὸ αβδ, ἰσοσκελὲς ἔίγωνον, διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν τῆς λοιπῆς. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΑ'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω δὴ ἐγγράψαι εἰς τὸν αβγδε, κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Κείσθω, καὶ τῷ αὐωτέρω, τὸ ζηθ, ἔίγωνον ἰσοσκελὲς, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. *Euclid. Lib. 4. Fig. 9.*

καὶ τετῳ ὅμοιον ἐγγεγράφθω, καὶ τὴν βʹ. τῶ παρόντος, εἰς τὸν αβγδε, κύκλον τὸ αγδ. ὥστε ἑκατέραν τῶν ὑπὸ αγδ, αδγ, διπλασίονα εἶναι τῆς ὑπὸ γαδ. καὶ τμηθήτω δίχα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αγδ, αδγ, διὰ τῶν γε, δβ. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ γβ, βα, αε, εδ, καὶ τὸ αβγδε, πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν τε ἔσαι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αγδ, αδγ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γαδ, καὶ δίχα τέτμηται, αἱ γεγονῦαι ἄρα πέντε γωνίαι, γαδ, αγε, εγδ, αδβ, βδγ, ἴσαί εἰσι, καὶ κατὰ τὸ κεʹ. τῶ γʹ. ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, αἱ ἄρα αβ, βγ, γδ, δε, εα, περιφέρειαι ἴσαί εἰσι, καπὸ τὸ κθʹ. τῶ γʹ. τὸ ἄρα αβγδε, πεντάγωνον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. Ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αβ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ δε, κοινῆς προσκειμένης τῆς βγδ, παύπως γε ὅλη ἡ αβγδ, περιφέρεια, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ βγδε. καὶ τῷ κεʹ. ἄρα τῶ γʹ. καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν βεβηκυῖαι γωνίαι, αἱ ὑπὸ αεδ, βαε, ἴσαί εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ αβγ, βγδ, γδε, ἴση ἐστὶν, ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ βαε, αεδ. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγδε. δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρον. ἄρα εἰς τὸν αβγδε, κύκλον ἐγγέγραπται πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

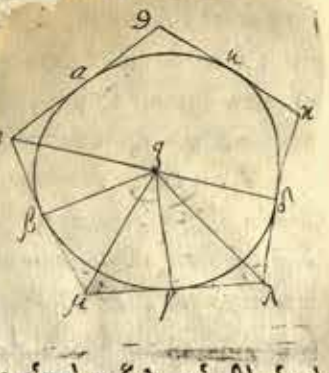


Πρότασις ΙΒ'. Πρόβλημα.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Φέρε δὴ περὶ τὸν αβγδε, κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψωμεν. Νενοήθωσαν ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου σημεῖα τὰ α, β, γ, δ, ε, ὥστε τὰς αβ, βγ, γδ, δε, εα, ἴσας εἶναι. καὶ εἰλήφθω διὰ τῆς ά. τοῦ γ'. τὸ ζ, κέντρον τοῦ κύκλου. καὶ διὰ τῶν α, β, γ, δ, ε, σημείων ἀχθήτωσαν ἀπτόμεναι τοῦ κύκλου αἱ ηθ, θκ, κλ, λμ, μη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζη, ζβ, ζμ, ζγ, ζλ, ζδ. Ἐπεὶ ἓν ἡ μλ, ἅπτεται τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν προσέπεσεν ἡ ζγ, πάντως γε αἱ πρὸς τῇ γ, γωνίαι ὀρθαί εἰσι, καὶ τὸ πόρισμα, τῆς ι ς'. τοῦ γ'. ὡσαύτως καὶ αἱ πρὸς τῇ β, καὶ δ, ὀρθαί εἰσιν. ἀμέλειποι, καὶ τλω μζ'. τοῦ ά. τὸ ἀπὸ τῆς ζμ, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ζγ, γμ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ζβ, βμ, ὥστε, καὶ τὸ ά. ἀξίωμα, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ζγ, γμ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ζβ, βμ. ἀλλ' ἡ ζγ, ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, ἄρα καὶ ἡ γμ, ἴση ἐστὶ τῇ βμ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ζγ, ἴση τῇ ζβ, καὶ βάσις ἡ αὐτὴ ζμ. καὶ τλω ή. ἄρα τοῦ ά. καὶ ὅλον τὸ ζβμ, τριγώνου, ἴσόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ζγμ, τριγώνῳ, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ βζμ, γωνία τῇ ὑπὸ γζμ, ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ζμβ, τῇ ὑπὸ ζμγ. καὶ ἑπομένως ἡ μὲν ὑπὸ βζγ, τῆς ὑπὸ γζμ, διπλῆ ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ βμγ, τῆς ὑπὸ γμζ.

Euclid. Lib. 4. Fig. 12.



Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ μὲν ὑπὸ γζδ, διπλῆ τῆς ὑπὸ γζλ, ἡ δὲ ὑπὸ γλδ, τῆς ὑπὸ γλζ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ βζγ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γζδ, καὶ τλω κζ'. τοῦ γ'. διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς βγ, γδ, περιφερείας, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ γζμ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γζλ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζγμ, τῇ ὑπὸ ζγλ, ὁμοίως ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ὡς δέδεικται, ἄρα τὰ ζγμ, ζγλ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας, καὶ τλω ζγ, τλω πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴ, ὥστε καὶ τλω λοιπὴ γωνίαν τῇ λοιπῇ, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξουσι, καὶ τλω κς'. τοῦ ά. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ζμγ, τῇ ὑπὸ ζλγ, καὶ εὐθεῖα ἡ μγ, εὐθείᾳ τῇ γλ, ὁμοίως ἴση, ἡ δὲ ὅλη μλ. διπλασία τῆς μγ. Διὰ τὰ αὐτὰ δείκνυται καὶ ἡ ημ, διπλασία τῆς βμ, ἀλλ' ἡ βμ, ἴση ἐστὶ τῇ μγ, ἄρα καὶ ἡ ημ, ἴση ἐστὶ τῇ μλ, καὶ τὸ ς'. ἀξίωμα. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, καὶ ἑκάστη τῶν ηθ, θκ, κλ, ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ημ, μλ. ἄρα τὸ ηθκλμ, ἰσόπλευρόν ἐστι. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ ζμγ, ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ ζλγ, καὶ τῆς μὲν ζμγ, διπλασίᾳ ἐστὶν ἡ ὑπὸ βμγ, ἤτοι ἡ ὑπὸ ημλ, τῆς δὲ ὑπὸ ζλγ, ἡ ὑπὸ κλμ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ημλ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ κλμ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν πρὸς τοῖς η, θ, κ, γωνιῶν ἴση ἐστὶν ἑκατέρᾳ τῶν πρὸς

τοῖς

τοῖς μ, καὶ λ. τὸ ἄρα η θ κ λ μ, ἰσογώνιόν ἐστι, δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρον. περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον περιγέγραπται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

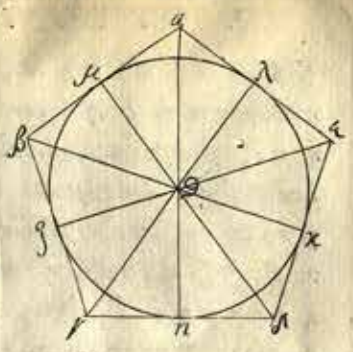
Ἐκ δὴ τούτων φανερόν, ὅτι ἐν τοῖς ἰσογωνίοις καὶ ἰσοπλεύροις πενταγώνοις τῶν πλευρῶν δίχα τμηθεισῶν, καὶ ἐπ' αὐτῶν καθέτων ἀγομένων, αἱ ἀπὸ τῆς συμβολῆς τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς γωνίας ἀγόμεναι εὐθεῖαι, δίχα τὰς γωνίας τέμνουσι.

Πρότασις ΙΓ'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιόν ἐστι, κύκλον ἐγγράψαι.

Φέρε δὴ εἰς τὸ α β γ δ ε, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον, κύκλον ἐγγράψωμεν. Τετμήσθωσαν αἱ β γ, γ δ, δίχα κατὰ τὰ ζ, η, σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τῶν β γ, γ δ, κάθετοι ἀχθήτωσαν, αἱ ζ θ, η θ, προσπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ θ. καὶ ἀπὸ τοῦ θ, σημείου, τῆς συμβολῆς δηλονότι τῶν ζ θ, η θ, καθέτων, ἤχθω ἐπὶ τινα τῶν πρὸς τῇ γ, γωνίαν, ἡ θ γ. Κατὰ δὴ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, ἡ ὑπὸ β γ δ, γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς θ γ, ὥστε ἡ ὑπὸ θ γ ζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ θ γ η. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ θ ζ γ, τῇ ὑπὸ θ η γ, ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. τὰ δύο ἄρα τρίγωνα θ ζ γ, θ η γ, ἔχουσι τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ θ ζ γ, ζ γ θ, ἴσας δυσὶ ταῖς ὑπὸ θ η γ, η γ θ, ἔχουσι δ' ἔτι καὶ τινα τῶν πρὸς ἴσας γωνίας πλευράν, τινα ζ γ, ἴσην τῇ γ η, ἄρα καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔχουσι, καὶ τινα κ ς'. τὴν ά. ὥστε ἡ θ ζ, ἴση ἐστὶ τῇ θ η. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη, τῶν θ κ, θ λ, θ μ, ἴση ἑκατέρᾳ τῶν θ ζ, θ η, ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ θ, διαστήματι δὲ τῷ θ ζ, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν η, κ, λ, μ, σημείων, ἁπτόμενος καὶ πάντα τῶν α β, β γ, γ δ, δ ε, ε α, πλευρῶν τῶν πενταγώνου, διὰ τὸ πρὸς ὀρθὰς εἶναι τὰς α β, β γ, γ δ, δ ε, ταῖς διὰ τοῦ κέντρου ἐπ' ἄκρας, καὶ τὸ πόρισμα τῆς ιϛ'. τοῦ γ'. Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα πεντάγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 4. Fig. 11.



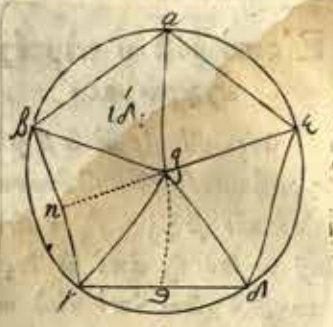
Πρότασις ΙΔ'. Πρόβλημα.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Φέρε δὴ περὶ τὸ α β γ δ ε, ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον πεντάγωνον, κύκλον περιγράψωμεν. Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν β γ, γ δ, δίχα κατὰ τὰ η, θ, σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν η, θ, σημείων κάθετοι ἀχθήτωσαν ἐπ' αὐτῶν αἱ ζ η, ζ θ, συμβάλλουσαι ἀλλή-

ἀλλήλαις καὶ τὸ ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐφ' ἑκάστην τῶν πενταγώνου γωνίαν ἀχθήσωσαν αἱ ζα, ζβ, ζγ, ζδ, ζε. καὶ τὸ πόρισμα ἄρα τῆς ιβ'. τοῦ παρόντος, αἱ ζα, ζβ, ζγ, ζδ, ζε, δίχα τεμοῦσι τὰς τοῦ πενταγώνου γωνίας. ὥστε ἐπεὶ ἡ πρὸς τῇ α, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῇ β. καὶ τῆς μὲν πρὸς τῇ α, ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ζαβ, τῆς δὲ πρὸς τῇ β, ἡ ὑπὸ ζβα, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ζαβ, τῇ ὑπὸ ζβα, καὶ τὸ ζ'. ἀξίωμα. καὶ ἑπομένως ἡ ζα, δύθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ ζβ, καὶ τιῶ ε'. τοῦ α'. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ζγ, ζδ, ζε, ἴση ἐστὶν ἑκατέρᾳ τῶν ζα, ζβ. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζα, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν β, γ, δ, ε, σημείων. Τοῦ αβγδ, ἄρα κύκλου ἡ περιφέρεια ἅπτεται ἑκάστης γωνίας τοῦ αβγδε, πενταγώνου, καὶ ἑπομένως περιγέγραπται περὶ αὐτὸ καὶ τὸν ς'. ὅρον τοῦ παρόντος. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

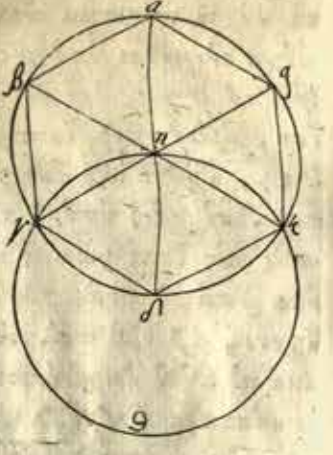
Eucl. Lib. 4. Fig. 12.



Πρότασις ΙΕ'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Φέρε δὴ εἰς τὸν αβγδεζ, κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψωμεν. Ἤχθω τοῦ κύκλου ἡ αδ, διάμετρος, καὶ εἰλήφθω τὸ η, κέντρον. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δη, κύκλος γεγράφθω ὁ γηεθ. καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ γη, εη, ἐξαχθήτωσαν καὶ ἐπὶ τὰ β, καὶ ζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εζ, ζα, καὶ τὸ αβγδεζ, ἑξάγωνον, ἰσόπλευρόν τε ἔσται καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ τὸ δ, κέντρον ἐστὶ τοῦ γηεθ, κύκλου, πάντως γε ἡ δγ, ἴση ἐστὶ τῇ δε. ἔστι δὲ καὶ τὸ η, κέντρον τοῦ αβγδεζ, ἄρα καὶ ἡ ηγ, ἴση ἐστὶ τῇ ηε. κοινῆς δὲ προσκειμένης τῆς ηδ, αἱ δύο πάντως γε γη, ηδ, ἴσαι εἰσὶ δυσὶ ταῖς εη, ηδ, ἀλλὰ καὶ βάσις ἡ γδ, βάσει τῇ δε, ἴση ἐστὶν, ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γηδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εηδ, καὶ τιῶ ἡ. τοῦ α'. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ εηζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δηε, ὥστε αἱ ἓξ γωνίαι αἱ ὑπὸ γηδ, δηε, εηζ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ καὶ τιῶ ιέ. τοῦ α'. ἴσαι ἔτι εἰσὶν καὶ αἱ τέσσαρες κατὰ κορυφὴν, αἱ ὑπὸ γηβ, βηα, αηζ. αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ αηβ, βηγ, γηδ, δηε, εηζ, ζηα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. καὶ ἑπομένως αἱ αβ, βγ, γδ, δε, εζ, ζα, περιφέρειαι ἐφ' ὧν αἱ ῥηθεῖσαι βεβήκασι γωνίαι, ἴσαι ὁμοίως εἰσὶ, καὶ τιῶ κς'. τοῦ γ'. κατὰ δὲ τιῶ κη'. τοῦ αὐτοῦ, καὶ αἱ αβ. βγ, γδ, δε, εζ, ζα, δύθεῖαι ἔτι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ιβγδεζ, ἑξάγωνον. ὅτι δὲ καὶ ἰσογώνιον, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ αβ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ γδ, κοινὴ προσκείσθω ἡ αζεδ, ὅλη ἄρα ἡ βαζεδ,



ἡ βαζεδ, ἴση ἐστὶ τῇ γδεζα, περιφερείᾳ. ἀλλ' ἐπὶ μὲν τῆς βαζεδ, βέβηκεν ἡ ὑπὸ βγδ, γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς γδεζα, ἡ ὑπὸ γβα, ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γβα, καὶ τῶν κζ. τοῦ γ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν πρὸς τοῖς α, ζ, ε, δ, γωνιῶν ἴση ἑκατέρᾳ τῶν πρὸς τοῖς β, γ. ὥστε τὸ αβγδεζ, ἐξάγωνον, ἰσογώνιόν ἐστι. δέδεικται δὲ καὶ ἰσόπλευρον. Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον ἐξάγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι ἡ τοῦ ἐξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. (ημιδιαμέτρῳ)

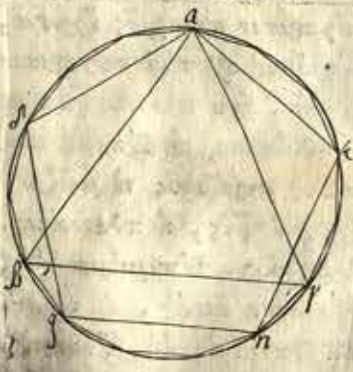
Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνατὸν εἰς οἱονδήποτε κύκλον ἑξάγωνον ἐγγράφειν. εἰδέναι δὲ βελτιὸν καὶ περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι, ἀχθέντων διὰ τῶν α, β, γ, δ, ε, ζ, σημείων ἁπτομένων τοῦ κύκλου, ὥσπερ δὴ καὶ ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, καὶ ἔσται τὸ ζητούμενον. δυνατὸν δ' ἔτι, καὶ τὰ περὶ τὸ πεντάγωνον εἰρημένα, εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράφειν, ἢ περὶ τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον περιγράφειν.

Πρότασις Ις'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Φέρε δὴ εἰς τὸν αβγ, κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψωμεν. Ἐγγεγράφθω ἀ. τὸ αβγ, ἰσόπλευρον τριγωνον. εἶτα τὸ αδζηε, πεντάγωνον. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ βζ, ηγ. Λέγω τοίνυν ἑκατέραν τῶν βζ, γη, πλευρὰν εἶναι τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου. εἰς μὲν γὰρ τὸν αδβ, περιφέρειαν ἴσον ὂν ὅλης τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, πέντε πλευραὶ τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου ἁρμοσθήσονται δυνατόν. εἰς δὲ τὸν αδ, πέμπτον ὂν μέρος, ἓξ εἰς ἁρμοσθήσονται, εἰς τὸν λοιπὸν ἄρα δβ, δύο. ἀλλὰ καὶ εἰς τὸν δβζ, ἓξ εἰς ἁρμόττονται, ὡς πέμπτον τοῦ κύκλου καὶ αὐτὸν ὂν, ἄρα εἰς τὸν βζ, μία τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου πλευρὰ ἁρμοσθήσεται, ὡσαύτως καὶ εἰς τὸν γη. ἐὰν ἄρα κατὰ τὸ ἑξῆς διαθείας ἴσας τῇ βζ, ἢ γη, εἰς τὸν κύκλον ἐναρμόσωμεν, ἐγγραφήσεται πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Euclid. Lib. 4. Fig. 13.



Τέλος τοῦ Τετάρτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

Προσ-

Προοίμιον τῦ Πέμπτυ τῦ Εὐκλείδυ Στοιχείων.

Τὶς ὁ τῦ Βιβλίυ ἄρετὴς, ὁ σκοπὸς, τὸ χρήσιμόν τε καὶ πάξις.

Τὸ Πέμπτον τυτὶ Βιβλίον, ὡς κὴ τὰ πρὸ αὐτῦ, στοιχεῖον Εὐκλ. ἐπιγράφεται. σὶ δέ τινες ἀρετλὼ τύτυ εἶναι, Εὔδοξόν τινα τὸ Πλάτωνος διδάσκαλον. τοῦ δὲ χάριν τὸ τῦ Εὐδόξυ ὄνομα ἀπολιπὸν, τὸ τῦ Εὐκλείδυ ἐκληρώσατο; ἢ ὅτι ἐκείνυ μὲν ἡ εὕρεσις, τύτυ δὲ ἡ πάξις τῶν ὅρων τε καὶ προτάσεων. καὶ παρ' Εὐδόξυ τὰς ἀφορμὰς λαβὼν Εὐκλείδης ἀμεθοδέτερον ἐκείνυ κατέρωσέ τε αὐτὸ καὶ ἐρρύθμισε. δίδυ γὰρ σοφῷ ἀφορμλὼ κὴ σοφώτερος ἔγεν.

Σκοπὸς δὲ τῦ ὅλυ Βιβλίυ περὶ Ἀναλογιῶν διαλαβεῖν. Ἔστι δὲ Ἀναλογία σύγκρισις, ἥτοι χέσις, λόγων τινῶν καθ' ὁμοιότητα, ὧν ἕξις ὅροις τελάχιστον θεωρεμένη. Λόγος δὲ δύο μεγεθῶν, ἢ ἀριθμῶν ἐστι σύγκρισις, λέγεται δὲ ὁ Λόγος καὶ χέσις. ὅταν ἓν, φέρ' εἰπεῖν, δύο μεγέθη ἢ ἀριθμοὶ πρὸς ἄλλήλυς συγκρίνωνται, τὰ μεγέθη μὲν ἢ οἱ ἀριθμοὶ, ὅροι καλῦνται, ἡ δὲ τύτων σύγκρισις Λόγος, ἥτοι σχίσις, ὡς εἴρηται. ὅταν δὲ ὁ Λόγος ἥτος πρὸς ἕτερον ὅμοιον συγκρίνηται, ὡς ὁ τῦ γ, καὶ ε, πρὸς τὸν τῦ ε, καὶ ιβ, ἡ σύγκρισις αὕτη Ἀναλογία ἤκυσε. Διχῶς δὲ ἡ Ἀναλογία γενέθαι δύναται. ἡ μὲν γὰρ Συνεχὴς, ἡ δὲ Διεζδυγμένη. καὶ Συνεχὴς μὲν Ἀναλογία ἐστὶν, ἢ τρεῖς ὅρυς κὴ τλὼ σύγκρισιν συνεχεῖς ἔχυσα, ὡς ἡ τῦ β, δ, η, ις. κὴ λοιπῶν. Διεζδυγμένη δὲ ἢ τρεῖς ὅρυς κὴ τλὼ σύγκρισιν αὐὰ δύο λαμβάνυσα, ὡς ἡ τῦ β, δ, ε, ιβ. Εἴδη δὲ τῦ Λόγυ πέντε. ἕξια μὲν ἁπλᾶ, τὰ δύο δὲ σύνθετα. κὴ ἁπλᾶ μὲν τὸ Πολλαπλάσιον, τὸ Ἐπιμόριον, κὴ τὸ Ἐπιμερές. κὴ Πολλαπλάσιον μὲν λέγεται μέγεθος μεγέθους τὸ μεῖζον τυῦ ἐλάσσονος, ὅταν ὑπερέχει τὸ ἔλασσον ἅπαξ, ἢ δὶς, ἢ ἕξις, ἢ πλειονάκις. ὁμοίως δὲ κὴ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, ὡς ὁ δ, τῦ β, κὴ ὁ θ, τῦ γ. Ἐπιμόριον δὲ, ὅταν τὸ μεῖζον μέγεθος, ἢ ὁ ἀριθμὸς περιέχει τὸν ἐλάσσονα ἅπαξ, κὴ οὐ αὐτῦ ἔτι ὁποιονδήποτε μέρος, ὡς ὁ δ, τῦ χ, κὴ ὁ ε, τῦ δ. Ἐπιμερὲς δὲ, ὅταν τὸ μεῖζον μέγεθος, ἢ ὁ ἀριθμὸς, περιέχει τὸν ἐλάττονα ἅπαξ, καί τινα αὐτῦ μέρη; ὡς ὁ ε, τῦ γ, κὴ ὁ ζ, τῦ δ, κὴ οἱ ὅμοιοι. κὴ ταῦτα μὲν τὰ ἁπλᾶ. Συνθέτα δὲ τὸ Πολλαπλασιεπιμόριον, κὴ τὸ Πολλαπλασιεπιμερές. καὶ Πολλαπλασιεπιμόριον μὲν, ὅταν τὸ μεῖζον μέγεθος, ἢ ὁ ἀριθμὸς περιέχει τὸν ἐλάττονα πλειονάκις, καί τι μέρος αὐτῦ, ὡς ὁ ζ, τυῦ γ, καὶ ὁ θ, τῦ δ, κὴ λοιποί. Πολλαπλασιεπιμερὲς δὲ, ὅταν ὁμείζων περιέχει τὸν ἐλάττονα πλειονάκις, καί τινα αὐτῦ μέρη, ὡς ὁ κ, τῦ γ, ὁ ια, τῦ δ, κὴ λοιποί.

Τοιαύτας μὲν ἓν τὰς προσηγορίας τὰ μείζω μεγέθη, ἢ οἱ μείζονες ἀριθμοὶ ἔλαχον. Τὰ ἐλάττονα δὲ μεγέθη, ἢ οἱ ἀριθμοὶ μὴ τῆς, ὑπὸ, προφέρονται, πρό-

πσύτε καὶ αὐτῷ ὄντων τῷ εἰδῶν, τὸ μὲν γὰρ Ὑποπολλαπλάσιον, τὸ δὲ Ὑπεπιμόριον, τὸ δὲ Ὑπεπιμερὲς, τὸ δὲ Ὑποπολλαπλασιεπιμόριον, καὶ τὸ ἔχατον Ὑποπολλαπλασιεπιμερὲς λέγεται. Ἀρχτικαὶ δὲ Ἀναλογίαι ξεῖς, Γεωμετρικὴ, Ἀριθμητικὴ, καὶ Ἁρμονικὴ.

Ἐπεὶ δὲ τατὶ τὸ Βιβλίον περὶ Ἀναλογιῶν διαλαμβάνει, χρησιμεύει παύτως ὲ μόνον τῇ Γεωμετρίᾳ, ἀλλὰ καὶ Ἀριθμητικῇ τε καὶ Μασικῇ, καὶ ταῖς τάτων ὑποβεβηκυίαις Ἐπισήμαις. ἁπλῶς δ' εἰπεῖν πάσῃ Μαθηματικῇ Ἐπισήμῃ ἐπωφελές πως ὑπάρχει.

Τάξιν δὲ καὶ εἰρμὸν, ὃν καὶ τὰ πρὸ αὐτῆ πρεῖ. προπεπαγμένων γὰρ τῷ Ὅρων ἔπονται αἱ Προτάσεις. ἀλλά γε καὶ ἐπὶ τῷ ὅρων τε καὶ προτάσεων διδασκαλικὸν ἔχει τὸν τρόπον. ἀπὸ γὰρ τῷ ἁπλυστέρων ἀρχόμενον, ἐπὶ τὰ καθολικώτερα μεταβαίνει. Ὅροι δέ εἰσι τάτων οἱ παύτες εἴκοσι. Προτάσεις δὲ πσύτε πρὸς ταῖς εἴκοσιν. ἀλλ' ἵνα μὴ περιττολογεῖν δόξωμεν, φέρε δὴ τῆς τῷ Ὅρων Ἑρμηνείας ἁψώμεθα.

Α ΠΟΣΗΜΕΙΩΣΗΣ.

* Σημείωσαι, ὅτι ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω σελίδος, ἀμέλει 104: σίχῳ ις': σὺθα φησὶν, ὡς ὁ τῦ γ, καὶ ς, πρὸς τὸν τῦ ς, καὶ ιβ, λιπτέον ἅπως, αὐτὶ τῆς σημασίας τῦ, ὡς ὁ τῦ 3, καὶ 6, πρὸς τὸν τῦ 6, καὶ 12. ὡσαύτως καὶ σίχῳ ιθ': ὡς ἡ τῦ 2, 4, 8, 16. Ὁμοίως καὶ τὰς ἑξῆς τοιάς δὲ ἀριθμὰς, τὰς Ἀναλογίας παρισῶντας ἐπὶ τῆς αὐτῆς σελίδος.

Ποδηγετήσει ὑμᾶς ἡ Ἀποσημείωσις αὕτη ἐπὶ τὸ διαγινώσκειν τὰς τοιάς δὲ ἀριθμὰς, παντα χῦ τῶν ἑπομένων Βιβλίων, καὶ Πραγματειῶν. ἐν οἷς συνεχῶς ὁ Συγγραφὰς ἐχρήσατο τοῖς τοιύτοις Ἑλληνικοῖς Ἀριθμοῖς καὶ τῷ ῥηθεῖσαν σημασίαν, καὶ μάλιστα σὺθα αὖ αὐτῷ λόγος γένηται περὶ Ἀναλογιῶν.

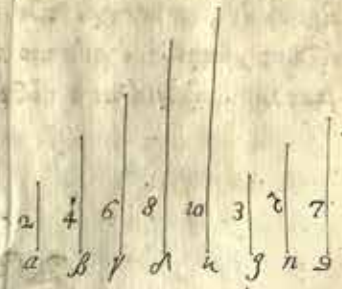
ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ
ΤΟΥ ΠΕΜΠΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Ὅρος Πρῶτος.

Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

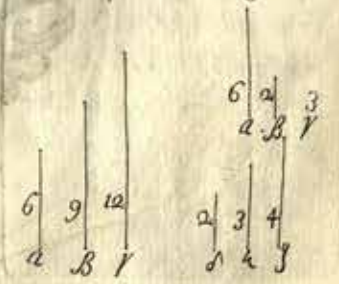
Ἐπειδὴ περὶ Ἀναλογιῶν ὁ τῆς βιβλίου σκοπὸς, ὡς προείρηται, ἔδει πάντως ἐπὶ τῶν ὅρων καὶ τὸν τῆς Ἀναλογίας ἀποδοῦναι ὁρισμόν. Ἐκ Λόγων δὲ τῆς Ἀναλογίας συγκειμένης, δεῖ πρῶτον τὸν Λόγον ὁρίσασθαι· τοῦ Λόγου δὲ ἐν Μεγέθεσι θεωρουμένου, περὶ τῆς τῶν Μεγεθῶν προσηγορίας οἰκειότερον διαλαβεῖν. διὸ δὴ καὶ Εὐκλείδης ἐπὶ τοῦ δ΄. ὅρου τὸ Μέρος ὑπογράφει λέγων, Μέρος ἐστὶ Μέγεθος Μεγέθους καὶ τὰ ἑξῆς: τῶν γὰρ Μεγεθῶν, ὅσα λόγον πρὸς ἄλληλα ἔχουσι, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ἤ μέρος, ἤ μέρη ἐστί· καὶ μέρος μὲν ἐπὶ τῆς Πολλαπλασίου, μέρη δὲ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εἰδῶν. τὸ γὰρ Πολλαπλάσιον μόνον μέγεθος ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος ὁλοκλήρως καταμετρεῖται. οἷον τὸ α, μέγεθος, μέρος μὲν λέγεται τοῦ βγδε, ὅτι καθ' ἕνα ἕκαστον τούτων κατά τινα ὁλόκληρον καταμετρεῖ ἀριθμόν. τοῦ δὲ ζηθ, οὐκ ἔστι μέρος, ἀλλὰ μέρη τούτων τινὲς αὐτὸ ἀποκαλοῦσιν. οὐδὲν γὰρ αὐτῶν κατά τινα ὁλόκληρον καταμετρεῖ ἀριθμόν. τοῦδε χάριν μόνον τοῦ λόγου μέρους ἔχοντος Μεγέθους ἐμνήσθη, ἀμελῶν δὲ καὶ τοῦ λόγον ἔχοντος μερῶν; ἢ ὅτι τοῦ Πολλαπλασίου μόνου ἔμελλε τὸν ὁρισμὸν ἀποδοῦναι, ὡς ἁπλουστέρου τε, καὶ ταῖς ἀποδείξεσι χρησιμωτέρου, οὐχὶ δὲ καὶ τῶν λοιπῶν εἰδῶν.

Euc. Lib. 5. Fig. 1.



Β΄. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μείζονος τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

Ἐκ τῶν εἰρημένων δῆλον, ὅτι τῶν Μεγεθῶν, ὅσα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα, εἰ μὲν τὸ ἔλασσον καταμετρῇ τὸ μεῖζον, καταμετρεῖται παντὸς καὶ τὸ μεῖζον ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος, καὶ τὸ μὲν ἔλασσον μέρος καλεῖται, ὡς ἤδη εἴρηται, τὸ μεῖζον δὲ πολλαπλάσιον· ὡς ἐπὶ τοῦ παρόντος δεικνύμενος ἀποφαίνεται. οἷον τῶν αβ, Μεγεθῶν, τὸ μὲν β, Μέρος, τὸ α, δὲ



δὲ Πολλαπλάσιον λέγεται· τὸ μὲν γὰρ καταμετρεῖ, τὸ δὲ καταμετρεῖται καὶ τὸν γ, ἀριθμόν. Ἐὰν δὲ ὦσι πλείονα μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τῷ πλήθει, μείζονα δὲ τῶν μεγέθει, ἕκαστον δὲ τοῦ μεζόνων ἰσάκις μετρεῖται ὑπὸ τὰ ἰδίω μέρος, τὰ μείζονα μεγέθη ἰσάκις πολλαπλάσια λέγονται· οἷον ἐπεὶ τὰ α β γ, ἰσάκις μετρεῖται ὑπὸ τοῦ δ ε ζ, ἰσάκις Πολλαπλάσια λέγονται.

Γ'. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

Τῶν Μεγεθῶν τὸ μὲν κατὰ μῆκος μόνον θεωρεῖται, ὡς γραμμὴ, ἥτις καὶ ὑφ' ἓν διαστὸν λέγεται, τὸ δὲ καθ' ἑτέρα μῆκος, καὶ πλάτος, ὡς ἐπιφάνεια, ἥτις καὶ δισσὰ διαστὸν λέγεται, καὶ ἄλλα κατὰ μῆκος, πλάτος τε, καὶ βάθος, ὡς τὰ σώματα, ἃ καὶ ἔστι διαστὰ λέγεται. Τὰ αὐτὰ δὲ γένους Μεγέθη εἰσὶν, ὅσα ἢ κατὰ τὸ ὑφ' ἓν διαστὸν θεωρεῖται, ἢ κατὰ τὸ δισσὰ διαστὸν, ἢ κατὰ τὸ τρισσὰ διαστόν. Πηλικότης δὲ λέγεται ἡ τῶν μεγεθῶν ποσότης, ἥτις καὶ συνεχὴς ποσότης προσαγορεύεται, εἰς ἀντιδιαστολὴν τῆς τῶν ἀριθμῶν ποσότητος, ἥτις καὶ διωρισμένη παρὰ τοῖς πάλαι φιλοσόφοις λέγεται Ποσότης· ὥστε δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι τῆς μὲν γραμμῆς πηλικότης, τὸ μῆκος μόνον λέγεται, ἐπιφανείας δὲ τὸ μῆκος ἅμα καὶ πλάτος, καὶ τοῦ σώματος τὸ μῆκος πλάτος τε, καὶ βάθος. Ὅταν οὖν συγκρίνηται γραμμὴ ἑτέρᾳ γραμμῇ, ἢ ἐπιφάνεια ἐπιφανείᾳ, ἢ σῶμα σώματι· τὰ μὲν συγκρινόμενα, Ὁμογενῆ μεγέθη λέγεται, ἡ δὲ τούτων σύγκρισις, Σχέσις καὶ πηλικότητος. αὕτη δὲ ἡ Σχέσις, Λόγος μεγεθῶν προσαγορεύεται. Ἐπεὶ δὲ ἡ σύγκρισις τῶν μεγεθῶν πολυειδὴς ἐστι, καὶ τὰ διάφορα τοῦ Λόγου εἴδη. ἐν μὲν τοῖς πολλαπλασίοις, πολλαπλασιότης, ἢ ὑποπολλαπλασιότης δύναται λέγεσθαι. ἐν δὲ τοῖς ἐπιμορίοις, ὑπεροχὴ, ἢ ἔλλειψις καθ' ὁτιοῦν μέρος. καὶ ἐν τοῖς ἐπιμερέσιν, ὑπεροχὴ, ἢ ἔλλειψις καὶ πλείονα μέρη, τούτου γε χάριν τὸ ποιὰ, προσέθηκεν, ὥστε πληρεῖσθαι τὸν ὁρισμὸν τοῦ Λόγου τὸν ἕκαστον τούτων. Λόγος ἐστὶν ἡ τοιάδε τῶν μεγεθῶν σχέσις καὶ πηλικότητα. Παρατηρητέον δὲ τὰ Μεγέθη ὁμογενῆ εἶναι. ἐν μὲν τοῖς ἄλλου γένους μεγέθεσιν, οὔτε σύγκρισις ἀκριβὴς γενέσθαι δύναται· πῶς γὰρ γραμμὴ, ἐπιφάνεια, καὶ σῶμα ἀλλήλοις συγκριθῶσιν, ὅπου γε τὸ μὲν ὑφ' ἓν διαστὸν, τὸ δὲ δισσὰ, καὶ τὸ ἄλλο τρισσὰ διαστόν ἐστι; ἔτι μὴν ἢ ὁποιωσδήποτε αὐτοῖς γένη μὴν σύγκρισις Λόγος ὀνομασθῆναι δύναται.

Ἐκ τούτου δυνάμεθα καὶ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς Λόγου λαβεῖν. ὥσπερ γὰρ ὁ τῶν μεγεθῶν Λόγος, ἢ καὶ πηλικότητα πρὸς ἄλληλά ἐστι ποιὰ σχέσις, οὕτω καὶ τῶν ἀριθμῶν, Λόγος ἐστὶν, ἢ κατὰ ποσότητα πρὸς ἄλληλους ποιὰ σχέσις.

Δ'. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

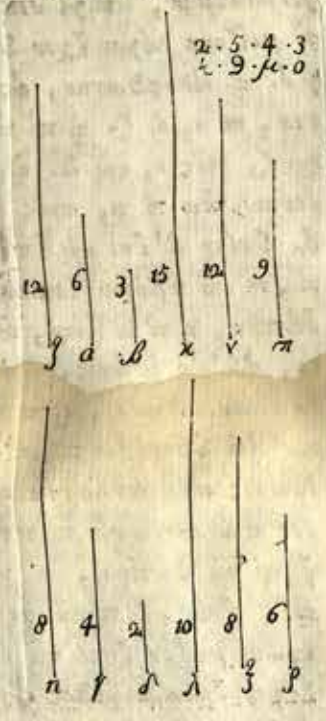
Ἀποδὺς ἐν τῷ ἀνωτέρω ὅρῳ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἐν Μεγέθεσι Λόγων, βούλεται ἐπὶ τὸ παρόντος δηλῶσαι, καὶ τίνα τὰ λόγον ἔχοντα Μεγέθη. ὥσπερ οὖν λόγος ἐν τοῖς ὁμογενῶν Μεγεθῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις, ἕτω καὶ Μεγέθη λόγον ἔχειν λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. τίνα δὲ ταῦτα; ἡ τὰ ὁμογενῆ. γραμμὴ γὰρ γραμμῆς διὰ πολλαπλασιασμοῦ δύναται ὑπερέχειν, ὡσαύτως καὶ ἐπιφάνεια ἐπιφανείας, καὶ σῶμα σώματος. ὥστε γραμμὴ καὶ ἐπιφάνεια, ἡ ἐπιφάνεια καὶ σῶμα, ἡ σῶμα καὶ γραμμὴ λόγον ἔχειν οὐ δύνανται. ἔτε γὰρ ἡ γραμμὴ ἐπιφανείας, ἡ σώματος διὰ πολλαπλασιασμοῦ ὑπερέχειν δύναται, ἔτε ἡ ἐπιφάνεια γραμμῆς, καὶ σώματος, ἔτε μὴν τὸ σῶμα γραμμῆς καὶ ἐπιφανείας. τὰ ὁμογενῆ ἄρα μόνα Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα λέγεται.

Ε'. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ληφθέντα καταλλήλως.

Δηλώσας ἐν τῷ ἀνωτέρω τίνα τὰ λόγον ἔχοντα μεγέθη, βούλεται ἐπὶ τὸ παρόντος διασαφῆσαι, καὶ τίνα τῶν Μεγεθῶν ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι λόγῳ λέγεται. ὥσπερ δὴ ὁ λόγος ἐν δύο μεγέθεσι θεωρεῖται, ἕτω καὶ ἡ τῶν λόγων Ὁμοιότης ἐν δυσὶ τοὐλάχιστον λόγοις ἀρίσκεται, ἡ γὰρ Ὁμοιότης σχέσις ἐστὶν, ἡ δὲ σχέσις διαφορά τινος πρὸς ἕτερον. δύο δὲ λόγοι ἐν τέσσαρσι περιέχονται μεγέθεσι. διὸ καὶ ἔφη, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον. εἰδὲ καὶ ἐν τρισὶ μεγέθεσι δύο λόγοι ἐνίοτε περιληφθῆναι δύνανται, ἀλλά γε καὶ ἕτω ὡς τέσσαρα ἐνοεῖται, δὶς γὰρ τὸ δεύτερον λαμβάνεται. οἷον ἐν τοῖς α β γ, μεγέθεσι δύο λόγοι θεωροῦνται, ὡς γὰρ τὸ α, πρὸς τὸ β, ἕτω τὸ β, πρὸς τὸ γ. ἰδοὺ δὴ τὸ β, δὶς λαμβανόμενον· ὥστε τὰ α β γ, ἐνεργείᾳ μὲν τρία ἐστὶ μεγέθη, δύναμει δὲ τέσσαρα. Ὅταν οὖν ἐν τέσσαρσι μεγέθεσι, τὸ πρώτου πρὸς τὸ δεύτερον παραβαλλομένου, καὶ τὸ τρίτου πρὸς τὸ τέταρτον, ἡ αὐτὴ σχέσις εὑρεθῇ, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν λέγεται. Ἵνα δὲ μὴ διὰ χειρῶς ἔχωμεν διορίειν· ἐπεὶ τὸν ἐν μεγέθεσι λόγον οὐκ ἀεὶ γινώσκομεν, ὥσπερ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς, διὰ τὸ ἀσαφὲς εἶναι ὁποῖόν μέρος τὸ ἔλαττον τοῦ μείζονός ἐστι μεγέθους, τότε οὕτως δεῖ ἑκάστου τῶν τεσσάρων

Encl. Lib. 5. Fig. 2.

σάρων μεγεθῶν πολλαπλασιόντι λαμβάνειν, ὥστε τὰ τῶ πρώτω καὶ τρίτω ἰσάκις εἶναι πολλαπλάσια, ὥσπερ καὶ τὰ τῶ δευτέρω καὶ τετάρτω. εἶτα παραβάλλειν τὸ τῶ πρώτω ἰσάκις πολλαπλάσιον τῷ τῶ δευτέρω, καὶ τὸ τῶ τρίτω τῷ τῶ τετάρτω, καθ' ἕν μὲν ἅμα τὸ τῶ πρώτω ἰσάκις πολλαπλάσιον τῶ ἰσάκις πολλαπλασίω τῶ δευτέρω, καὶ τὸ τῶ τρίτω ἰσάκις πολλαπλάσιον τῶ ἰσάκις πολλαπλασίω τῶ τετάρτω ἐλλείπωσιν, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχωσι, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν λέγεται, καὶ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον. οἷον ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ α β, γ δ, καὶ τὰ μὲν α, γ, πρῶτον δηλ: καὶ τρίτον πολλαπλασιαθέντωσαν ἐπὶ τὸν ε, ἀριθμόν, καὶ ἔστωσαν τῶν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ζ, η. τὰ δὲ β, δ, δεύτερον καὶ τέταρτον ἐπὶ τὸν θ, καὶ ἔστωσαν τῶν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ κ λ. Αὖθις πολλαπλασιαθέντωσαν τὰ αὐτὰ β, δ, ἐπὶ τὸν μ, καὶ ἔστωσαν τῶν ἕτερα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ν, ξ. καὶ τελευταῖον πολλαπλασιαθέντωσαν τὰ αὐτὰ ἐπὶ τὸν ο, καὶ ἔστωσαν τῶν αὐτῶν καὶ ἕτερα ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ π, ρ. εἶτα παραβληθέντωσαν χωρὶς τὰ ζ η, τοῖς κ λ, ν ξ, π ρ. καὶ ἐπεὶ ἐν τῷ πρώτῳ πολλαπλασιασμῷ τό, τε ζ, τὸ κ, καὶ τὸ η, τὸ λ, ἅμα ἐλλείπουσιν, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ ἅμα ἴσα ἐστί, τό, τε ζ, τῷ ν, καὶ τὸ η, τῷ ξ, καὶ ἐν τῷ τρίτῳ πολλαπλασιασμῷ τό, τε ζ, τῶ π, καὶ τὸ η, τῶ ρ, ἅμα ὑπερέχουσιν, ἔστι πάντως ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς τὸ πρῶτον α, πρὸς τὸ δεύτερον β. οὕτω τὸ γ, τρίτον πρὸς τέταρτον τὸ δ.

Eucl. Lib. 5. Fig. 3.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ὥστε δυνάμεθα ἐκ τούτου συναγαγεῖν καὶ ἀνάπαλιν, ὅτι ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶ πρώτω καὶ τρίτω, τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τοῦ δευτέρω καὶ τετάρτω καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπει, ἢ ἅμα ὑπερέχει, ἢ ἅμα ἴσα ἐστί. ληφθέντα καταλληλα.

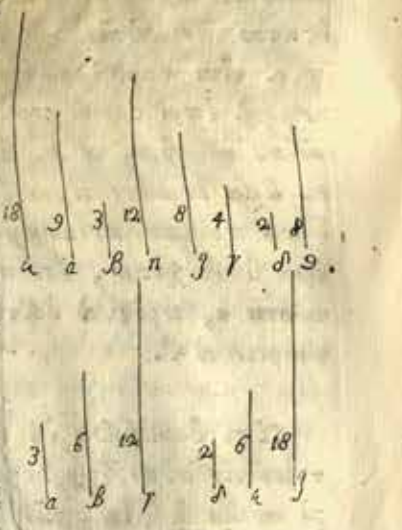
ς'. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογα καλείσθω.

Διδάξας τὸν τρόπον, καθ' ὃν τὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα μεγέθη δείσκειν ἔχομεν, καὶ πῶς δεῖ ταῦτα καλεῖν ἤδη κελδίει. τὰ γὰν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα Ἀνάλογα καλεῖν ἐθέλει. ὥστε ἐπὶ τῶ ἀνωτέρω παραδείγματος τὰ α β, γ δ, Ἀνάλογά εἰσι, τὸν αὐτὸν γὰρ ταῦτα ἔχει λόγον.

Ζ'. Ὅταν

Ζ΄: Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ γ΄ πρὸς τὸ δ΄.

Καθάπερ τὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα μεγέθη διὰ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων γινώσκομεν, ὅπως διὰ τῶν αὐτῶν, καὶ τῶν μὴ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων μεγεθῶν τὸ μείζονα λόγον ἔχον ὑπαρεῦσαι ἔχομεν. Κείσθωσαν ἤτοι τέσσαρα μεγέθη τὰ α β, γ δ. καὶ εἰλήφθωσαν, ὡς καὶ πρότερον, τοῦ μὲν πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ε, καὶ ζ. καὶ τὰ τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου τὰ η, θ. καὶ παραβεβλήθωσαν τὰ ε, καὶ ζ, τοῖς η, καὶ θ. καὶ ἐπεὶ τὸ ε, ὑπερέχει τοῦ η, καὶ τὸ ζ, οὐχ ὑπερέχει τοῦ θ, διάπερ τοῦτο τὸ α, πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ γ, πρὸς τὸ δ. Ἰσέον δ' ὅτι καὶ ἐπὶ τῶν μείζονα λόγον ἐχόντων μεγεθῶν ἐνίοτε εὑρίσκεται τό, τε τοῦ πρώτου ἰσάκις πολλαπλάσιον ὑπερέχον τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου, καὶ τὸ τοῦ τρίτου, τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου, ἀλλ' οὐκ ἰσάκις. ἐὰν δὲ καὶ ἑφ' ἕτερον ἀριθμὸν πολλαπλασιασθῶσι, καὶ τοῦτο γένηται δίς καὶ ἅπαξ, ἀεὶ ὑπερέξει τὸ τοῦ πρώτου ἰσάκις πολλαπλάσιον τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ δευτέρου, καὶ τὸ τοῦ τρίτου τοῦ ἰσάκις πολλαπλασίου τοῦ τετάρτου. ἀλλ' ὅταν τὸ τοῦ πρώτου ἴσον ᾖ τῷ τοῦ δευτέρου, τὸ τοῦ τρίτου, ἔλαττον ἔσται τοῦ τετάρτου, ὅταν δὲ τὸ τοῦ τρίτου ἴσον ᾖ τῷ τοῦ τετάρτου, τὸ τοῦ πρώτου μεῖζον ἔσται τοῦ δευτέρου. διὸ δὴ ἵνα τὸ μείζονα λόγον ἔχον μέγεθος εὑρεθῇ, ἐπί τε μειζονας ἀριθμοὺς καὶ ἐλάττονας δεῖ τὰ μεγέθη πολλαπλασιάζεσθαι.

Eucl. Lib. 5. Fig. 4.

Η΄: Ἀναλογία ἐστὶ λόγων ὁμοιότης.

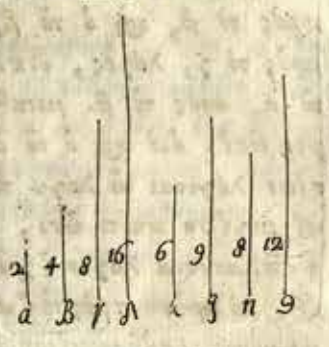
Οὐσῶν αὐτῶν πρότερον τῶν ἐν τοῖς μεγέθεσι λόγων, καὶ τινα μὲν τὰ λόγον ἔχοντα μεγέθη, τινα δὲ τὰ ἐν τῷ αὐτῷ ὄντα λόγῳ δεδειχὼς, καὶ πῶς τὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα καλεῖται, διδάξας μέχρι τοῦ ε΄ ὅρου, ἐπὶ τὸ παρόντος καὶ τὸν τῆς Ἀναλογίας συνάγει ὁρισμόν. καί φησιν, Ἀναλογία ἐστὶν, ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης. ὥσπερ γὰρ τὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντα μεγέθη Ἀνάλογα καλεῖσθαι προσέταττεν, ὅτω τοι καὶ Ἀναλογίαν τινὰ τῶν λόγων ὁμοιότητα καλεῖν ἐθέλει. ὅταν ἓν ἐν πλείοσιν, ἢ δυσὶ μεγέθεσιν, ὡς ἐν τοῖς α β γ, ἢ δεῖ, ὁ αὐτὸς λόγος εὑρίσκεται· τὰ μὲν μεγέθη ἐκεῖνα, ὡς εἴρηται, Ἀνάλογα καλεῖται· ἡ δὲ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων ὁμοιότης Ἀναλογία. ὥστε δῆλον ἐκ τούτου, ὅτι πλείοσιν ἐν πλείοσι μεγέθεσιν ὁ αὐτὸς λόγος οὐ θεωρεῖται, ἀλλ' ἐν μὲν τοῖς ἕτερός τις εὑρίσκεται, ἐν δὲ τοῖς, ἄλλος· ὅτε τὰ μεγέθη ἐκεῖνα Ἀνάλογα καλεῖσθαι δύναται, ὅτε μίαν ἡ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων σύγκρισις

Ἀνα-

Ἀναλογία, ἀλλ' ὡς ἔπος εἰπεῖν, Ἑτερολογία τις, καὶ τὰ μεγέθη ἐκεῖνα Ἑτερόλογα. ὡς ἐπὶ τοῦ ὑποδείγματος τοῦ ζ': ὅρος δῆλον καθίσταται.

Ἰστέον δὲ, ὅτι τῆς Ἀναλογίας εἰς δύο διαιρουμένης εἴδη, ἥ μὲν Συνεχὴς, ἡ δὲ Διεζευγμένη, ἡ καὶ Διηκὴς λέγεται. καὶ Συνεχὴς μὲν, ὅταν ὁ αὐτὸς λόγος ἐν πλείοσιν, ἢ δυσὶ μεγέθεσι καὶ συνέχειαν θεωρεῖται, ὡς ἐν τοῖς αβγδ, ὡς γὰρ ἔχει τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτως καὶ τὸ β, πρὸς τὸ γ, καὶ τὸ γ, πρὸς τὸ δ. διὸ καὶ τὰ τοιαῦτα μεγέθη, Ἀνάλογα Συνεχῆ καλεῖσθωσαν. Διεζευγμένη δὲ, ὅταν λόγος ἐν πλείοσιν, ἢ δυσὶ μεγέθεσιν ὁ αὐτὸς μὲν λόγος θεωρεῖται, ἀμὴν δὲ καὶ συνέχειαν, ὡς ἐν τοῖς εζ, ηθ. ὡς γὰρ ἔχει τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, οὕτω ἔχει μὲν καὶ τὸ ζ, πρὸς τὸ η, ἀλλά γε οὐχ οὕτως ἔχει καὶ τὸ η, πρὸς τὸ θ. ὅθεν τὰ τοιαῦτα Ἀνάλογα Διεζευγμένα καλεῖσθωσαν.

Eucl. Lib. 5. Fig. 5.



Θ': Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν.

Ἐπεὶ ἡ Ἀναλογία λόγων ἐστὶν ὁμοιότης, καὶ τὰ ἀνωτέρω. ἡ δὲ τῶν λόγων ὁμοιότης ἐν πλείοσιν, ἢ δυσὶ μεγέθεσι πέφυκε γίνεσθαι, ἀδύνατον γὰρ ἐν δυσὶ μόνοις μεγέθεσι δύο λόγους θεωρεῖσθαι, ἀναγκαῖον πάντως εἰδέναι καὶ μέχρι πόσων συντιθεμένη μεγεθῶν ἡ Ἀναλογία δύναται σώζεσθαι. διὸ δὴ καὶ τοῦτο διασαφῆσαι ἡμῖν βουλόμενος Εὐκλείδης ἐπ' ἐλάττονας τῶν ἓξ ὅρων, φησὶ, μὴ καταλήγειν. Ὅρους δὲ τὰ μεγέθη, ἐν οἷς ἡ Ἀναλογία, καλεῖ. δείκνυται γάρ πως ἐν αὐτοῖς ἡ Ἀναλογία. Ἵνα δὲ ὁ λόγος πληρέστερος γένηται, ἴσθι, ὅτι ἥ μὲν Συνεχὴς Ἀναλογία, περὶ ἧς καὶ Εὐκλ: τὸν λόγον πεποίηκεν, ἐν τρισὶν, ὡς εἴρηται, ἐλαχίστοις ὅροις ἐστὶν, ἡ δὲ διεζευγμένη ἐν τέσσαρσιν.

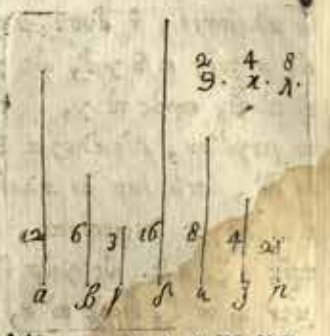
Ι': Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

ΙΑ': Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλέον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

Εἰκαὶ τοῖς κατὰ συνέχειαν λόγον ἔχουσι μεγέθεσιν, ἕκαστον τῶν μεγεθῶν τῷ πλησίον παραβάλλεται, καθ' ὃ καὶ ἡ συνεχὴς Ἀναλογία συνίσταται. δύναται ἔμπης καὶ πρὸς τὰ ἀπώτερον παραβληθῆναι. Ἐπεὶ δ' ὅσῳ μᾶλλον ἀπώτερόν ἐστι, πρὸς ὃ ἡ παραβολὴ, τὸ παραβαλλόμενον, τοσούτῳ καὶ τὸ παραβαλλόμενον μεῖζονα πρὸς ἐκεῖνο ἔχει τὸν λόγον. διὰ τοῦτο καὶ Εὐκλείδης τῶν τῷ πρὸς τὰ ἀπώτερον λόγων ὑπεροχὴν δηλῶσαι βουλόμενος, δυσὶν ἐχρήσατο παραδείγμασιν, εἰπὼν, ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον καὶ τὸ ἑξῆς. Ἵνα δὲ τοῦτο δῆ-

το δῆ-

τὸ δῶλον γένηται, ἔσωσαν ἐπὶ παραδείγματος ἓξία μὲν μεγέθη ἀνάλογα συνεχῆ τὰ α β γ, τέσσαρα δὲ τὰ δ ε ζ η. τὸ οὖν α, πρὸς τὸ γ, παραβαλλόμενον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ β. τὸ δὲ δ, πρὸς τὸ η, παραβαλλόμενον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ ε. σαφὲς δὲ τὸ λεγόμενον. μεταξὺ γὰρ τῶν α, καὶ γ, δύο λόγοι θεωροῦνται, ὅ, τε τοῦ α, πρὸς τὸ β, καὶ ὁ τοῦ β, πρὸς τὸ γ. διὸ καὶ ὁ τοῦ α, πρὸς τὸ γ, λόγος, διπλασίων λέγεται τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ α, πρὸς τὸ β. μεταξὺ δὲ τῶν δ, καὶ η, ἕξεις λόγοι εἰσί. διὸ καὶ ὁ τοῦ δ, πρὸς τὸ η, λόγος, ἓξιπλασίων λέγεται τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ δ, πρὸς τὸ ε. Ἐὰν δὲ τὰ μεγέθη πόσα οὖν, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον πενταπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. εἰδὲ ἓξ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔκτον πενταπλασίονα, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. καὶ ἐπὶ τῆς ἑξῆς ὡσαύτως, αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεγεθῶν, αὔξηται καὶ ὁ λόγος τῶν ἄκρων.

Eucl. Lib. 5. Fig. 8.

Εἰς σαφεστέραν δὲ κατάληψιν τῶν εἰρημένων, ἰστέον, ὅτι ὁ τοῦ πρώτου μεγέθους λόγος πρὸς τὸ ἔσχατον, σύγκειται ἐκ τῆς πολικότητος τῶν μεταξὺ μεγεθῶν. οἷον ἡ πολικότης τοῦ α, πρὸς τὸ β, καὶ τοῦ β, πρὸς τὸ γ, ἐστὶν ὁ θ. τοῦ δὲ θ, πρὸς ἑαυτὸν ἅπαξ πολλαπλασιαζομένου, γίνεται ὁ κ, ὅγουν κ, ἐστὶν ὁ λόγος, ὃν ὁ α, πρὸς τὸ γ, ἔχει. Ἐπεὶ δὲ καὶ τῶν δ ε ζ η, ἡ καὶ συνέχειαν πρὸς ἄλληλα πολικότης ἐστὶν ὁ αὐτὸς θ, τοῦ δὲ θ, δὶς πρὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιαζομένου, γίνεται ὁ λ, τὰ γὰρ δύο δὶς λαμβανόμενα τέσσαρα ποιεῖσι, τὰ τέσσαρα δ' αὖθις δὶς λαμβανόμενα ὀκτώ, ὁ λ, πάντως ἐστὶν ὁ λόγος, ὃν ὁ δ, πρὸς τὸ η, ἔχει. καὶ τοῦτο δὲ νοητέον τὸ τοῦ λόγου ἐν τοῖς τοιούτοις διπλάσιον, ἓξιπλάσιον, τετραπλάσιον, καὶ πᾶσαν τὴν ἐπὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ αὔξησιν. εἰ γάρ ἐννοήσαι τις τὸν τοῦ πρώτου πρὸς τὸ ἕτερον λόγον, διπλάσιον εἶναι καὶ πολικότητα, ἀπαντήσεται. Ἔστωσαν γὰρ ἕτερα μεγέθη συνεχῆ ἀνάλογα κατὰ τὸν τριπλάσιον λόγον τὰ μ ν ξ, ὧν πολικότης ἐστὶν ὁ π. τοῦτο δὲ πρὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιαζόμενον ἅπαξ, γενέσθω ὁ ρ. τὸ μ, ἄρα πρὸς τὸ ξ, ἔχει τὸν ρ, λόγον, τουτέστι τὸ μ, ἐννεαπλάσιόν ἐστι τοῦ ξ, ἐπεὶ δὲ ὁ μ, τοῦ ν, ἓξιπλάσιός ἐστιν, ἔστιν ὁ τοῦ μ, λόγος πρὸς τὸν ξ, διπλάσιος ἢν καὶ πολικότητα τοῦ λόγου τοῦ αὐτοῦ μ, πρὸς τὸν ν, ἔδει πάντως τὸ μ, τοῦ ξ, ἑξαπλάσιον εἶναι, δὶς γὰρ ὁ ἓξία λαμβανόμενος τὸν ἓξ ποιεῖ, ἀλλ' οὐκ ἔστιν, ἐννεαπλάσιον γάρ, ὡς εἴρηται, ὑπάρχει τὸ μ, τοῦ ξ. δεῖ ἄρα τὸ διπλάσιον τοῦ λόγου τῶν ἄκρων, ἢ ἓξιπλάσιον, ἢ ἄλλως πως πολλαπλάσιον μὴ καὶ πολικότητα ἐννοεῖν, ἀλλὰ καθ' ὃ ἐκ δύο, ἢ πλειόνων σύγκειται λόγων, ταὐτὸν δ' ἐστὶν εἰπεῖν, μὴ καὶ διπλασίασιν, ἢ ἓξιπλασίασιν τῆς προθήκης τοῦ λόγου πολικότητος,

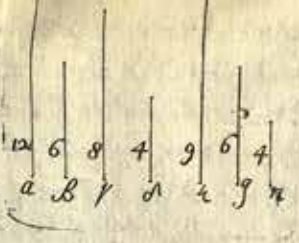
Eucl. Lib. 5. Fig. 7.

πτος, ἀλλά γε καὶ διπλασίασιν, ἢ τριπλασίασιν τῆς πολλαπλασιάσεως τῆς αὐτῆς πηλικότητος.

ΙΒ'. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

Ἐπεὶ εἰς λόγον ἀρχῆς οὐκ ἦττον καὶ τὰ Ὁμόλογα λαμβάνεται, ἢ τὰ ἀνάλογα, διάτι τοῦτο ἐπὶ τῶν παρόντος διδάσκει, καὶ τίνα χρὴ Ὁμόλογα καλεῖν, λέγων, Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα καὶ τὰ ἑξῆς. ἵνα δὲ καὶ τοῦτο σαφέστερον γένηται, ἀναγκαῖον εἰδέναι τίνα τῶν μεγεθῶν ἡγούμενα, καὶ τίνα ἑπόμενα λέγεται. πάντων γὰρ ἐγνωσμένων, οὐδὲ τὰ Ὁμόλογα γνωσθήσεται. τῶν ἐν τῷ αὐτῷ ὄντων λόγῳ μεγεθῶν, τὰ μὲν προλαμβανόμενα, ἢ γοῦν ἀναφερόμενα, οἷα αὐ ὦσιν, Ἡγούμενα λέγεται, τὰ δὲ προσλαμβανόμενα, ἢ πρὸς ἃ ἡ ἀναφορὰ, Ἑπόμενα καλεῖται. οἷον ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ α β, γ δ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, τουτέστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ γ, πρὸς τὸ δ. τὰ γοῦν α γ, κἄν τε ὑπερέχωσι τῶν β δ, κἄν τε ἐλλείπωσιν, Ἡγούμενα καλεῖται, ὡς προπιπτόμενα ἅμα καὶ προλαμβανόμενα. τὰ δὲ β, καὶ δ, Ἑπόμενα, ὡς ὑποπιπτόμενα. Ἐπεὶ δὲ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ α β, τοῖς γ δ. ἐὰν μὲν τὰ δύο ὁμοῦ α β, τοῖς δυσὶ γ δ, παραβάλλωνται, ἀνάλογα καλεῖται, καὶ τὸν ς'. τοῦ παρόντος ὅρον, ὡς ἀναλογίαν τινὰ πρὸς ἄλληλα ἔχοντα. ἐὰν δὲ τὸ α, χωρὶς τοῦ γ, παραβάλληται, καὶ τὸ β, τοῦ δ, Ὁμόλογα καλεῖται.

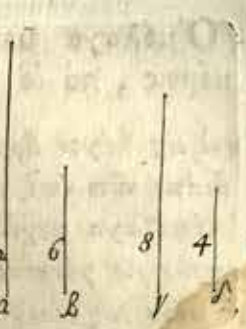
Eucl. Lib. 5. Fig. 8.



ὃν γὰρ τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸν αὐτὸν καὶ τὸ γ, πρὸς τὸ δ, λόγον ἔχει. καὶ ἀνάπαλιν, ὃν λόγον ἔχει τὸ β, πρὸς τὸ α, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ τὸ δ, πρὸς τὸ γ. ἐὰν δὲ συνεχὴς ἡ ἀναλογία ᾖ, ὡς ἐπὶ τοῦ ε ζ η. ἐπεὶ τὸ ζ, δὶς λαμβάνεται, ὡς γὰρ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, οὕτως ἔχει καὶ τὸ αὐτὸ ζ, πρὸς τὸ η, τὸ ζ, ἑπόμενόν τέ ἐστι, καὶ ἡγούμενον, ἑπόμενον μὲν πρὸς τὸ ε, ἡγούμενον δὲ πρὸς τὸ η. ὥστε τὰ μὲν ε ζ, ὡς ἡγούμενα, τὰ δὲ ζ η, ὡς ἑπόμενα, Ὁμόλογά ἐστι.

ΙΓ'. Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ, λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

Δεδειχὼς μέχρι τοῦδε, τίς τε ὁ λόγος τοῦ μεγεθῶν, καὶ τίνα μεγέθη λόγον πρὸς ἄλληλα ἔχειν δυνάται, τίνα δὲ ἐν τῷ αὐτῷ εἰσι λόγῳ, καὶ πῶς τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον καλεῖται, τίνα τε τὰ ἡγούμενα, καὶ τίνα τὰ ἑπόμενα, καὶ ἄλλα, ὅσα εἰς ἀκριβῆ τῆς ἀναλογίας συντείνουσι γνῶσιν, ἄρχεται ἐντεῦθεν δεικνύναι, καὶ πόσα τὰ τοῦ λόγου εἴδη. Ὁ Λόγος μὲν οὖν τοῦ ὁμογενῶν μεγεθῶν, ἐκ παντὸς πηλικότητα δηλοῖ: πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις, ὡς γένος λαμβάνεται. εἴδη δὲ τούτου ἓξ, τὸ Ἐναλλὰξ, τὸ Ἀνάπαλιν, καὶ Σύνθεσις, καὶ Διαίρεσις, καὶ Ἀναστροφὴ, καὶ

τὸ Δ΄ ἴσα. τινὲς δὲ τὰ ἓξ ταῦτα τῶ λόγω εἴδη, καὶ ἐπιχειρήματα καλεῖν γεωμετρικὰ εἰώθασιν, ὡς χρησιμεύοντα εἰς δεῖξιν τῆς γεωμετρικῶν προβλημάτων. Ἐναλλὰξ ἓν λόγος τότε λέγεται, ὅταν ἡ σύγκρισις τῶ ἡγουμένω πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τῶ ἑπομένω πρὸς τὸ ἑπόμενον γίνηται, οἷον τεσσάρων ὄντων μεγεθῶν ἐν τῆ αὐτῆ λόγω, τῆς α β γ δ, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α, ἡγούμενον πρὸς τὸ β, ἑπόμενον, οὕτω τὸ γ, ἡγούμενον πρὸς τὸ δ, ἑπόμενον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ α, ἡγούμενον πρὸς τὸ γ, ἡγούμενον, οὕτως ἐστὶ τὸ β, ἑπόμενον πρὸς τὸ δ, ἑπόμενον, ὁ λόγος οὕτως Ἐναλλὰξ λέγεται. ἀλλάττεται γὰρ ἡ τῆς ὅρων θέσις. ὅτι δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ὄντα, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται, δειχθήσεται ἐν τῆ ιϛ΄ τῶ παρόντος προτάσει.

Eucl. Lib. 5. Fig. 9.

ΙΔ΄: Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τῶ ἑπομένω, ὡς ἡγουμένω, πρὸς τὸ ἡγούμενον, ὡς ἑπόμενον.

Ἐπὶ τῶ αὐτῶ ὑποδείγματος καὶ τοῦτο τὸ δεύτερον τῶ λόγω εἶδος ἀναπτύσσεται· ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ γ, πρὸς δ, καὶ τοῦτο εὔτακτον αὐτῶν πρὸς ἄλληλα ἀναφορὰν, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν, καὶ ὡς τὸ δ, πρὸς τὸ γ, τὸ β, πρὸς τὸ α, Ἀνάπαλιν λόγος λέγεται· ἀναποδίζει γάρ πως ἡ ἀναλογία. ὅτι δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ὄντα, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσονται, δηλωθήσεται ἐν τῆ ποριςματι τῆς δ΄: τῶ παρόντος.

ΙΕ΄: Σωθεσις λόγω ἐστὶ λῆψις τῶ ἡγουμένω μετὰ τῶ ἑπομένω, ὡς ἑνὸς, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

Τελευταῖον τοῦτο τῶ λόγω εἶδος, ὃ εἰς ἀνάπτυξιν ἔσχεν ἐν τῆ αὐτῆ λόγω τέσσαρα μεγέθη τὰ α β, β γ, καὶ δ ε, ε ζ. καὶ ἐπεὶ, κατὰ τοῦτο ὑπόθεσιν, ἔστιν ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ β γ, οὕτω τὸ δ ε, πρὸς τὸ ε ζ· ἐναλλὰξ ἄρα συναφόντες τὸ α β, τῆ β γ, καὶ τὸ δ ε, τῆ ε ζ, ἐροῦμεν, ὡς τὸ ὅλον α γ, ἡγούμενον δηλαδὴ καὶ ἑπόμενον ὡς αὐτὸ, πρὸς τὸ β γ, ἑπόμενον, οὕτω καὶ ὅλον τὸ δ ζ, ἡγούμενον καὶ ἑπόμενον ὡς αὐτὸ, πρὸς τὸ ε ζ, ἑπόμενον, ὁ λόγος οὕτως Σωθεσις λέγεται, συντίθεται γὰρ ἀλλήλοις τὰ μεγέθη. ὅτι δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ὄντα, καὶ σωθέσει ἀνάλογον ἔσονται, δειχθήσεται προτάσει ιϛ΄: τῶ παρόντος.

Eucl. Lib. 5. Fig. 10.

ιϛ΄.

Ις': Διαίρεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ἡ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑποδείγματος, καὶ τὸ τέταρτον τοιοῦτον εἶδος ἀναπτύσσεται. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ α γ, ἡγούμενον πρὸς τὸ β γ, ἑπόμενον, οὕτω τὸ δ ζ, ἡγούμενον πρὸς τὸ ε ζ, ἑπόμενον, ἔστι παντὸς τοῦ μὲν α γ, ἡγουμένου ὑπεροχὴ, ἡ ὑπερέχει τοῦ β γ, ἑπομένου, τὸ α β, μέγεθος· τοῦ δὲ δ ζ, ἡγουμένου, ἔστιν ὁμοίως ὑπεροχὴ, ἡ ὑπερέχει τοῦ ε ζ, ἑπομένου, τὸ δ ε, μέγεθος. ἐὰν οὖν διαιροῦντες εἴπωμεν, ὡς τὸ α β, ὑπεροχὴ, πρὸς τὸ β γ, ἑπόμενον, οὕτω τὸ δ ε, ὑπεροχὴ πρὸς τὸ ε ζ, ἑπόμενον, ὁ λόγος οὕτος Διαίρεσις λέγεται· διαιρεῖται γὰρ τὰ μεγέθη. ὅτι δὲ τέσσαρα μεγέθη ἐν συνθέσει ἀνάλογον ὄντα, καὶ διαιρέσει ἀνάλογον ἔσονται, εὑρήσομεν προτάσει ιζ'.

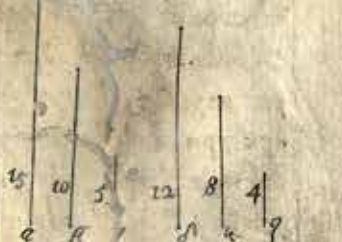
Eucl. Lib. 5. Fig. 11.

ΙΖ': Ἀντιστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸν ὑπερέχον, ἡ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ὑποδείγματος, ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ α γ, ἡγούμενον πρὸς τὸ β γ, ἑπόμενον, οὕτω τὸ δ ζ, ἡγούμενον πρὸς τὸ ε ζ, ἑπόμενον· ἐὰν εἴπωμεν, καὶ ὡς τὸ α γ, ἡγούμενον πρὸς τὸ α β, ὑπερέχον, οὕτω τὸ δ ζ, ἡγούμενον πρὸς τὸ δ ε, ὑπερέχον, ἡ λῆψις αὕτη, Ἀντιστροφὴ λόγου λέγεται· ἀντιστρέφει γάρπως τὸ ἡγούμενον πρὸς ἑαυτό. ὅτι δὲ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ὄντα, καὶ ἀντιστροφὴ ἀνάλογον ἔσονται, ὀψόμεθα ἐν τῷ ποσίσματι τῆς ιθ' τοῦ παρόντος.

ΙΗ': Δι' ἴσου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος συνὼ δύο λαμβανομένων, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ, ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. καὶ ἄλλως. λῆψις τῆς ἄκρου καθ' ὑπεξαίρεσιν τῆς μέσου.

Ἵνα δὲ καὶ τὸ ἔσχατον τοιοῦτον εἶδος, τὸ Δι' ἴσου, φημὶ, διὰ παραδείγματος, ὡς καὶ τὰ πρὸ αὐτοῦ ἀναπτυχθῇ, ἔστωσαν πλείω, ἢ δύο μεγέθη τὰ α β γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ δ ε ζ, συνὼ δύο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, τοιοῦτόν ἐστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ δ, πρὸς τὸ ε, καὶ ὡς τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ· τούτων οὕτω κειμένων, ἐὰν εἴπωμεν, καὶ ὡς τὸ α, πρῶτον πρὸς τὸ γ, ἔσχατον, οὕτω τὸ δ, πρῶτον πρὸς τὸ ζ, ἔσχατον, ὑπεξαιροῦντες τὰ μέσα, ἡ λῆψις αὕτη, Δι' ἴσου λόγος λέγεται. τοῦτ' αὐτὸ ἔστι, καὶ

Eucl. Lib. 5. Fig. 12.

κἂν πλείονα ὦσι τὰ μεγέθη. ὅτι δὲ πλείονα μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σωὶ δύο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἀνάλογον ἔσονται, δειχθήσεται προπάσει κβ': τῶ παρόντος.

Τίνα τὰ ἴδια ἑκάστου εἴδους τῶ ἐν μεγέθεσι λόγου.

Ὥσπερ ἐντελὴς γνῶσίς ἐστι τὸν ὁρισμὸν ἑκάστου οἰδέναι, ὅπως καὶ τὰ ἑκάστου ἴδια καὶ πάθη ἐρρυμᾶν ἀκριβὴς διδασκαλία καθέστηκε. Μαθόντες οὖν καὶ ἡμεῖς τὸν ὁρισμὸν ἑκάστου Εἴδους τῶ ἐν τοῖς μεγέθεσι Λόγου, φέρε δὴ καὶ τὰ πάθη τούτων καὶ ἴδια διὰ βραχέων ἐκδηλώσωμεν. Τῶ μὲν οὖν α': Εἴδους, δηλ: τῶ Ἐναλλαξ λόγου, ἴδιον, τὸ τὰ τέσσαρα μεγέθη, τὰ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον τῶ αὐτῶ γένους εἶναι. εἰγὰρ ἕτερα ὦσι γένους, δὸς εἰπεῖν, τὰ δύο μὲν γραμμαὶ, τὰ δὲ λοιπὰ δύο, ἐπιφάνειαι, κἂν ᾖ, ὡς γραμμὴ πρὸς γραμμὴν, ὅπως ἐπιφάνεια πρὸς ἐπιφάνειαν, ἐναλλαξ μὴ ποτε ἐκ ἔσαι, ὡς γραμμὴ πρὸς ἐπιφάνειαν, ὅπω γραμμὴ πρὸς ἐπιφάνειαν. γραμμὴ γὰρ καὶ ἐπιφάνεια ἑτερογενῆ εἰσι, τῶν δὲ ἑτερογενῶν λόγος ἐκ ἔστι, κατὰ τὸν γ': Ὅρον.

Τῶ δὲ δευτέρου, τουτέστι τῶ Ἀνάπαλιν λόγου, τὸ τὰ τέσσαρα μεγέθη καὶ ὁμογενῆ εἶναι, καὶ ἑτερογενῆ, κἂν γὰρ τὰ μὲν δύο αβ, πρῶτα, γραμμαὶ ὦσι, τὰ δὲ δύο γδ, δεύτερα ἐπιφάνειαι, ἢ ὅ, τι ἂν ἄλλο μέγεθος· ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α, γραμμὴ πρὸς γραμμὴν τὴν β. οὕτως ἡ γ, ἐπιφάνεια πρὸς ἐπιφάνειαν τὴν δ, ἢ ὅ, τι ἂν ἄλλο μέγεθος πρὸς ὅ, τι ἂν ἄλλο, ὑγιῶς πάντως σωαχθήσεται καὶ Ἀνάπαλιν, ὡς ἡ β, γραμμὴ, ἡ ἑπομένη πρότερον λόγον ἔχουσα, πρὸς γραμμὴν τὴν α, αὐτὴ ἡγουμένη πρότερον λαμβανομένην, οὕτως ἡ δ, ἐπιφάνεια, ἡ ὡς ἑπόμενον πρότερον λαμβανομένη, πρὸς τὴν γ, ἐπιφάνειαν, τὴν ὡς ἡγούμενον πρότερον λαμβανομένην.

Τῶ δ' ἕτι δὲ, τῶ κατὰ Σύνθεσιν δηλον: λόγου ἴδιον, τὸ καὶ τὰ τέσσαρα μεγέθη ὁμογενῆ τε εἶναι καὶ ἑτερογενῆ, ὅπερ καὶ τῶ δευτέρου, καὶ τὸ τὴν σύγκεισιν καὶ ἄλλως πως δέχεσθαι. ὅτι μὲν γὰρ καὶ ἐν τοῖς ἑτερογενέσιν ὁ κατὰ Σύνθεσιν διείσκεται λόγος, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ σύνθεσις ἐν τοῖς πρώτοις δύο μεγέθεσι, καὶ ἐν τοῖς δευτέροις χωρὶς γίγνεται, οὐδ' ἔχει τινὰ σύγκεισιν, διὰ τῆς συνθέσεως, τὰ πρῶτα μεγέθη πρὸς τὰ δεύτερα, ἀλλ' ὥσπερ πρὸ τῆς συνθέσεως πρὸς ἄλλα χωρὶς παρεβάλλοντο, πότε πρῶτα καὶ δεύτερα μεγέθη, ὅπως καὶ μετὰ τὴν σύνθεσιν οὐδὲν κωλύσει, τὰ μὲν πρότερα ἑνὸς εἶναι γένους, φημὶ εἰπεῖν, γραμμὰς, τὰ δὲ δεύτερα ἕτερα, δὸς εἰπεῖν ἐπιφανείας. ὅτι δὲ καὶ ἄλλως πως τὴν σύγκεισιν δέχεται, οὐ χαλεπὸν συναγαγεῖν. οὐ γὰρ δυνάμεθα λαβεῖν τὸ ἡγούμενον μετὰ τὸ ἑπόμενον πρὸς αὐτὸ τὸ ἡγούμενον. οἷον ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ αβ, ἡγούμενον πρὸς τὸ βγ, ἑπόμενον, οὕτ τὸ δε, ἡγούμενον πρὸς τὸ ζ, ἑπόμενον, οὐδὲν κωλύει εἰπεῖν,

Euclid. Lib. 5. Fig. 13.

καὶ

καὶ ὡς τὸ αγ, ἡγέμενον καὶ ἑπόμενον, ὡς ἓν, πρὸς τὸ αβ, ἡγέμενον, ὕπω τὸ δζ, ἡγέμενον καὶ ἑπόμενον πρὸς τὸ δε, ἡγέμενον. ἢ δυνάμεθα λαβεῖν τὸ ἑπόμενον πρὸς τὸ ἡγέμενον μὴ τὰ ἑπομένα, οἷον ὡς τὸ βγ, ἑπόμενον τῶν πρώτων ὅρων πρὸς τὸ αγ, ἡγέμενον ἅμα καὶ ἑπόμενον τῶν αὐτῶν, ὕπω τὸ εζ, ἑπόμενον τῶν δευτέρων ὅρων πρὸς τὸ δζ, ἡγέμενον ὁμοῦ καὶ ἑπόμενον τῶν αὐτῶν. ἢ τελευταῖον ἔξεσι λαβεῖν τὸ ἡγέμενον πρὸς τὸ ἡγέμενον μὴ τὰ ἑπομένα. οἷον ὡς τὸ αβ, ἡγέμενον τῶν πρώτων ὅρων πρὸς τὸ αγ, ἡγέμενον ὁμοῦ καὶ ἑπόμενον τῶν αὐτῶν, ὕπω τὸ δε, ἡγέμενον τῶν δευτέρων ὅρων πρὸς τὸ δζ, ὃ ἐξ ἡγεμένου τε καὶ ἑπομένου τῶν αὐτῶν συγκείμενον.

Τῷ δὲ τετάρτῳ, δηλον: τῷ καὶ Διαίρεσιν λόγου, καὶ τῷ αὐτῷ καὶ ἑτέρου γένους ἅμφω τὰς συζυγίας εἶναι, δι' ὧν ἀνωτέρω ἔφημεν λόγους. καὶ τὸ τῶν σύγκεισιν καὶ ἄλλως πως δέχεσθαι, ὅπερ καὶ τῷ πρὸ αὐτοῦ. Ἔστω γὰρ ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγ: συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ αβγ, δεζ, τετέσιν ὡς τὸ αγ, πρὸς τὸ αβ, τὸ δζ, πρὸς τὸ δε. καὶ ἐπεί ἐσι, διαιρέσει, ὡς τὸ βγ, ὑπεροχὴ πρὸς τὸ αβ, ἑπόμενον, ὕπω τὸ εζ, ὑπεροχὴ πρὸς τὸ δε, ἑπόμενον. δυνάμεθα εἰπεῖν καὶ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ αβ, ἑπόμενον πρὸς τὸ βγ, ὑπεροχήν, ὕπω τὸ δε, ἑπόμενον πρὸς τὸ εζ, ὑπεροχήν. ὅπερ δὲ ἔφημεν γίγνεσθαι, νίκα τὸ ἡγέμενον ὑπερέχει τοῦ ἑπομένου, τὸ αὐτὸ γενέσθαι δυνατὸν, καὶ ὅτε τὸ ἑπόμενον ὑπερέχει τοῦ ἡγεμένου. ὥσπερ γὰρ ἐν ἐκείνοις, πρῶτον μὲν ἐλαμβάνετο ἡ τοῦ ἡγεμένου ὑπεροχὴ πρὸς τὸ ἑπόμενον, καὶ δὲ τὴν δευτέραν ἀναλογίαν, τὸ ἑπόμενον πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ὕπω κἂν τούτοις, πρῶτον μὲν ἔξεσι λαβεῖν τὴν ὑπεροχὴν τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἡγέμενον, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἀναλογίᾳ, τὸ ἡγέμενον πρὸς τὴν ὑπεροχήν.

Τῷ δὲ πέμπτου, τῷ καὶ Ἀντιστροφὴν δηλον: λόγου, ὁμοίως τῷ αὐτῷ καὶ ἑτέρου γένους εἶναι ἄμφω τὰς συζυγίας τῶν μεγεθῶν. ἐπὰν δὲ τὸ ἑπόμενον ὑπερέχῃ τοῦ ἡγεμένου, δυνάμεθα λαβεῖν τὸ ἑπόμενον πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ἢ ὑπερέχει τοῦ ἡγεμένου, ὥστε εἶναι τὴν τοιαύτην ἀντιστροφὴν, λῆψιν τοῦ ἑπομένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ἢ ὑπερέχει τοῦ ἡγεμένου.

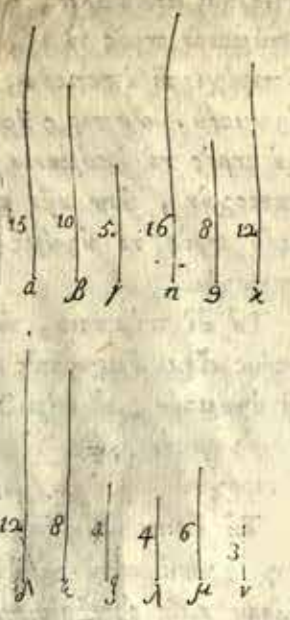
Τῷ ἕκτου δὲ καὶ τελευταίῳ, δηλον: τῷ Δι' ἴσου λόγου, τὰ πρότερα καὶ ὕστερα μεγέθη τοῦ αὐτοῦ καὶ ἑτέρου εἶναι γένους. ἐπεὶ δὲ ὁ δι' ἴσου λόγος, λῆψίς ἐσι τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων, ὥσπερ λαμβάνομεν τὸ ἡγέμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, ὕπω δυνατὸν λαβεῖν καὶ τὸ ἑπόμενον πρὸς τὸ ἡγέμενον, καὶ τὸν Ἀνάπαλιν λόγον.

ΙΘ'. Τε-

ΙΘ'. Τεταγμένη ἀναλογία ἐστίν, ὅταν ᾖ, ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ἡ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι.

Κ'. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν, καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, γίνηται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἄλλο τι.

Ὥσπερ ἐν τοῖς ἀνωτέρω πρόταξε τὸν λόγον τῆς Ἀναλογίας, ὡς μέρος ὅλου, οὕτω καὶ ἐνταῦθα προτάττει τὰ τοῦ λόγου εἴδη τῶν τῆς Ἀναλογίας εἰδῶν. δύο δὲ τὰ τῆς Ἀναλογίας εἴδη, ἡ Τεταγμένη δηλ: Ἀναλογία καὶ ἡ Τεταραγμένη. ἔστι δὲ Τεταγμένη μὲν, ὅταν ἡ πάξις, ἣν τὰ α: μεγέθη πρὸς ἄλληλα ἔχει, τὸν αὐτὸν ταύτην καὶ τὰ β: φυλάττουσι. Τεταραγμένη δὲ, ὅταν τὸν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι πάξιν, τὰ β: μεταλλάττει. Ἔστωσαν γὰρ πάντε α β γ, δ ε ζ, καὶ η θ κ, λ μ ν, εἰ μὲν οὖν ἐστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ δ, πρὸς τὸ ε, καὶ ὡς τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, ἡ Ἀναλογία αὕτη Τεταγμένη ἐστίν. εἰδὲ ἐστιν ὡς τὸ η, πρὸς τὸ θ, τὸ μ, πρὸς τὸ ν, καὶ ὡς τὸ θ, πρὸς τὸ κ, τὸ λ, πρὸς τὸ μ, ἡ Ἀναλογία αὕτη Τεταραγμένη ἐστίν. ἴδιον δὲ ἀμφοῖν ἐστὶ πρότερα, καὶ ὕστερα μεγέθη, καὶ ὁμογενῆ εἶναι, καὶ ἑτερογενῆ. εἰ γὰρ τὰ πρῶτα γραμμαὶ, φερ' εἰπεῖν, ὦσι, τὰ δὲ δεύτερα ἐπιφάνειαι, οὐδὲν κωλύσει τὴν ἀναλογίαν γενέσθαι. ἔτι δὲ καὶ τὸν Δι' ἴσου λόγον ἑκάτερα δέχεται. ὅτι δὲ τοῦθ' οὕτως ἔχει, δειχθήσεται προτάσει κβ': καὶ ἄλλαις. καὶ περὶ μὲν τῆς τῶν ὅρων διασαφήσεως ἅλις καὶ ταῦτα. ἑπόμενον δ' ἐστὶν ὁ μαθεῖν καὶ τῆς τῶν προτάσεων θεωρίας.

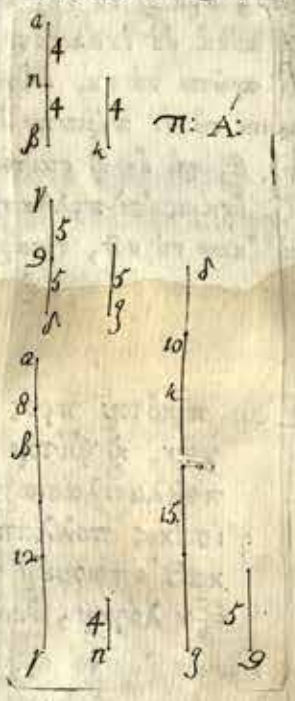
Eucl. Lib. 5. Fig. 14.

Πρότασις Α': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἑνὸς τῶν μεγεθῶν ἕνα τῶν, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Ἔστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ α β, γ δ, ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, τῶν ε, ζ, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, τοσαυταπλάσιον ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ ε, τὸ γ δ, πρὸς τὸ ζ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ ε, οὕτω τὰ α β, γ δ,

πρὸς

πρὸς τὰ ε, ζ. ἐπεὶ γὰρ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α β, τῆ ε, ποσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ γ δ, τῆ ζ. διῃρημένα τὰ μὲν α β, εἰς τὰ ἴσα τῷ ε, καὶ τὸ η. τὰ δὲ γ δ, εἰς τὰ ἴσα τῷ ζ, καὶ τὸ θ, πάντως γε τὸ πλῆθος τῷ α η, η β, ἴσον ἐστὶ τῷ πλήθει τῷ γ θ, θ δ. ἀλλὰ τὸ μὲν α η, ἴσον γέγονε τὸ ε, τὸ δὲ γ θ, τῷ ζ, ἄρα ἴσά ἐστιν καὶ σωαμφότερα τὰ α η, γ θ, σωαμφοτέροις τοῖς ε, ζ. διὰ τὰ αὐτὰ ἔτι καὶ τὰ η β, θ δ, ἴσά ἐστι τοῖς αὐτοῖς ε, ζ. ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ α β, ἴσα τῷ ε, ποσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τοῖς α β, γ δ, ἴσα τοῖς ε, ζ. καὶ ἑπομένως ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α β, τὸ ε, ποσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὰ α β, γ δ, τῷ ε, ζ. ὡς τὸ α β, ἄρα πρὸς τὸ ε, ἕτω καὶ τὰ α β, γ δ, πρὸς τὰ ε, ζ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. τὸ ὑποχεθέν. ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 5. Fig. 15.

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ α β, δευτέρου τοῦ η, καὶ τρίτον τὸ δ ε, τετάρτου τοῦ θ, ἰσάκις ἔστωσαν πολλαπλάσια, ἔτι δὲ καὶ πέμπτον τὸ β γ, δευτέρου τοῦ η, καὶ ἕκτον τὸ ε ζ, τετάρτου τοῦ θ. λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δηλον: τὸ α γ, ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τοῦ η, δευτέρου, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον, ἤτοι τὸ δ ζ, τοῦ θ, τετάρτου. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α β, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ η, καὶ τὸ δ ε, τοῦ θ, πάντως γε ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ α β, ἴσα τῷ η, ποσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ δ ε, ἴσα τῷ θ. ὡσαύτως καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ β γ, ἴσα τῷ η, ποσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ε ζ, ἴσα τῷ θ. ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ α γ, ἴσα τῷ η, ποσαῦτά ἐστι καὶ ἐν ὅλῳ τῷ δ ζ, ἴσα τῷ θ. ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ α γ, τοῦ η, ποσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ δ ζ, τοῦ θ. ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου, καὶ τὰ ἑξῆς.

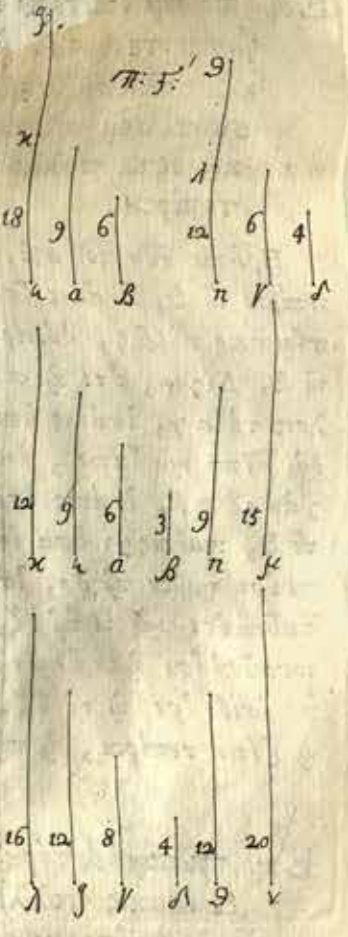
Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετ
δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου, ἀφαιρεθὲν δέ τι
που ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν
τέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ α, δευτέρου τοῦ β, καὶ τρίτον τὸ γ, τετάρτου

πολλαπλάσιον. ληφθήτωσαν δὴ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ μὲν α, τὸ ε ζ, τὰ δὲ γ, τὸ η θ. Λέγω, ὅτι καὶ εἰ δὶ ἴσα, τὸ μὲν ε ζ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ β, τὸ δὲ η θ, τοῦ δ. Ἐπεὶ γὰρ τὰ μὲν α, ἰσάκις εἴληπται πολλαπλάσιον τὸ ε ζ, τοῦ δὲ γ, τὸ η θ, παντὸς γε διαιρεθέντος τὰ μὲν ε ζ, εἰς τὰ ἴσα τῷ α, τὰ ε κ, κ ζ· τὰ δὲ η θ, εἰς τὰ ἴσα τῷ γ, τὰ η λ, λ θ, ἰσός ἐστιν ὁ ἀριθμὸς τῷ ε κ, κ ζ, τῷ ἀριθμῷ τῷ η λ, λ θ. ἀλλὰ τὸ μὲν ε κ, ἴσον ἐστὶ τῷ α, ἐκ τῆς καπασκευῆς, τὸ δὲ η λ, τῷ γ· ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν α, τοῦ β, τὸ δὲ γ, τοῦ δ, ἰσάκις πολλαπλάσιον, ἄρα καὶ τὸ ε κ, ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον τοῦ β, καὶ τὸ η λ, τοῦ δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ κ ζ, τοῦ β, καὶ τὸ λ θ, τοῦ δ. Ἐστω δὴ πρῶτον τὸ ε κ, δευτέρου τοῦ β, ἰσάκις πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τὸ η λ, τετάρτου τοῦ δ. πέμπτον δὲ τὸ κ ζ, καὶ ἕκτον τὸ λ θ, ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν αὐτῶν β, καὶ δ. καὶ συνῆκται ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ε ζ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον δευτέρου τοῦ β, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ η θ, τετάρτου τοῦ δ, καθ' ἑκάτερον τῶν αὐτέρω. Εἰ ἄρα πρῶτον δευτέρου καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 5. Fig. 12.



Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦτε πρώτου καὶ τρίτου, πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ α, πρὸς δεύτερον τὸ β, τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον, καὶ τρίτον τὸ γ, πρὸς τέταρτον τὸ δ. Εἰλήφθωσαν δὲ τῶν μὲν α, γ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ε, ζ, τῶν δὲ β, δ, τὰ η θ. Λέγω, ὅτι καὶ ὡς τὸ ε, πρὸς τὸ η, οὕτως ἐστὶ τὸ ζ, πρὸς τὸ θ. εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν ε ζ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ κ λ, τῶν δὲ η θ, τὰ μ ν, καὶ ἐπεὶ τὰ ε ζ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῶν α γ, εἰ- ε ζ, πρώτου δὲ εἰπεῖν καὶ τρίτου, ἰσάκις τὰ κ λ, παντὸς γε καὶ τὸ κ, τοῦ α, δεύ- πολλαπλάσιον, καὶ τὸ λ, τοῦ γ, τετάρ- αὐτέρω. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μ, ἰσάκις ασιον τοῦ β. καὶ τὸ ν, τοῦ δ. ἀλλ' ὡς τὸ α, ὑποθέσιν, πρὸς τὸ β, δεύτερον, τρίτον πρὸς τὸ δ, τέταρτον, καὶ τῶν μὲν α γ, ἰσάκις ἐστὶ πολλα- τῶν δὲ β δ, τὰ μ ν, εἰ ἄρα τὸ κ, ὑπερέχει τοῦ μ, ὑπερέχει παν-

παντως καὶ τὸ λ, τοῦ ν, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλασσον, ἔλασσον, καὶ τὸ πόρισμα τοῦ ε: ὅρα. εἴληπται δὲ τὰ μὲν κ λ, ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ε ζ, τὰ δὲ μ ν, τῶν η θ. ἄρα, καὶ τὸν αὐτὸν ὅρον, ὡς τὸ ε, πρῶτον πρὸς τὸ η, δεύτερον, οὕτω καὶ τὸ ζ, τρίτον πρὸς τὸ θ, τέταρτον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ὅτι δὲ καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ η, πρὸς τὸ ε, τὸ θ, πρὸς τὸ ζ, φανερόν. ὥσπερ γὰρ, εἰ τὸ κ, ὑπερέχει τοῦ μ, ὑπερέχει καὶ τὸ λ, τοῦ ν, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλασσον, ἔλασσον, ἀληθές. οὕτως ἔσται ἀληθὲς εἰπεῖν καὶ ἀνάπαλιν. εἰ δηλονότι τὸ μ, ὑπερέχει τοῦ κ, ὑπερέχει καὶ τὸ ν, τοῦ λ, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλασσον, ἔλασσον.

Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὅπερ τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

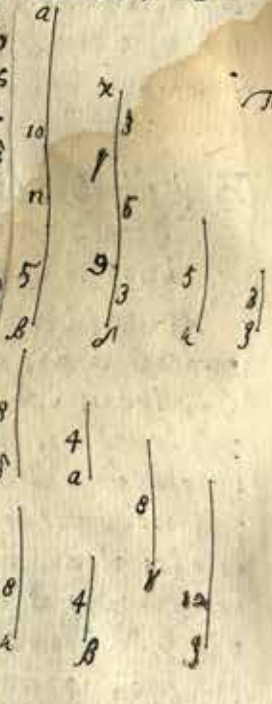
Μέγεθος ἤδη τὸ α β, μεγέθους τοῦ γ δ, ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ α ε, ἀφαιρεθέντος τοῦ γ ζ. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν ε β, τοῦ λοιποῦ ζ δ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, ὅπερ ὅλον τὸ α β, ὅλου τοῦ γ δ. ὁσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ α ε, τοῦ γ ζ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ ε β, τοῦ γ η. καὶ τιμῶ πρώτῳ ἄρα τοῦ παρόντος, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α ε, τοῦ γ ζ, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ α β, τοῦ η ζ. ἀλλὰ καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ α ε, τοῦ γ ζ, τοσαυταπλάσιον ὑπόκειται καὶ τὸ α β, τοῦ γ δ. ἄρα τὸ α β, ἰσάκις πολλαπλάσιόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν η ζ, γ δ. ὥστε τὸ η ζ, γ δ, ἴσα ἐστί. κοινοῦ δὲ τοῦ γ ζ, ἀφαιρεθέντος, ἐγκαταλείπεται τὸ γ η, ἴσον τῷ ζ δ. ἀλλὰ τοῦ γ η, ἰσάκις πολλαπλάσιον γέγονε τὸ ε β, ὅπερ τὸ α ε, τοῦ γ ζ. ἄρα τὸ αὐτὸ ε β, ἰσάκις πολλαπλάσιόν ἐστι καὶ τοῦ ζ δ, ὅπερ τὸ α ε, τοῦ γ ζ. ὑπόκειτο δὲ τὸ α ε, τοῦ γ ζ, ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὅπερ τὸ α β, ὅλον, τοῦ γ δ, ὅλου· ἄρα καὶ τὸ ε β, τοῦ ζ δ, ἰσάκις πολλαπλάσιόν ἐστιν, ὅπερ τὸ ὅλον α β, τοῦ ὅλου γ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ς': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς, ἤτοι ἴσα ἐστὶν αὐτοῖς, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Δύο ἤδη μεγέθη τὰ α β, γ δ, ἰσάκις ἔστωσαν πολλαπλάσια τῶν ε, ζ. καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ α η, γ θ, ἰσάκις ἔστωσαν καὶ αὐτὰ πολλαπλάσια τῶν ε, ζ. Λέγω,

ὅτι τὰ ἐναπολειφθέντα ηβ, θδ, ἤτοι ἴσα ἐστὶ τοῖς ε, ζ, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια. Ἔστω δὴ τὸ ηβ, ἴσον τῷ ε. δείκνυμι, ὅτι καὶ τὸ θδ, ἴσον ἐστὶ τῷ ζ. γεγράφθω γὰρ τῷ ζ, ἴσον τὸ γκ. καὶ ἐπεὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ αη, τοῦ ε, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ γθ, τοῦ ζ. ἴσον δὲ τὸ ηβ, τῷ ε, καὶ τὸ γκ, τῷ ζ, ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβ, ὅλον τοῦ ε, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ κθ, ὅλον τοῦ ζ. ὁσαπλάσιον δέ ἐστι τὸ αβ, τοῦ ε, τοσαυταπλάσιον ὑπέκειτο καὶ τὸ γδ, τοῦ ζ. ἑκάτερον ἄρα τῶν κθ, γδ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ ζ. καὶ ἐπομένως τὸ κθ, ἴσόν ἐστι τῷ γδ. κοινοῦ δὲ ἀφαιρημένου τοῦ γθ, ἐγκαταλείπεται τὸ κγ, ἴσον τῷ θδ. τὸ δὲ κγ, ἴσον γέγονε τῷ ζ, ἄρα καὶ τὸ θδ, ἴσόν ἐστι τῷ αὐτῷ ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ ηβ, τοῦ ε, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ θδ, τοῦ ζ. Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euclid. Lib. 5. Fig. 18.

Π. 5.

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἔστωσαν δὴ ἴσα μεγέθη τὰ αβ. καὶ ἄλλο, ὁ ἔτυχε τὸ γ. Λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν αβ, πρὸς τὸ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἑκάτερον δὲ τῶν αβ, πρὸς τὸ γ, τὸν αὐτὸν ἔχει. Εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν αβ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ δε, τοῦ δὲ γ, ἄλλο, ὁ ἔτυχε πολλαπλάσιον τὸ ζ. καὶ ἐπεὶ τὰ αβ, ἴσα ἐστί, καὶ τὰ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια τὰ δε, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν, ἔστι δὲ καὶ τὸ ζ, πολλαπλάσιον τοῦ γ. εἰ ἄρα τὸ δ, ὑπερέχει τοῦ ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ ε, τοῦ αὐτοῦ ζ, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. ὥστε, καὶ τὸν ε: ὅρον, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, ἔχει καὶ τὸ β, πρὸς τὸ αὐτὸ γ. Τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον δειχθήσεται, ὅτι καὶ τὸ γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν αβ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. εἰ γὰρ τὸ ζ, ὑπερέχει τοῦ δ, ὑπερέξει πάλιν καὶ τοῦ ε, κἂν, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. Τὰ ἴσα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

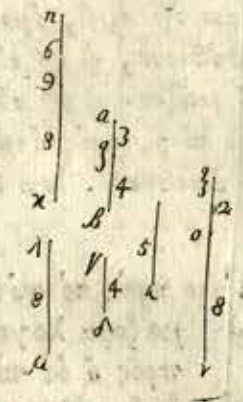
Ἔστωσαν δὴ ἄνισα μεγέθη τὰ αβ, γδ, ἄλλο δὲ, ὁ ἔτυχε τὸ ε. Λέγω, ὅτι τὸ μεῖζον τῶν αβ, γδ, πρὸς τὸ ε, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον γδ, πρὸς τὸ αὐτὸ ε. Ἔστω γὰρ παρὰ τὸ αβ, μεῖζονος τὸ ζβ, ἴσον τῷ γδ, ἐλάττονι.

καὶ ἐπεὶ

καὶ ἐπεὶ τὰ α β, ε, ὁμογενῆ εἰσι, πάντως γε καὶ τὸν τέταρτον ὅρον τῶν παρόντος, τὸ ἔλαττον τὸν α ζ, ζ β, δυάται πολλαπλασιαζόμενον τὸ ε, ὑπερέχειν. Ἔστω θρῶτον τὸ α ζ, ἔλαττον τὸ ζ β. καὶ πολλαπλασιαθήτω ἄχρις οὗ τὸ γενόμενον, μεῖζον γένηται τοῦ ε, καὶ ἔστω τὸ η θ. ὁσαπλάσιον δὲ τὸ η θ, τοῦ α ζ, τοσαυταπλάσιον γενέσθω καὶ τὸ θ κ, τοῦ ζ β, καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ δ. πολλαπλασιαθήτω δὲ καὶ τὸ ε, ἄχρις ἃ γένηται τὸ ν ξ, θρώτως ὑπερέχον τοῦ λ μ, (λέγεται δὲ τὸ ν ξ, θρώτως ὑπερέχειν τοῦ λ μ, ὅταν μὴ ὑπερέχῃ τοῦ αὐτοῦ λ μ, μείζονι τοῦ ε, ὥστε τὸ ο ξ, μὴ εἶναι μεῖζον τοῦ ε.) εἶτα ἀφῃρήθω ἀπὸ τοῦ ν ξ, τὸ ν ο, ἴσον τῷ λ μ. Ἐπεὶ οὖν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ η θ, τοῦ α ζ, καὶ τὸ θ κ, τοῦ ζ β. ἄρα ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ η θ, τοῦ α ζ, καὶ τὸ η κ, τοῦ α β, καὶ τῶν ἀ. τῶν παρόντος. ὁσαπλάσιον δέ ἐστι τὸ η θ, τοῦ α ζ, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ δ, ἄρα ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ η κ, τοῦ α β, καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ δ. Πάλιν ἐπεὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ θ κ, τοῦ ζ β, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ δ, τὸ δὲ ζ β, ἴσόν ἐστι τῷ γ δ, πάντως γε καὶ τὸ θ κ, ἴσόν ἐστι τῷ λ μ· ἀλλὰ τὸ λ μ, ἴσόν ἐστι τῷ ν ο, ἄρα καὶ τὸ θ κ, ἴσόν ἐστι τῷ ν ο. γέγονε δὲ τοῦ μὲν η θ, μεῖζον τοῦ ε, τὸ δὲ ξ ο, οὐκ ἔστι μεῖζον τοῦ αὐτοῦ ε. προσκείσθω ἄρα τοῖς θ κ, ὃν, ἴσος μὲν γέθεσι τῷ η θ, ξ ο, τὸ η κ, ἐν ᾧ τὸ η θ, μεῖζον προσκείσθαι, μεῖζόν ἐστι τοῦ ν ξ, ἐν ᾧ τὸ ξ ο, ἔλαττον προσκείσθαι· τὸ δὲ λ μ, οὐ μόνον οὐκ ὑπερέχει τοῦ ν ξ. ἀλλὰ δὴ καὶ ἔλαττον αὐτοῦ ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν η κ, ἰσάκις πολλαπλάσιόν ἐστι τοῦ α β, τὸ δὲ λ μ, τοῦ γ δ, καὶ τὸ ν ξ, πολλαπλάσιον τοῦ ε. τὸ α β, ἄρα μείζονα λόγον ἔχει θρὸς τὸ ε, ἤπερ τὸ γ δ, θρὸς τὸ αὐτὸ ε, καὶ τῶν ζ'. ὅρον τοῦ παρόντος.

Λέγω δὲ, ὅτι καὶ τὸ ε, θρὸς τὸ γ δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ θρὸς τὸ α β. τῇ αὐτῇ γὰρ κατασκευαθέντων δειχθήσεται, κατὰ τὸ αὐτέρω, τὸ ξ ν, πολλαπλάσιον ὂν τοῦ ε, ὑπερέχειν τοῦ λ μ, καὶ μὴ ὑπερέχειν τοῦ η κ, ὧν τὸ μὲν λ μ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ γ δ· τὸ δὲ η κ, τοῦ α β.

Εἰ δὲ τὸ ζ β, ἔλαττον ᾖ τοῦ α ζ. Ἐπεὶ τοῦ αὐτοῦ γενός ἐστι τὸ ζ β, ε, πολλαπλασιαθήτω τὸ ζ β, χωρὶς, ἄχρις ἃ γένηται μεῖζον τοῦ ε, καὶ ἔστω τοῦτο, φέρε εἰπεῖν, τὸ θ κ. ὁσαπλάσιον δ' αὖ γένηται τὸ θ κ, τοῦ ε, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ η θ, τοῦ α ζ, καὶ τὸ λ μ, τοῦ γ δ· καὶ εἰλήφθω τὸ ν ξ, πολλαπλάσιον τοῦ ε, καὶ θρώτως ὑπερέχον τοῦ λ μ. καὶ κατὰ τὰ αὐτέρω, δειχθήσεται τὸ μὲν λ μ, οὐχ ὑπερέχειν τοῦ ξ ν. τὸ δὲ λ μ, μὴ ὑπερέχειν τοῦ αὐτοῦ ξ ν, καὶ ἑπομένως τὸ α β, μείζονα λόγον ἔχειν θρὸς τὸ ε, ἤπερ τὸ γ δ, θρὸς τὸ αὐτὸ ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 5. Fig. 19.

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, κἀκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐχέτωσαν τὰ α, β, τὸν αὐτὸν λόγον πρὸς τὸ γ, μέγεθος, καὶ τὸ γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν α, β, ὁμοίως τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον. Λέγω, ὅτι καθ' ὑπόθεσιν, καὶ κατὰ τὴν δευτέραν τὰ α, β, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. εἰ γὰρ μή, ἔσται τὸ α μεῖζον· καὶ κατὰ τὴν αὐτέραν, ἔστε τὰ α, β, πρὸς τὸ γ, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ἔστε τὸ γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν α β. ὅπερ ἀδύνατον ἐστι τῇ ὑποθέσει. ἴσα ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. Lib. 5. Fig. 20.

π. 9.

Πρότασις Ι'. Θεώρημα.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι, πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.

Τῶν α, β, ἤδη μεγεθῶν, τὸ μὲν α, ἐχέτω μείζονα λόγον πρὸς τὸ γ, τὸ δὲ β, ἐλάττονα. Λέγω τὸ α, μεῖζον εἶναι τοῦ β. εἰ γὰρ μή, ἢ ἴσον ἔσται τὸ α, τῷ β, ἢ ἔλαττον. ὅτι δὲ οὐδέτερον, δῆλον. εἰ γὰρ ἴσον ἦν τὸ α, τῷ β, τὸν αὐτὸν ἂν εἶχε λόγον ἑκάτερον τῶν α, β, πρὸς τὸ γ, καθ' ὑπόθεσιν· εἰδὲ ἔλαττον, ἐλάττονα λόγον εἶχε τὸ α, πρὸς τὸ γ, ἤπερ τὸ β, πρὸς τὸ αὐτὸ γ, ἔχει δὲ μείζονα, καθ' ὑπόθεσιν, ἄρα τὸ α, μεῖζόν ἐστι τοῦ β. Ἐχέτω δὲ καὶ τὸ γ, μείζονα λόγον πρὸς τὸ β, ἤπερ πρὸς τὸ α. Λέγω καὶ ὅτι τὸ β, ἔλασσον εἶναι τοῦ α. εἰ γὰρ μή, ἢ ἴσον ἔσται τὸ β, τῷ α, ἢ ἔλαττον. ὅτι δὲ οὐδέτερον δῆλον καὶ τοῦτο. εἰ μὲν γὰρ ἴσον, τὸν αὐτὸν ἂν εἶχε λόγον τὸ γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν α, β, καθ' ὑπόθεσιν· εἰ δὲ μεῖζον ἦν τὸ β, τοῦ α. τὸ γ, πρὸς τὸ α, μείζονα λόγον εἶχε, ἤπερ πρὸς τὸ β, κατὰ τὴν ιη. τοῦ παρόντος. ἔχει δὲ μείζονα μὲν λόγον πρὸς τὸ β, ἐλάττονα δὲ πρὸς τὸ γ. τὸ β, ἄρα ἐλαττόν ἐστι τοῦ α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΑ'. Θεώρημα.

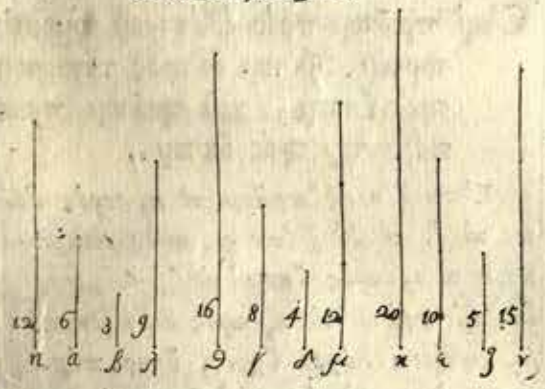
Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοί, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Ἔστω δὴ ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ γ, πρὸς τὸ δ, καὶ ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ δ, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν καὶ ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. Εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν α, γ, ε, ἡγουμένων ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η, θ, κ. τῶν δὲ β, δ, ζ, ἑπομένων ἄλλα, ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ λ, μ, ν. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ὁ πρὸς τὸ β, οὕτω τὸ γ, πρὸς τὸ δ, παύτως γε, καὶ τὸν ἐ-

ὅρον

ὅρον τῶ παρόντος, εἰ τὸ τῶ α, πρώτω ἰσάκις πολλαπλάσιον, δηλον: τὸ ν, ὑπερέχῃ τῶ λ, ὅπερ ἐστὶ τοῦ β, δευτέρω ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὑπερέξει καὶ τὸ τῶ γ': δηλ: τὸ θ, τῶ μ, ὅπερ ἐστὶ τοῦ δ': ἰσάκις πολλαπλ: κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Διὰ τὰ αὐτὰ ἐὰν τὸ θ, ὑπερέχῃ τοῦ μ, ὑπερέξει καὶ τὸ ξ, τῶ ρ, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Λ'ΛΛ' εἰ τὸ θ, ὑπερέχῃ τῶ μ, ὑπερέξει, ὡς δέδεικται, καὶ τὸ ν, τοῦ λ, κἂν ἴσον, ἴσον, καὶ τὰ ἑξῆς. ἄρα ἐὰν τὸ ν, ὑπερέχῃ τοῦ λ, ὑπερέχει καὶ τὸ ξ, τῶ ρ, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. τὰ δὲ ν, καὶ ξ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῶ α, ε, καὶ τὰ λ, ρ, τῶ β, ζ. ἄρα ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτω τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

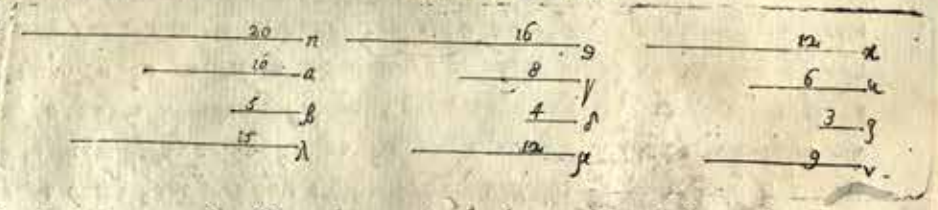
Eucl. Lib. 5. Fig. 21.



Πρότασις ΙΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

Ἔστωσαν ἤδη τὰ α β, γ δ, ε ζ, μεγέθη ἀνάλογον, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ γ, πρὸς τὸ δ, καὶ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν καὶ ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτω τὰ α, γ, ε, πρὸς τὰ β, δ, ζ. εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν α, γ, ε, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η, θ, κ. τῶν δὲ β, δ, ζ, ἄλλα, ἃ ἔτυχε τὰ λ, μ, ν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, οὕτω τὸ γ, πρὸς τὸ δ, καὶ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. ἄρα καὶ τὸν ε: ὅρον, εἰ τὸ η, ὑπερέχῃ τῶ λ, ὑπερέξει καὶ τὸ θ, τῶ μ, καὶ τὸ κ, τῶ ν, κἂν ἴσον ἴσον, κἂν ἔλασσον ἔλασσον. ὥστε εἰ ὑπερέχῃ τὸ η, τῶ λ, ὑπερέξουσι καὶ τὰ η κ, μῶ τῶν λ μ ν, ὁμῶ, κἂν ἴσον, ἴσα. κἂν ἔλασσον, ἐλάσσονα. ἀλλὰ τὰ η, κ, λ, πολλαπλάσια ἐστὶ τῶν α β, οὐδὲ ὅμοιον: καὶ δευτέρω, τὰ δὲ η, θ, κ, καὶ λ, μ, ν, τῶν α γ ε, καὶ β δ ζ, ἕκατα δηλ: καὶ πάρτα, ἄρα καὶ τλὼ ά: τῶ παρόντος, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ἔστι καὶ τὰ α γ ε, πρὸς τὰ β δ ζ, καὶ τὸν ε: ὅρον. Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν, καὶ τὰ ἑξῆς.

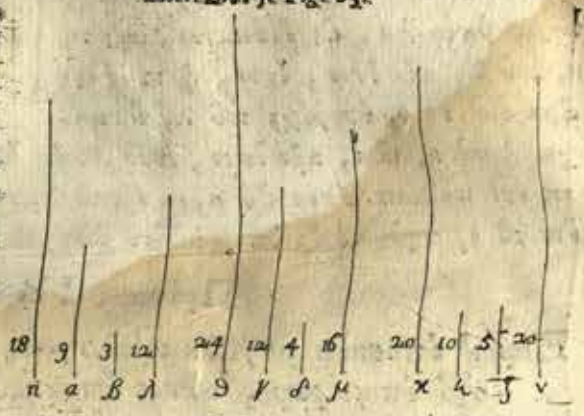
Eucl. Lib. 5. Fig. 22.

Πρό-

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον. τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Ἔστω ἤδη ὡς πρῶτον τὸ α, πρὸς δεύτερον τὸ β, οὕτω τρίτον τὸ γ, πρὸς τέταρτον τὸ δ. τὸ δὲ τρίτον γ, πρὸς τέταρτον τὸ δ, μείζονα ἐχέτω λόγον, ἤπερ πέμπτον τὸ ε, πρὸς ἕκτον τὸ ζ. Λέγω, ὅτι καὶ πρῶτον τὸ α, πρὸς δεύτερον τὸ β, μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ πέμπτον τὸ ε, πρὸς ἕκτον τὸ ζ. Εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν α, γ, ε, ἡγουμένων ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η, θ, κ· τῶν δ' ἑπομένων ἄλλα, ἃ ἔτυχε τὰ λ, μ, ν· καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ α, πρῶτον πρὸς τὸ β, δεύτερον, οὕτως ἐστὶ τὸ γ, τρίτον πρὸς τὸ δ, τέταρτον· καὶ τῶν μὲν α, γ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η, θ. τῶν δὲ β, δ, τὰ λ, μ· παύτως γε εἰ τὸ η, ὑπερέχῃ τοῦ θ, ὑπερέχει καὶ τὸ λ, τοῦ μ, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλαττον, ἔλαττον, καὶ τὸ πόρισμα τοῦ ε· ὅρου τοῦ παρόντος. Ἐπεὶ δὲ πάλιν τὸ γ, πρὸς τὸ δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ· τῶν δὲ γ δ, ὡς εἴρηται, ἰσάκις εἴληπται πολλαπλάσια τὰ θ μ· τῶν δὲ ε ζ, τὰ κ ν· εἰ ἄρα τὸ θ, ὑπερέχῃ τοῦ μ, τὸ η, οὐχ ὑπερέχει τοῦ ν, καὶ τὸν ζ· ὅρον, ἀλλ' εἰ ὑπερέχῃ τὸ θ, τοῦ μ, ὑπερέχει καὶ τὸ η, τοῦ λ, ὡς δέδεικται· ἄρα εἰ ὑπερέχῃ καὶ τὸ η, τοῦ λ, τὸ κ, οὐχ ὑπερέχει τοῦ ν. καπὰ τὸν αὐτὸν ἄρα ζ· ὅρον, τὸ α, πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. τὸ ὑποκείμενον.

Euel. Lib. 5. Fig. 23.



Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζων ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μείζων ἔσται, καὶ ἴσον, ἴσον. καὶ ἔλαττον, ἔλαττον.

Πρῶτον ἤδη τὸ α, πρὸς δεύτερον τὸ β, τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον, καὶ τρίτον τὸ γ, πρὸς τέταρτον τὸ δ. τὸ δὲ α, τοῦ γ, μεῖζον ἔστω. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ β, τοῦ δ, μεῖζον ἔσται. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α, τοῦ γ, μεῖζόν ἐστιν, ἔστω δ' ἄλλο, ὃ ἔτυχε τὸ β· παύτως γε τὸ α, πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ γ, πρὸς τὸ αὐτὸ β, καὶ τοῦτο ἡ· τοῦ παρόντος. ἀλλ' ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ὑπόκειται τὸ γ, πρὸς τὸ δ, ἄρα τὸ

αὐ-

αὐτὸ γ, πρὸς τὸ δ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ β. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστι, καὶ τῶν ἑξῆς: τὸ παρ: ἄρα τὸ δ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ β, καὶ ἀνάπαλιν τὸ β, μεῖζον τοῦ δ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν τὸ α, ἴσον ᾖ τῷ γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ β, τῷ δ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τὰ ἑξῆς.

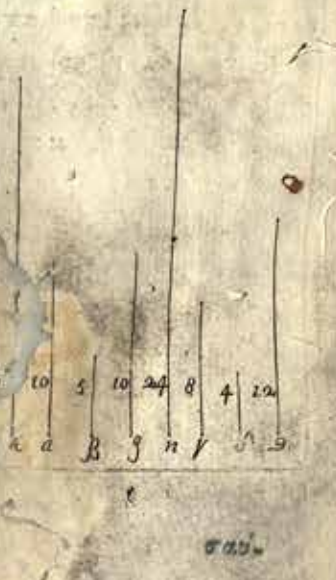
Euclid. Lib. 5. Fig. 24.

Πρότασις ΙΕ΄: Θεώρημα.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

Ἔστωσαν ἤδη ἰσάκις πολλαπλάσια τὸ αβ, τοῦ γ, καὶ τὸ δε, τοῦ ζ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ ζ, τὸ αβ, πρὸς τὸ δε. Ἐπεὶ γὰρ τὸ αβ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τοῦ γ, καὶ τὸ δε, τοῦ ζ, διῃρημένου ἄρα τοῦ αβ, εἰς τὰ ἴσα τῷ γ, τὰ αη, ηθ, θβ. καὶ τοῦ δε, εἰς τὰ ἴσα τῷ ζ, τὰ δκ, κλ, λε, ἴσόν ἐστι τὸ πλῆθος τῷ αη, ηθ, θβ, τῷ πλήθει τῷ δκ, κλ, λε. ἀλλὰ τὰ αη, ηθ, θβ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ὅσπερ καὶ τὰ δκ, κλ, λε, ἄρα ὡς τὸ αη, πρὸς τὸ δκ, ἕπως ἐστὶ τὸ ηθ, πρὸς τὸ κλ, καὶ τὸ θβ, πρὸς τὸ λε. καὶ ἔτι ὡς τὸ αη, πρὸς τὸ δκ, ἕπα τὰ αη, ηθ, θβ, πρὸς τὰ δκ, κλ, λε, καὶ τινὶ πρώτῳ τοῦ παρόντος. τὸ δὲ αη, ἴσόν ἐστι τῷ γ, καὶ τὸ δκ, τῷ ζ. ἄρα καὶ ὡςτὸ γ, πρὸς τὸ ζ, ἕπα τὸ αη, ηθ, θβ, ἤτοι τὸ αβ, πρὸς τὰ δκ, κλ, λε, δηλ: τὸ δε. τὰ μέρη ἄρα τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Ις΄: Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστωσαν ἤδη τέσσαρα μεγέθη τὰ αβ, γδ, ἀνάλογον, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ γ, πρὸς τὸ δ. Λέγω, ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, τὸ β, πρὸς τὸ δ. εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν αβ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ εζ, τῶν δὲ γδ, ἄλλα, ἃ ἔτυχε τὰ ηθ. καὶ ἐπεὶ τὰ εζ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τοῦ αβ, ἄρα καὶ τινὶ ἀνωτέρω, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ἕπως ἐστὶ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, ὑπ-

σαύ-

σαύτως καὶ ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ δ, τὸ κ, πρὸς τὸ θ, ὡς δὲ τὸ α, πρὸς τὸ β, ἔστι καὶ τὸ γ, πρὸς τὸ δ. ἄρα καὶ ὡς τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, τὸ κ, πρὸς τὸ θ, καὶ τλοὶ ά: τῶν παρόντος. ὥστε καὶ τλοὶ ά δ': τῶν αὐτῶν, εἰ τὸ ε, πρῶτον ὑπερέχει τῷ κ, τρίτου, ὑπερέχει καὶ τὸ ζ, δεύτερον τῷ θ, τετάρτου, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. τὰ δὲ ε, καὶ ζ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῆς αβ, καὶ τὰ κ θ, τῆς γδ. ἄρα καὶ τὸν έ: ὅρον τῶν παρ: ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, οὕτως ἐστὶ τὸ β, πρὸς τὸ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ ὑποκείμενον.

Πρότασις ΙΖ'. Θεώρημα.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστωσαν ἤδη συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ αβ, βε, γδ, δζ, τουτ' ἔστιν ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ βε, τὸ γδ, πρὸς τὸ δζ. Λέγω, ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἔσται, ὡς τὸ αε, πρὸς τὸ εβ, οὕτω τὸ γζ, πρὸς τὸ ζδ. εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν αε, εβ, γζ, ζδ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ κθ, θλ, μν, νξ, τῆς δὲ εβ, ζδ, ἄλλα, ἃ ἔτυχε τὰ οπ, πρ. ἐπεὶ οὖν τὸ κθ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τῆς αε, καὶ τὸ θλ, τῆς εβ. ταὐτὸν γε, καὶ τλοὶ ά: τῶν παρ: ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, καὶ τὸ κθ, τῆς αε, καὶ τὸ κλ, τῆς αβ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ λμ, τῆς γζ, καὶ τὸ λν, τῆς γδ. τὸ δὲ κθ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τῆς αε, καὶ τὸ λμ, τῆς γζ, ἄρα καὶ τὸ κλ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τῆς αβ, καὶ τὸ λν, τῆς γδ. Πάλιν ἐπεὶ τὸ θλ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τῆς εβ, καὶ τὸ μν, τῆς ζδ, εἴληπται δὲ καὶ τὸ νξ, τῆς εβ, καὶ τὸ νπ, τῆς ζδ, ἰσάκις πολλαπλάσια, καὶ συνῃρημένα ἄρα ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, τὸ θξ, τῆς εβ, καὶ τὸ μπ, τῆς ζδ. ἀλλ' ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ βε, οὕτως ἐστὶ καὶ τὸ γδ, πρὸς τὸ δζ, τῆς δὲ αβ, γδ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ κλ, λν, καὶ τῆς εβ, ζδ, τὰ θξ, μπ, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ κλ, τῆς θξ, ὑπερέχει καὶ τὸ λν, τῆς μπ, καὶ τὸν έ: ὅρον, κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Ὑπερεχέτω δὴ τὸ κλ, τῆς θξ. κοινῆς δὲ ἀφῃρημένης τῆς θκ, ὑπερέχει καὶ τὸ κθ, τῆς κξ, ἀλλὰ δὴ εἰ ὑπερέχει τὸ κλ, τῆς θξ, ὑπερέχει καὶ τὸ λν, τῆς μπ, κοινῆς ἀφῃρημένης τῆς μν, ἐναπολείπεται παντὸς τὸ λμ, μεῖζον τῆς νπ. Ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι κἂν ἴσον, τὸ κθ, τῇ κξ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ λμ, τῇ νπ, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. ἀλλὰ τὰ κλ, λμ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῶν αε, γζ, τὰ δὲ κξ, νπ, τῶν εβ, ζδ. ἄρα καὶ τὸν έ: ὅρον, ὡς τὸ αε, πρὸς τὸ εβ, οὕτως ἐστὶ τὸ γζ, πρὸς τὸ ζδ. Ἐὰν ἄρα συγκείμενα μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 5. Fig. 25.

Πρό-

Πρότασις ΙΗ′: Θεώρημα.

Ἐὰν διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστωσαν ἤδη διηρημένα μεγέθη τὰ α ε, ε β, καὶ γ ζ, ζ δ, ἀνάλογον, ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ ε β, τὸ γ ζ, πρὸς τὸ ζ δ. Λέγω, ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ ε β, τὸ γ δ, πρὸς τὸ ζ δ. εἰ γὰρ μή, ἔσται παντὸς ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ ε β, οὕτω τὸ γ δ, πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ζ δ, ἢ μεῖζον. Euclid. Lib. 5. Fig. 26.

Ἔστω δὴ πρὸς ἔλαττον τὸ η δ. καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη τὰ α β, ε β, γ δ, η δ, ἀνάλογόν ἐστι, πάντως γε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογόν ἐστι, καὶ τῷ ἀνωτέρω, ἄρα ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ ε β, οὕτως ἐστὶ τὸ γ η, πρὸς τὸ η δ, ὡς δὲ τὸ α ε, πρὸς τὸ ε β, ἴσῳ καὶ τὸ γ ζ, πρὸς τὸ ζ δ. ἄρα καὶ τὸ γ η, πρὸς τὸ η δ, τὸ γ ζ, πρὸς τὸ ζ δ. ἀλλὰ τὸ γ η, πρῶτον, μεῖζόν ἐστι τοῦ γ ζ, τρίτου, ἄρα καὶ τὸ η δ, δεύτερον, μεῖζόν ἐστι τοῦ ζ δ, τετάρτου, καὶ τῷ τῷ ι δ′. τοῦ αὐτοῦ. ὑπετέθη δὲ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἄρα. ἄρα καὶ τὸ ὅλον ἐπὶ ὅλον ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον τοῦ ζ δ. ἄρα ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ ε β, ἐστὶ καὶ τὸ γ ζ, πρὸς τὸ ζ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΘ′: Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἔστω δὴ ὡς ὅλον τὸ α β, πρὸς ὅλον τὸ γ δ, οὕτω τὸ α ε, ἀφαιρεθὲν πρὸς τὸ γ ζ, ἀφαιρεθέν. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν ε β, πρὸς τὸ λοιπὸν ζ δ, ἔστιν, ὡς ὅλον τὸ α β, πρὸς ὅλον τὸ γ δ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ, οὕτω τὸ α ε, πρὸς τὸ γ ζ, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ α ε, οὕτω τὸ γ δ, πρὸς τὸ γ ζ, καὶ τῷ ι ε′. τῷ παρόντος. Ἐπεὶ δὲ πάλιν συγκείμενα μεγέθη τὰ α β, α ε, γ δ, γ ζ, ἀνάλογόν ἐστι. δῆλον, ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογόν ἐστι, καὶ τῷ ι ζ′. τῷ αὐτῷ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ ε β, οὕτω τὸ γ ζ, πρὸς τὸ ζ δ. καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ γ ζ, τὸ ε β, πρὸς τὸ ζ δ. ἀλλ' ὡς τὸ α ε, πρὸς τὸ γ ζ, ὑπετέθη τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ. ἄρα, καὶ τῷ ι α′. τῷ αὐτῷ, ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ, οὕτω τὸ ε β, πρὸς τὸ ζ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Euclid. Lib. 5. Fig. 27.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀντιστροφὴν ἀνάλογον ἔσται. κειμένων γὰρ τῶν α β, α ε, γ δ, γ ζ, ἀνάλογον, ὥστε εἶναι ὡς τὸ

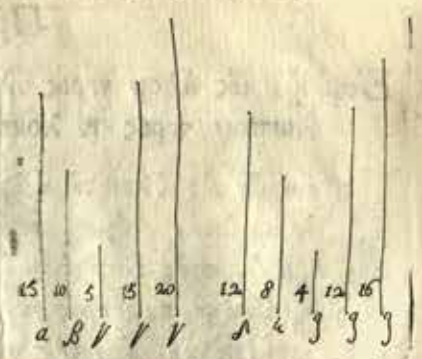
τὸ αβ, πρὸς τὸ αε, τὸ γδ, πρὸς τὸ γζ. ἔσαι παύπως, καὶ τῷ ιε': τῷ παρόντος καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ γδ, τὸ αε, πρὸς τὸ γζ, τετέσιν, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν. καὶ δὲ τῷ παρῦσαν, ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ γδ, ὕπω τὸ εβ, πρὸς τὸ ζδ. καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ εβ, τὸ γδ, πρὸς τὸ ζδ, ἥτοι ἡγούμενον πρὸς τῷ ὑπεροχῷ, καθ' ὃ ὑπερέχει τὸ ἑπόμενον. τοῦτο δέ, Ἀντιστροφὴ λόγου ἐστί, καὶ τὸν ιζ': ὅρον τοῦ παρόντος. Γρέον δὲ, ὅτι οὐκ ἀεί ἐσιν ὁ αὐτὸς λόγος τοῦ ἡγουμένου πρὸς τῷ ὑπεροχῷ, ὃν εἶχε τὸ αὐτὸ ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, κἂν γὰρ ὁ τοῦ ἡγουμένου λόγος πρὸς τὸ ἑπόμενον πολλαπλάσιος ᾖ, ὁ τοῦ αὐτοῦ ἡγουμένου πρὸς τῷ ὑπεροχῷ δυνάται εἶναι ἑτέρου εἴδους, ἐπιμορίου φερ' εἰπεῖν, ἢ ἐπιμεροῦς.

Πρότασις Κ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος συνὰ δύο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσαι, κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἔστωσαν ἤδη τρία μεγέθη τὰ αβγ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ δεζ, συνὰ δύο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, τετέσιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ δ, πρὸς τὸ ε. καὶ ὡς τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. ἔστω δὲ τὸ α, τοῦ γ, μεῖζον. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ δ, τοῦ ζ, μεῖζόν ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α, τοῦ γ, μεῖζόν ἐστι, παύπως γε καὶ τῷ η': τῷ παρόντος, τὸ α, πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ γ, πρὸς τὸ αὐτὸ β. ὡς δὲ τὸ α, πρὸς τὸ β, ὕπω τὸ δ, πρὸς τὸ ε, καὶ ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ β, ὕπω τὸ ζ, πρὸς τὸ ε, ἀνάπαλιν, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δ': ἄρα, καὶ τὸ δ, πρὸς τὸ ε, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ζ, πρὸς αὐτὸ τὸ ε. τὸ δ, ἄρα, καὶ τῷ η': μεῖζόν ἐστι τοῦ ζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἐὰν τὸ α, ἴσον ᾖ τῷ γ, ἴσον ἔσαι καὶ τὸ δ, τῷ ζ. κἂν ἔλαττον ἔλαττον. Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 5. Fig. 28.



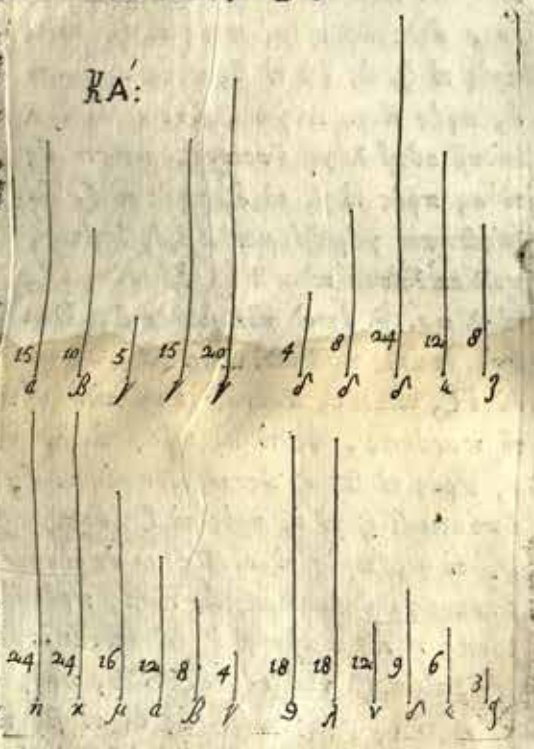
Πρότασις ΚΑ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, συνὰ δύο λαμβανόμενα, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσαι. κἂν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἔστωσαν ἤδη μεγέθη τρία τὰ αβγ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ δεζ, συνὰ δύο καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ λαμβανόμενα. ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία,

γία, τετάρτην ὡς μὲν τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. ὡς δὲ τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ε. ἔστω δ' ἔτι καὶ τὸ α, τοῦ γ, μεῖζον. Λέγω, ὅτι καὶ τὸ δ, τοῦ ζ, μεῖζον ἔσται. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α, τοῦ γ, μεῖζόν ἐστι, παντὸς γε τὸ α, πρὸς τὸ β, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ γ, πρὸς τὸ αὐτὸ β. ἀλλ' ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ἔστι καὶ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, ὡς δὲ τὸ γ, πρὸς τὸ β, τὸ ε, πρὸς τὸ δ, ἀνάπαλιν, καὶ τὸ πόρισμα τῆς δ': ἄρα τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ δ, καὶ πάλιν τὸ ε, τοῦ παράντος, τὸ ζ, ἄρα ἔλαττόν ἐστι τοῦ δ, καὶ τοιοῦτόν ἐστι τοῦ αὐτοῦ, ὥστε τὸ δ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ ὑποκείμενον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν τὸ α, ἴσον ᾖ τῷ γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ δ, τῷ ζ. κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euc. Lib. 5. Fig. 29.



Πρότασις ΚΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

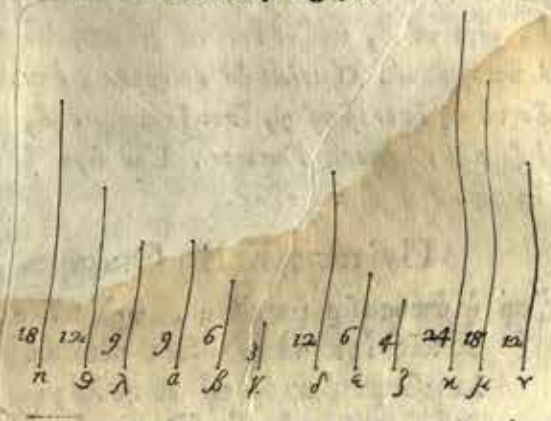
Ἔστωσαν ἤδη μεγέθη τὰ α β γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ δ ε ζ, σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, τετάρτην ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ δ, πρὸς τὸ ε, καὶ ὡς τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. Λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ζ. Εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν α δ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η θ, τῶν δὲ β ε, τὰ κ λ, καὶ ἔτι τῶν γ ζ, τὰ μ ν. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, ἔστι καὶ τὸ δ, πρὸς τὸ ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν α δ, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η θ, τῶν δὲ β ε, τὰ κ λ· παντὸς γε καὶ τοιοῦτόν ἐστι τοῦ παράντος, ὡς τὸ η, πρὸς τὸ κ, τὸ θ, πρὸς τὸ λ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς τὸ κ, πρὸς τὸ μ, τὸ λ, πρὸς τὸ ν. ὥστε τὰ η κ μ, θ λ ν, σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. ἄρα καὶ τοιοῦτόν ἐστι τοῦ κ· τοῦ αὐτοῦ ἐστὶ δὲ ἴσον τὸ η, τῷ μ, μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ θ, τοῦ ν, μεῖζον ἔσται, ἐὰν ἴσον, ἴσον. κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. τὰ δὲ η θ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῶν α δ, καὶ τὰ μ ν, τῶν γ ζ. ἄρα, καὶ τὸν ε· ὅρον τοῦ παρ· ὡς τὸ α, πρῶτον πρὸς τὸ γ, δεύτερον, οὕτω τὸ δ, τρίτον πρὸς τὸ ζ, τέταρτον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ ὑποκείμενον.

Πρότασις ΚΓ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστωσαν ἤδη τρία μεγέθη τὰ α β γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ δ ε ζ, σὺν δύο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. Ἔστω δὲ ἡ αὐτῶν ἀναλογία τεταραγμένη, δηλ: ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, ὡς δὲ τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ε. Λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται, τουτέστιν ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ζ. εἰλήφθωσαν γὰρ τῶν μὲν α β δ, ἰσάκις, πολλαπλάσια τὰ η θ κ, τῶν δὲ γ ε ζ, τὰ λ μ ν. καὶ ἐπεὶ τῶν μὲν α β, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ η θ, τῶν δὲ ε ζ, τὰ μ ν, παντως γε καὶ τλω ι ε: τῶ παρόντος, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ β, τὸ η, πρὸς τὸ θ. καὶ ὡς τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, τὸ μ, πρὸς τὸ ν. ὡς δὲ τὸ α, πρὸς τὸ β, ὑπόκειται καὶ τὸ ε, πρὸς τὸ ζ· ἄρα, καὶ τλω ι ά: τῶ αὐτῶ, καὶ ὡς τὸ η, πρὸς τὸ θ, τὸ μ, πρὸς τὸ ν. Πάλιν ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ β, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ε, παντως γε καὶ ἐναλλαξ ὡς τὸ β, πρὸς τὸ δ, τὸ γ, πρὸς τὸ ε, καὶ τλω ι ε': τῶ παρόντος. ἀλλὰ τῶν β δ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ θ κ, καὶ τῶν γ ε, τὰ λ μ, ἄρα καὶ τλω ι ε: ὡς τὸ β, πρὸς τὸ δ, τὸ θ, πρὸς τὸ κ, καὶ ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ ε, τὸ λ, πρὸς τὸ μ. ὡς δὲ τὸ β, πρὸς τὸ δ, δέδεικται εἶναι καὶ τὸ γ, πρὸς τὸ ε. ἄρα καὶ τλω ι ά: τῶ αὐτῶ, καὶ ὡς τὸ θ, πρὸς τὸ κ, τὸ λ, πρὸς τὸ μ, ὥστε καὶ ἐναλλαξ ὡς τὸ θ, πρὸς τὸ λ, τὸ κ, πρὸς τὸ μ. ὡς δὲ τὸ η, πρὸς τὸ θ, δέδεικται καὶ τὸ μ, πρὸς τὸ ν, ἄρα τρία μεγέθη τὰ η θ λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ κ μ ν, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσι λόγῳ σὺν δύο λαμβανόμενα, ἔστι δὲ ἡ αὐτῶν ἀναλογία τεταραγμένη· καπὶ τλω κ ά: ἄρα τῶ παρόντος, εἰ τὸ η, ὑπερέχει τῶ λ, ὑπερέξει καὶ τὸ κ, τοῦ ν, καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἔλαττον, ἔλαττον· καὶ μὲν η κ, ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τῶν α δ, τὰ δὲ λ ν, τῶν γ ζ. ἄρα, καὶ τὸν ε: ὅρον τῶ αὐτῶ, ὡς τὸ α, πρὸς τὸ γ, τὸ δ, πρὸς τὸ ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 5. Fig. 30.

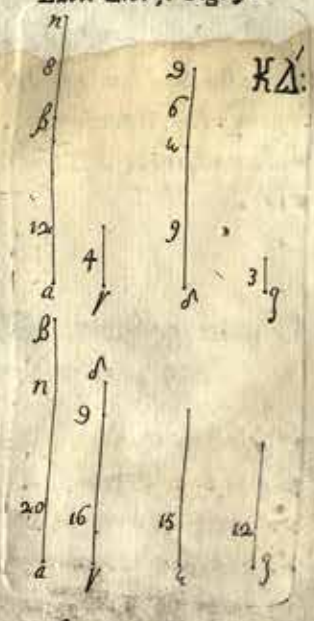


Πρό-

Πρότασις ΚΔ΄: Θεώρημα.

Ε΄αν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, ᾧ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ᾧ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Ε΄κκω γάρ ἐστι πρῶτον τὸ α β, πρὸς δεύτερον τὸ γ, ὡς τὸ δ ε, τρίτον πρὸς τέταρτον τὸ ζ. Ε΄κκω ἔτι καὶ πέμπτον τὸ β η, πρὸς δεύτερον τὸ γ, ὡς τὸ ε θ, ἕκτον πρὸς τέταρτον τὸ ζ. Λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον, ἤτοι τὸ α η, πρὸς δεύτερον τὸ γ, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ δ θ, πρὸς τέταρτον τὸ ζ. Ε΄πεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ β η, πρὸς τὸ γ, τὸ ε θ, πρὸς τὸ ζ. παλιν γε καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ γ, πρὸς τὸ β η, τὸ ζ, πρὸς τὸ ε θ, καὶ τὸ πόρισμα τῆς δ΄: τοῦ παρόντος. ὡς δὲ τὸ α β, πρὸς τὸ γ, ἔστι καὶ τὸ δ ε, πρὸς τὸ ζ. ἄρα καὶ δι΄ ἴσου ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ β η, τὸ δ ε, πρὸς τὸ ε θ, καὶ τρίτον τῶν κβ΄: τοῦ αὐτοῦ. ὥστε καὶ συντεθέντα, ὡς τὸ α η, πρὸς τὸ β η, οὕτως ἐστὶ τὸ δ θ, πρὸς τὸ ε θ, κατὰ τρίτον ιη΄: ἀλλ΄ ὡς τὸ β η, πρὸς τὸ γ, ἔστι καὶ τὸ ε θ, πρὸς τὸ ζ, ἄρα καὶ δι΄ ἴσου, καὶ τρίτον τῶν κβ΄: ὡς τὸ α η, πρὸς τὸ γ, τὸ δ θ, πρὸς τὸ ζ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 5. Fig. 31.

Πρότασις ΚΕ΄: Θεώρημα.

Ε΄αν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τῶν λοιπῶν δύο, μείζονά ἐστι.

Τέσσαρα γὰρ δὴ μεγέθη τὰ α β, γ δ, ε, ζ, ἔστωσαν ἀνάλογον, ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ, οὕτω τὸ ε, πρὸς τὸ ζ. καὶ ἔστω μέγιστον μὲν ἔστω τὸ α β, ἐλάχιστον δὲ τὸ ζ. Λέγω τὰ α β, ζ, μείζονα εἶναι τῶν γ δ, ε. γεγονέτω γὰρ ἴσον τῷ ε, τὸ α η, καὶ τῷ ζ, τὸ γ θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ, οὕτω τὸ ε, πρὸς τὸ ζ, καὶ τοῖς ε, ζ, ἴσα εἴληπται τὰ α η, γ θ, παλιν γε καὶ ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ, οὕτως ἐστὶ καὶ τὸ α η, πρὸς τὸ γ θ. καὶ ἐπομένως, καὶ τρίτον τῶν ιθ΄: τοῦ παρόντος, ὡς τὸ α β, πρὸς τὸ γ δ, τὸ η β, πρὸς τὸ θ δ. τὸ δὲ α β, μεῖζόν ἐστι τοῦ γ δ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ η β, τοῦ θ δ. ἀλλὰ τὸ μὲν α η, ἴσόν ἐστι τῷ ε, τὸ δὲ γ θ, τῷ ζ. ἄρα τὰ α η, ζ, ἴσα ἐστὶ τοῖς γ θ, ε. ἐαν δὲ ἴσοις ἄνισα προστεθῇ τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα, προστεθέντα ἄρα τοῖς μὲν α η, ζ, τοῦ η β, δὲ τοῖς γ θ, ε, τοῦ θ δ. δῆλον, ὅτι τὰ α β, ζ, μείζονά ἐστι τῶν γ δ, ε. Ε΄ὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τι ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ Πέμπτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ

ΤΟΥ ΕΚΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

ΠΑραβαλὼν Εὐκλ: ἐν τῷ προτέρῳ αὐτῦ βιβλίῳ, πέμπτῳ ὄντι τῇ τάξει, πρὸς ἄλληλα τὰ μεγέθη, καὶ τὰς ἐν αὐτοῖς χέσεις τε καὶ ἀναλογίας ἀναπτύξας, καθ' ὅσον εἰς Στοιχείων λόγον, καὶ τὰ ἐν ἐκείνῳ συμβάλλουσι προβλήματά τε καὶ θεωρήματα, ἐπὶ τῦ παρόντος Ε'κτου τὰ διάφορα τῶν σχημάτων εἴδη πρὸς ἑαυτὰ νῦν παραβάλλει, ἐκ τῆς τῶν σχημάτων χέσεως τὸν λόγον σωιάγων, ὃν αἱ αὐτῶν πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας ἔχυσι παραβαλλόμεναι, καὶ ἀνάπαλιν. τὸν φυσικώτατα ἅμα καὶ διδασκαλικώτατα κἀπαῦθα πρῶτα τάξιν. τὰς Ὅρους τῶν ἐν αὐτῇ προτάττει Προτάσεων. ἁπλούστεροι γὰρ οἱ ὅροι, καὶ δι' αὐτῶν ῥᾷον μανθάνει ὁ διδασκόμενος. Τέτα Ὅροι μέν εἰσι πέντε. Προτάσεις δὲ τεσσαρακαπὰ πρὸς ταῖς τεσσίν.

Ὅρος Πρῶτος.

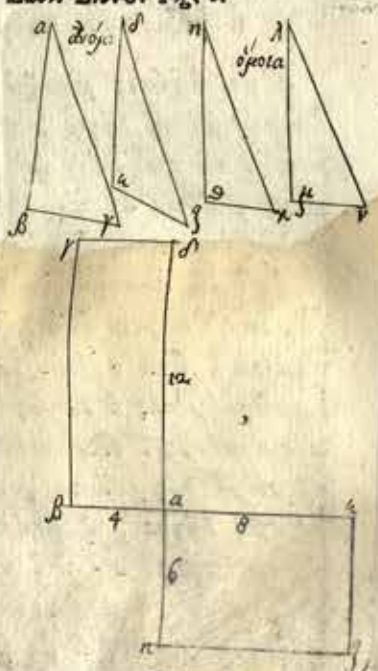
Ὅμοια σχήματα εὐθυγράμμα ἐστὶν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει καπὰ μίαν ἴσας, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

Καθάπερ δὴ τῦ Ποσῦ δύο αἱ γενικώταται διαιρέσεις, ὡς ἐν τοῖς περὶ τῦ θεωρητικῦ μέρους τῆς Ἀριθμητικῆς εἴρηται, Ἴσότης δηλ: καὶ Ἀνισότης, ἔτω δὴ καὶ τῶν γε Ποιότητος δύο εἰσὶν αἱ γενικώταται διαφοραὶ, Ὁμοιότης καὶ Ἀνομοιότης. καὶ ὥσπερ ἐκείνων ἡ μὲν, ὡρισμένη, ἡ Ἴσότης φημὶ, καὶ μονοειδὴς ἐν ἀδιαιρέτῳ σωιεσκηῦα, ἡ δὲ, ἀόριστός τε καὶ πολυειδὴς, ὡς εἰς πολλὰ καὶ ποικίλα τεμνομένη εἴδη. ἔτω καὶ τάτων, ἡ Ὁμοιότης μὲν ὡρισμένη τέ ἐστι καὶ μονοειδὴς, ἡ δ' ἐναντία ταύτῃ ἀόριστός τε καὶ πολυειδὴς. διὸ δὴ καὶ Εὐκλ: τίνα τὰ Ὅμοια μόνον ἐπὶ τῦ παρόντος παραδίδωσι σχήματα. τάτων γὰρ ἔξεσι καὶ κοινόν τινα ἀποδοῦναι λόγον, ἡ γοῦν ὑπογραφήν. Τὸ μὲν οὖν, Σχήματα, γένους χώραν ἀναπληροῖ, τὰ δὲ λοιπά, διαφορῶν. καὶ τὸ μὲν, Εὐθύγραμμα, εἰς διαφορὰν τῶν Λογικῶν καὶ Ῥητορικῶν εἰλήφθαι σχημάτων, καὶ πολλῷ μᾶλλον τῶν στερεῶν. τὸ δὲ τὰς γωνίας καὶ τὰ λοιπὰ, εἰς ἀντιδιαστολὴν τῶν ἀγωνίων σχημάτων, κύκλου, ἐλλείψεως, καὶ τῶν ὁμοίων. ὅσα τοίνυν τῶν γωνιωδῶν εὐθυγράμμων σχημάτων τὰς τε γωνίας ἴσας ἔχει, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἐκεῖνα Ὅμοιά εἰσί τε καὶ λέγεται.

ἔρηκε

εἴρηκε δὲ καὶ μίαν γωνίαν, ἵνα μή τις νομίσῃ πάσας ὁμοῦ τὰς τοῦ ἑνὸς σχήματος γωνίας πάσαις ὁμοῦ ταῖς τοῦ ἑτέρου παραβάλλειν. ὅπω γὰρ αἱ παντὸς εἴδους σχήματος αἱ γωνίαι, ἴσαί εἰσι ταῖς τοῦ αὐτοῦ εἴδους, αἱ τοῦ τριπλεύρου, φημὶ εἰπεῖν, ταῖς τοῦ τριπλεύρου, καὶ αἱ τοῦ τετραπλεύρου ταῖς τοῦ τετραπλεύρου, καὶ αἱ ἄλλου τινὸς εἴδους τῶν πολυγώνων ταῖς τοῦ αὐτοῦ. Τὸ δὲ πὰς περὶ πὰς ἴσας γωνίας προσετέθη, ὅτι γε ἐπὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων ταῖς τοῦ ἑνὸς πάσαις πλευραῖς πρὸς ἀλλήλας παραβαλλομέναις, οἱ αὐτοὶ ὑπάρχουσι λόγοι, οἵπερ καὶ ταῖς τοῦ ἑτέρου, ὡς ἐν τῷ δ': τοῦ παρόντος προτάσει δειχθήσεται. ἐπὶ δὲ τῶν ἀνομοίων δύο μέν τινάς ἐστιν εὑρεῖν τῶν τοῦ ἑνὸς σχήματος πλευρῶν τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον δυσὶ ταῖς τοῦ ἑτέρου, ἁπλῶς δὲ οὐ πὰς λοιπάς. τῶν γὰρ αβγ, δεζ, ἀνομοίων σχημάτων αἱ αβ, βγ, καὶ δε, εζ, ἀνάλογόν εἰσι, διπλῆ γὰρ ἔστε αβ, τῆς βγ, καὶ ἡ δε, τῆς εζ, οὐχὶ δὲ καὶ αἱ λοιπαί.

Eucl. Lib. 6. Fig. 1.



Β': Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.

Ὑπογράψας ἐν τῷ ἀνωτέρω τὰ Ὅμοια τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, ἐπεὶ καί τισι τῶν ἀνομοίων δείκνυται πώς οἱ αὐτοὶ λόγοι, βουλόμενος καὶ ταῦτα κοινῷ περιλαβεῖν ὀνόματι, Ἀντιπεπονθότα τὰ τοιαῦτα καλεῖ σχήματα, ἐκ τῆς ἀντιπαθείας τῆς τῶν πλευρῶν τῶν αὐτῶν σχημάτων σχέσεως, τῷ παρωνυμίαν ἐρανιζόμενος. Ἔστι δὲ Ἀντιπάθεια τῆς τῶν πλευρῶν τῶν σχημάτων σχέσεως, ὅτε τῆς μιᾶς τῶν περὶ τὼ αὐτὼ γωνίαν πλευρῶν τοῦ ἑνὸς σχήματος πρὸς τὼ τοῦ ἑτέρου αὐτὶ ἡγουμένης εἰλημμένης, ἡ ἑτέρα τοῦ αὐτοῦ, ἐν τῇ πρὸς ἀλλήλας αὐτῶν παραβολῇ, αὐτὶ ἑπομένου λαμβάνεται. ὡς δῆλον ἐπὶ τῶν αβγδ, αεζη, σχημάτων γίνεται. ὡς γὰρ ἡ βα, πρὸς τὼ αε, ἔστι καὶ ἡ να, πρὸς τὼ αδ, ἴδοι δή, ἐπὶ μὲν τοῦ αγ, σχήματος τῆς βα, πλευρᾶς, πρὸς τὴν τοῦ ἑτέρου αε, πλευρὰν αὐτὶ ἡγουμένης ληφθείσης, ἡ ἑτέρα τοῦ αὐτοῦ πλευρά, ἤτοι ἡ αδ, πρὸς τὼ αη, πλευρὰν τοῦ αζ, σχήματος παραβαλλομένη, ὡς ἑπόμενον λαμβάνεται. Ἐπὶ δὲ τοῦ αζ, εἰλημμένης τῆς να, αὐτοῦ πλευρᾶς πρὸς τὴν αδ, τοῦ ἑτέρου σχήματος πλευρὰν αὐτὶ ἡγουμένου, ἡ ἑτέρα τοῦ αὐτοῦ πλευρὰ αε, ὡς ἑπόμενον πρὸς τὼ τοῦ ἑτέρου σχήματος πλευρὰν αβ, λαμβάνεται. καὶ τοῦτό ἐστιν, ὅπερ Εὐκλείδης φησὶν, ὅταν δηλ: ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν. ὡσανεὶ ἔλεγεν, Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήμα-

τά

τί ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν χωρίων, ἡμισυ τῶν περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν πλευρῶν πρὸς τὴν τῆ ἑτέρᾳ, ὡς ἡγούμενον λαμβάνηται, ἢ δὲ, ὡς ἑπόμενον.

Ἐπισάσεως μέντοι ἄξιον, ὅτι ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων χωρίων, ὥσπερ καὶ τῶν στερεῶν, μὴ μόνον ὁμοιότης, ἢ ἀνομοιότης κατηγορεῖσθαι δύναται, ὡς ὑπὸ τὸ πέμπτον τῆς Ποιότητος ὑπαγομένων εἴδος, ἀλλ' ἔτι καὶ ἰσότης, ἢ ἀνισότης, ὡς διασαφῶν. Οὐείσας οὖν Εὐκλείδης ἐν τῇ α: ὅρῳ τὰ Ὅμοια, ἐν τῇ β: καὶ τὰ Ἴσα περιείληφε. τὰ γὰρ Ἀντιπεπονθότα χωρία, ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ὡς διαχθήσεται προτάσει ιδ: τῆς παρόντος.

Γ: Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ἡ, ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτω τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

Ἐπεὶ ἡ χέσις μεταξὺ δύο θεωρεμένη ὅρων ἀδιαίρετος μὲν τῇ ὑποκειμένῳ ἐστὶ, διαιρετὴ δὲ τῇ λόγῳ, παρὰ τῶν ὅρων λαμβάνουσα καὶ τὰς διαφοράς, (ἡ γὰρ μεταξὺ τῶν παχῶν καὶ ὑγρῶν χέσις, μία ἔσα, παχύτης μὲν παρὰ τὸ παχὺ λέγεται, ὑγρότης δὲ παρὰ τὸ ὑγρὸν,) διάπερ τοῦτο καὶ ὁ λόγος, ὡς ποιά τις χέσις καθ' ὃν ἐυκλ: εἰς ὧν τῇ ὑποκειμένῳ, διαιρεῖται τῇ λόγῳ εἰς εἴδη διάφορα· ὥσπερ δὲ ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω ὅρου, παρὰ μὲν τὸ ἡγούμενον, ἡγέμενος ἐλέγετο καὶ ὁ λόγος, ἑπόμενος δὲ παρὰ τὸ ἑπόμενον, οὕτω καὶνταῦθα, παρὰ μὲν τῶν ἄκρων ὅρων λαμβανόμενος ὁ λόγος, ἄκρος λέγεται, παρὰ δὲ τὸ μέσον μέσος. οἷον κείσθωσαν ὅροι τρεῖς οἱ α β γ, ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ ὄντες, ἢ μὴ· ὁ μὲν οὖν τῶν α, πρὸς τὸν β, λόγος, καὶ ἀνάπαλιν ὁ τοῦ β, πρὸς τὸν α, τοῦ γ, παρεωραμένος· ἢ ὁ τῶν α, πρὸς τὸν γ, τοῦ β, παρεωραμένος· ἢ τελευταῖον, ὁ τῶν α, καὶ γ, πρὸς τὸν β, ἄκρος λέγεται, ἢ ὡς μεταξὺ τῶν ἄκρων θεωρούμενος, ἢ ὡς ὑπὸ τῶν ἄκρων παραλαβανόμενος. ὁ δὲ τοῦ β, πρὸς ἑκάτερον τῶν α, γ, μέσος, ὡς τοῦ μέσου ἐπὶ τὰ ἄκρα ἀναφερομένου. παρονομάζεται δὲ ἡ χέσις, ἀφ' ἧς καὶ παραλαμβάνεται ὅρου. καὶ γὰρ ἡ παχύτης ἀπὸ τοῦ παχὺς τοῦ τε παραγωγοῦ, καὶ παρονομασίαν ἔλαχεν. ὅταν οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ οὕτως, ὥστε ὃν ἔχει λόγον ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἔχειν καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμῆσθαι λέγεται. ἡ ὅλη γὰρ καὶ τὸ ἔλαττον αὐτῆς τμῆμα, ἐν τῇ ἀναλογίᾳ ἄκρων χώραν ἀναπληροῦσι, μέσον δὲ τὸ μεῖζον. ὁ τοίνυν τῆς ὅλης λόγος πρὸς τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἄκρος λέγεται, καθ' ὃ εἰρημένα, ὁ δὲ τοῦ μείζονος πρὸ τὸ ἔλαττον, μέσος. τίς δὲ ὁ τρόπος τῆς τοιαύτης διαιρέσεως, ἐρήσομεν ἐν τῇ λ: τοῦ παρόντος.

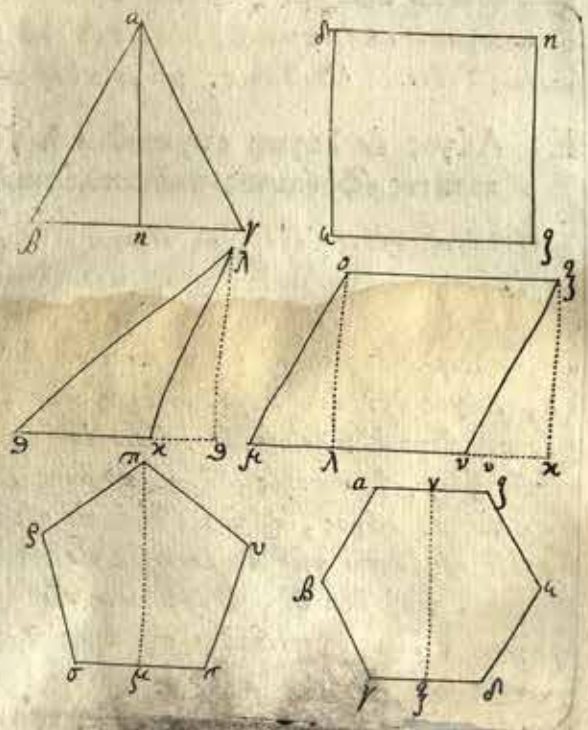
Eucl. Lib. 6. Fig. 2.

Δ: Τ"ψος

Δ΄. Υ΄ψος ἐστὶ παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

Τριῶν δοθέντων τῶν διαστάσεων, μήκους δηλ. πλάτους, καὶ βάθους, ὃ καὶ ὕψος λέγεται, τὰ μὲν στερεὰ τῶν σχημάτων καὶ τῶν ἴσων τάπων δίμοιρεῖ διαστάσεων, τὰ δὲ ἐπίπεδα τὰς δύο μόνας κεκλήρωται, μήκος φημὶ καὶ πλάτος. καὶ τὴν θέσιν μέσοι δίδοταί πως καὶ τοῖς ἐπιπέδοις ὕψος. ἐπεὶ καὶ βάσεις αὐτῶν, καὶ κορυφὰς ὀνομάζομεν. τὸ μὲν γὰρ αβγ, τριγώνου, ἡ μὲν βγ, πλευρὰ, βάσις λέγεται, ἡ δὲ πρὸς τὸ α, γωνία, κορυφή. τὸ δὲ δεζη, τετραπλεύρου, ἐπεὶ ἡ εζ, πλευρὰ βάσις καλεῖται, καὶ δη, παντως γε, κορυφὴ λέγεται. ἐπεὶ δὲ καὶ τῶν ἐπιπέδων σχημάτων, τὰ μὲν ὀρθιά ἐστι τὴν θέσιν, ὡς τὰ αβγ, δεζη. τὰ δὲ πλάγια, ὡς τὰ θκλ, μνξο. ὅθεν ἐκεῖνα μὲν ὀρθὰ, ταῦτα δὲ πλάγια λέγεται. ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς παντὸς σχήματος κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως, ἡ κάθετος αὕτη ὕψος τοῦ σχήματος λέγεται. Εἰσὶ δὲ τῶν μὲν τριγώνων ὀρθὰ, τά τε ἰσόπλευρα καὶ ἰσοσκελῆ, ἔτι δὲ καὶ τὰ ὀρθογώνια. τῶν δὲ τετραπλεύρων, ὅσα ἑκατέραν τῶν πλευρῶν, τῶν καὶ τὰ πλάγια αὐτῶν μέρη πρὸς ὀρθὰς κειμένην ἐπὶ τῆς βάσεως ἔχουσι, ταῦτόν ἐστιν εἰπεῖν, τὰ ὀρθογώνια. τῶν δὲ πολυπλεύρων, ὅσα κανονικὰ, τὰ ἰσόπλευρά φημι καὶ ἰσογώνια. τάπων δὲ τὰ μὲν περιττόπλευρα τὴν ἀντικειμένην τῆς βάσεως αὐτῶν γωνίαν κορυφὴν ἔχουσι, τὰ δὲ ἀρτιόπλευρα τὴν ἀπεναντίον τῆς αὐτῶν βάσεως πλευράν. οἷον τὸ μὲν πρστυ, κορυφὴ ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ π. ἐπεὶ ἡ στ, βάσις τοῦ αὐτοῦ ἐστι, τὸ δὲ αβγδεζ, κορυφὴ ἡ αζ, πλευρά. ἐπεὶ ἡ γδ, ἀντὶ βάσεως λαμβάνεται. ὅταν οὖν ἀπὸ τῆς καθ' κορυφὴν γωνίας, ἡ πλευρᾶς ἐπὶ τῆς βάσεως τοῦ σχήματος κάθετος ἀχθῇ, ὡς αἱ πμ, νξ, ἐπὶ τῶν πρστυ, αβγδεζ, σχημάτων, ἡ κάθετος αὕτη ὕψος τοῦ σχήματος λέγεται. τὸ μὲν αβγ, τριγώνου ὕψος ἐστὶν ἡ αη. τοῦ δὲ δεζη, ἑκατέρα τῶν δε, ηζ. τοῦ δὲ θκλ, ἡ λθ. τοῦ δὲ μνξο, ἥτε ξκ, καὶ ολ. τοῦ δὲ πρστυ, ἡ πμ. καὶ τοῦ αβγδεζ, ἡ νξ. ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

Eucl. lib. 6. Fig. 3.



Ἰστέον δ' ὅτι ἐπὶ παντὸς μὲν χήματος ὀρθῆ ἡ κάθετος ἀεὶ ἐντὸς πίπτει, ἐπὶ δὲ τῶν πλαγίων ἐκτὸς, ἐκβαλλομένης τῆς αὐτῶν βάσεως καὶ τὸ συνεχὲς. τῆ μὲν γὰρ αβγ, ὀρθῆ ὄντος, ἐντὸς ἡ αη, κάθετος πίπτει, τῆ δηκλ, δὲ πλαγίᾳ ὄντος, ἐκτὸς, ὡς ἡ λθ, τῆς δκ, βάσεως ἐπὶ τὸ θ, ἐκβαλλομένης.

Α'ΠΟΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.

*Σημείωσαι, ὅτι πάντες οἱ παραλαμβανόμενοι ἐπὶ τὰ ἑπόμενα πέμπτου ὅρε χαρακτῆρες τῆ Α'λφαβήτε, ὡς παρεξετικοὶ τῶν ἐν αὐτῷ Α'ναλογιῶν, ἐκλαμβάνονται καὶ σημασίαν ἀριθμῶν, καὶ τῶν Α'ποσημείωσιν, τῶν ἐν τῷ τέλει τῆ προοιμίε τῆ προηγεμένε πέμπτου Βιβλίε. καθ' ὧ καί τινες ἐνταυθὶ παρασημειῦνται τοῖς κοινοῖς Ι'νδικοῖς Α'ριθμοῖς, χάριν πληρεστέρας γνώσεως.

Ε': Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιαθεῖσαι ποιῶσί τινα.

Ο' λόγος σχέσις ἐστὶν, ὡς εἴρηται, ἐν δυσὶν ὅροις θεωρεμένη· καὶ μὲν οἱ ὅροι ἐκεῖνοι μεγέθη εἰσὶ, τὸ καὶ πηλικότητα ἐν τῇ τότε ὑπογραφῇ ἀντὶ διαφορᾶς προσλαμβάνεται. εἰ δὲ γ' ἀριθμοὶ, τὸ καὶ ποσότητα· ὡς ἐν ἄλλοις εἴρηται· διὸ καὶ Εὐκλείδης ἐν τῇ γ': τῆ προτέρᾳ βιβλίῳ ὅρῳ ὑπογράφων τὸν λόγον, φησὶ, Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν, ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. ὅταν δὲ πλείονες ὅροι ὦσιν ἐφεξῆς κείμενοι, δὸς εἰπεῖν ἓξεῖς, ἢ τέσσαρες, ἢ καὶ πλείους, ὁ τῆ α': ὅρου πρὸς τὸν β': λόγος, καὶ τῆ β': πρὸς τὸν γ': καὶ τῆ γ': πρὸς τὸν δ': καὶ ἑκάστε τῶν ἄλλων πρὸς τὸν ἐφεξῆς, ἁπλοῦς λέγεται. παρ' ἕνα δὲ, ἢ καὶ πλείω τῶν ὅρων παραβαλλομένων, ὁ λόγος πηνικαῦτα σωθεὶς λέγεται· τοιοῦτος δ' ἐστὶν ὁ τῆ α': ὅρου λόγος πρὸς τὸν γ': ἢ δ': ἢ ἄλλον τινὰ τῶν ἐφεξῆς. σύγκειται γὰρ ἐκ τῶν μεταξὺ λόγων. ἐὰν κείσθωσαν μεγέθη τρία τὰ α, β, γ, ἑξῆς ὅπερ ἀνάλογα ἐν λόγῳ διπλασίονι· ὁ τοίνυν λόγος τῆ α, πρὸς μὲν τὸ β, ἁπλῶς λέγεται, πρὸς δὲ τὸ γ, σωθεὶς, ὅτι σύγκειται ἐκ τῆ λόγε τῆ τε α, πρὸς τὸ β, καὶ τῆ β, πρὸς τὸ γ· διὸ δὴ καὶ Εὐκλείδης ὑπογράψαι τῶν βελόμενος, φησὶ, Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιαθεῖσαι ποιῶσί τινα. Ι'να δὲ τῦτο σαφέστερον γένηται, ῥητέον ἡμῖν, τίνες αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, καὶ ὅπως ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιάζεσθαι δύνανται.

Eucl. Lib. 6. Fig. 4.

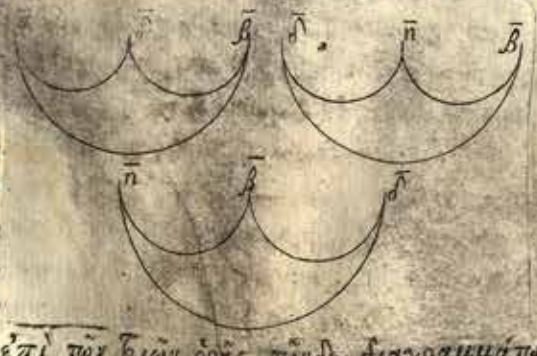
Λόγων τοίνυν πηλικότητές εἰσιν, οἱ παρωνυμοῦντες ἀριθμοὶ, ἀφ' ὧν οἱ λόγοι παρονομάζονται. Ε'πεὶ δὲ τὰ τῆ Λόγε εἴδη πολλά τέ εἰσι, καὶ διάφορα, ὡς ἐν τῇ β': τῆς Α'ριθμητικῆς μέρει τῇ βελομένῳ ἔξεστιν ἰδεῖν· διάτοι τῦτο καὶ ἕκαστον Λόγου εἶδος ἰδίῳ τινὶ παρονομάζεται ἀριθμῷ. ὁμοῦ γὰρ τῆ διπλασίε λόγος τὸν β (2) μόνον ἔχει παρωνυμοῦντα αὐτὸν, ὁ δὲ τῆ τριπλασίε τὸν γ (3)

ὁ δὲ

ὁ δὲ τῆ τετραπλασίᾳ τὸν δ (4)· καὶ τῶν ἄλλων τῆ πολλαπλασίᾳ εἰδῶν ἕκαστον ἀφ' ἑνός τινος τῆ ἀναλογουῦσης αὐτῳ παρωνυμεῖται ἀριθμῆ. τῶν δ' ἄλλων εἰδῶν ἕκαστον ἀπότε ἀριθμῆ ὁλοκλήρᾳ, καὶ μέρος τινὸς πλέκει δέχεται τιμὴ παρονομασίαν. ὁ μὲν γὰρ τῆ ἡμιολίᾳ λόγος ἀπὸ τῆ ἑνὸς καὶ ἡμίσεως παρονομάζεται, ὁ δὲ τῆ ἐπιτρίτου ἀπὸ τῆ ἑνὸς καὶ γ΄ μέρος, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῆ ἐπιμοριῖ εἰδῶν ἀναλόγως. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῆ ἐπιμερῆς, πολλαπλασιεπιμοριῖπε, καὶ πολλαπλασιεπιμερῆς.

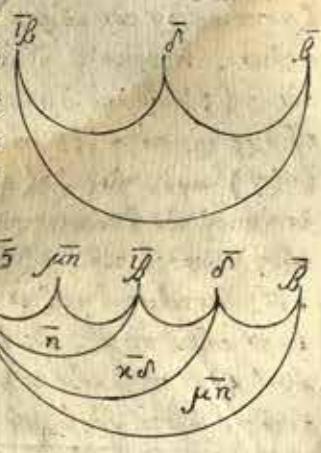
Ε΄στι δὲ Λόγος, ὡς ἐν ἄλλοις εἴρηται, πολλαπλάσιος μὲν, ὅτε ὁμείζων ὅρος ἔχῃ ἐν ἑαυτῳ τὸν ἐλάττονα πλειανάκις, ἢ ἄπαξ. ὡς ὁ τῆ δ (4) πρὸς τὸν β (2) καὶ ὁ τῆ θ (9) πρὸς τὸν γ (3) καὶ οἱ ἄλλοι. ἐπιμόριος δὲ, ὅτε ὁμείζων περιέχῃ τὸν ἐλάττονα ἐν ἑαυτῳ ἅπαξ, καὶ σῦτι μέρος αὐτῆ, δύοσον δηλον· τρίτον, τέταρτον, ἢ ἄλλοτι πλέκον, ὡς ὁ γ (3) τὸν β (2) καὶ ὁ δ (4) τὸν γ (3) καὶ οἱ ὅμοιοι. ἐπιμερὴς δὲ, ὅτε ὁμείζων ἅπαξ τὸν ἐλάττω ἐν ἑαυτῳ ἔχῃ καὶ μέρη ἔτι τῆ αὐτῆ τινα, ὡς ὁ τῆ ε (5) πρὸς τὸν γ (3) καὶ τῆ ζ (7) πρὸς τὸν δ (4). πολλαπλασιεπιμόριος δὲ, ὅτε ὁ μείζων ὅρος ἔχῃ ἐν ἑαυτῳ τὸν ἐλάττω πλειανάκις, ἢ ἅπαξ, καί τι μέρος αὐτῆ πλέκον, ὡς ὁ τῆ ε (5) πρὸς τὸν β (2) τῆ ζ, (7) πρὸς τὸν γ, (3). πολλαπλασιεπιμερὴς δὲ, ἐπειδὰν ὁμείζων ὅρος πλειανάκις, ἢ ἅπαξ ἐν ἑαυτῳ τὸν ἐλάττω ἔχῃ, καὶ μέρη αὐτῆ τινα, ὡς ὁ τῆ ιη, (18) πρὸς τὸν γ (3) καὶ ὁ τῆ ια, (11) πρὸς τὸν δ, (4). περὶ ὧν πλατύτερον ἐν τῳ ῥηθέντι διηρμήνδυται βιβλίῳ τῆς Ἀριθμητικῆς. ὅθεν δὴ ὁ μὲν β, (2) πλικότης λέγεται τῆ διπλασίᾳ, ὁ δὲ γ, (3) τῆ τριπλασίου. ὁ δὲ δ, (4) τῆ τετραπλασίᾳ, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁ αὐαλόγως. ἡ δὲ μονὰς μετὰ τῆ ἡμίσεως πλικότης λέγεται τῆ ἡμιολίᾳ. ὁ γὰρ ἡμιόλιος ἔχει ἐν ἑαυτῳ ὅλον τὸν ἐλάττονα, καὶ ἥμισυ αὐτῆ μέρος, ὡς εἴρηται· μετὰ δὲ τῆ ἑνὸς τρίτου ἡ μονὰς, πλικότης λέγεται τῆ ἐπιτρίτου. μετὰ δὲ τῶν δύο τρίτων, τῆ ἐπιδιμερῆς, ὥσπερ καὶ μετὰ τριῶν τρίτων, τῆ ἐπιτριμερῆς. ὁ β, (2) δὲ πάλιν μετὰ ἡμίσεως μὲν, πλικότης λέγεται τῆ διπλασιεφημίσεως, οἷος ὁ τῆ ε, (5) πρὸς τὸν β, (2) μετὰ δὲ δύο τρίτων τῆ διπλασιεπιδιμερῆς, οἷος ο τῆ ιη, (18) πρὸς τὸν γ, (3). καὶ τοσαῦτα μὲν ἱκανὰ ἐπὶ τῆ παράντος εἰς ἀνάπτυξιν τῆ, τίνες εἰσὶν αἱ τῶν λόγων πλικότητες. Πολλαπλασιάζονται δὲ αὐταὶ ἐφ' ἑαυτὰς, καὶ τιμὴ τῶν ὅρων πέξιν. τριχῶς γὰρ οἱ ὅροι ποικίλεσθαι δυνάνται. ἢ γὰρ δύπακτοι κεῖνται, ἢ ὁ μείζων ἴσαι μέσος, ἢ γοιῦ ὁ ἐλάττων, ὡς ἐπὶ τῶν τριῶν ὁρᾶς τῶνδε διαγραμμάτων. κἂν μὲν οἱ ὅροι δύπακτοι ὦσι, λάβε τὰς ἀριθμὰς, ἀφ' ὧν οἱ ὅροι τῶν λόγων

Eucl. Lib. 6. Fig. 5.



παρονομάζονται, ὁ τοῦ α: δηλον: ὅρου πρὸς τὸν μέσον, καὶ ὁ τοῦ μέσου πρὸς τὸν γ: καὶ πολλαπλασίασον τὸν ἑφ' ἑαυτὸν, καὶ ὁ γενόμενος παρασήσει σοι τὸν λόγον, ὃν ὁ α: ὅρος πρὸς τὸν γ: ἔχει. οἷον κείσθωσαν ἐφεξῆς ὑπάκτως ὁ η, δ, καὶ β, ὡς ἐπὶ τοῦ α: διαγράμματος. καὶ ἐπεὶ ὁ η, τοῦ δ, διπλάσιός ἐστιν, τοῦ δὲ διπλασίου πηλικότης ὁ β, ὡς ἤδη εἴρηται· εἰλήφθω ὁ β, ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ δ, τοῦ β, ὁμοίως διπλάσιός ἐστιν, εἰλήφθω αὖθις ὁ αὐτὸς β, καὶ πολλαπλασιαθήτω ἐφ' ἑαυτὸν, καὶ γενήσεται παντὸς ὁ δ, ὅστις πηλικότης ἐστὶ τοῦ λόγου, ὃν ὁ η, ἔχει πρὸς τὸν β· δῆλον ἄρα ὅτι ὁ η, τετραπλάσιός ἐστι τοῦ β. κείσθωσαν ἔτι ὁ ι β, δ, καὶ β· καὶ ἐπεὶ ὁ ι β, ἑπτάπλάσιός ἐστι τοῦ δ, ὁ δὲ δ, τοῦ β, διπλάσιος· εἰλήφθω αὐτὶ τοῦ ἑπτάπλασίου μὲν ὁ γ, αὐτὶ δὲ τοῦ διπλασίου ὁ β, καὶ πολλαπλασιαθήτωσαν ἐφ' ἑαυτούς, καὶ ὁ γενόμενος ς, παρασατικὸς ἔσαι τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ ι β, πρὸς τὸν β· ὥστε ὁ ι β, τοῦ β, ἑξαπλάσιός ἐστι. τοῦτ' αὐτὸ γενέσθω καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τοῦ πολλαπλασίου εἰδῶν, τετραπλασίου, πενταπλασίου, ἑξαπλασίου καὶ λοιπῶν. ἐὰν δὲ πλείονες ὦσιν οἱ ὅροι τῆς ἑξῆς, διπλασίου ἀρξάμενοι ἀπὸ τοῦ α: λόγος πρὸς τὸν γ: ἐφ' ὃν πολλαπλασιαθήτω ὁ παρασατικὸς τοῦ λόγου, ὃν ὁ γ: ἔχει πρὸς τὸν δ: καὶ ἀνάπαλιν, καὶ ὁ γενόμενος παρασατικὸς ἔσαι τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ α: ὅρος πρὸς τὸν τέταρτον. Εἰδέναι ζητῆται ὁ λόγος, ὃν ὁ α: τῶν ὅρων ἔχει πρὸς τὸν ε: εἰλήφθω ἡ πηλικότης τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ δ: πρὸς τὸν ε: καὶ πολλαπλασιαθήτω ἐπὶ τὸν ἤδη γεγονότα διὰ τοῦ προτέρου πολλαπλασιασμοῦ, ἢ καὶ ἀνάπαλιν. οἷον ἕστωσαν ὑπάκτως κείμενοι ὁ ι ς, μ η, ι β, δ, καὶ β· ἐπεὶ τοίνυν ὁ τοῦ ι ς. πρὸς τὸν μ η, λόγος διπλάσιός ἐστιν, ὁ δὲ τοῦ μ. πρὸς τὸν ι β, τετραπλάσιος, ὁ τοῦ ι ς, πρὸς τὸν ι β, εὑρεθήσεται, καὶ τὰ ἤδη εἰρημένα. ἐὰν ὁ β, ἐπὶ τὸν δ, πολλαπλασιαθῇ, ἢ καὶ ἀνάπαλιν ὁ δ, ἐπὶ τὸν β, καὶ ἔσαι τούτου πηλικότης ὁ η· ὥστε ὁ ι ς, τοῦ ι β, ὀκταπλάσιός ἐστιν. ἐὰν δὲ ζητηθῇ ὁ τοῦ ι ς, λόγος πρὸς τὸν δ, ἐπεὶ ὁ ι β, ἑπτάπλάσιός ἐστι τοῦ δ, εἰλήφθω ὁ γ, ἢ τοῦ αὐτοῦ λόγου δῆλον: πηλικότης, καὶ πολλαπλασιαθήτω ἐπ' αὐτὸν ὁ η, ὅσις ἐστὶ πηλικότης τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ ι ς, πρὸς τὸν ι β, καὶ ὁ γενόμενος κ δ, πηλικότης ἔσαι τοῦ λόγου, ὃν ἔχει ὁ ι ς, πρὸς τὸν δ. Εἰδέναι πάλιν ζητηθῇ ὁ τοῦ ι ς, λόγος πρὸς τὸν β, πέμπτον ὄντα τῇ τάξει· ἐπεὶ ὁ δ, διπλάσιός ἐστι τοῦ β, εἰλήφθω ἡ τούτου πηλικότης, δῆλον: ὁ β, καὶ πολλαπλασιαθήτω ἐπ' αὐτὸν ὁ κ δ, ὅσις ἐστὶ πηλικότης τοῦ λόγου, ὃν ὁ ι ς, πρὸς τὸν δ, ἔχει, καὶ ὁ γενόμενος μ η, πηλικότης ἔσαι τοῦ λόγου, ὃν ὁ ι ς, α: ἔχει πρὸς τὸν β, ε:

Euclid. Lib. 6. Fig. 6.

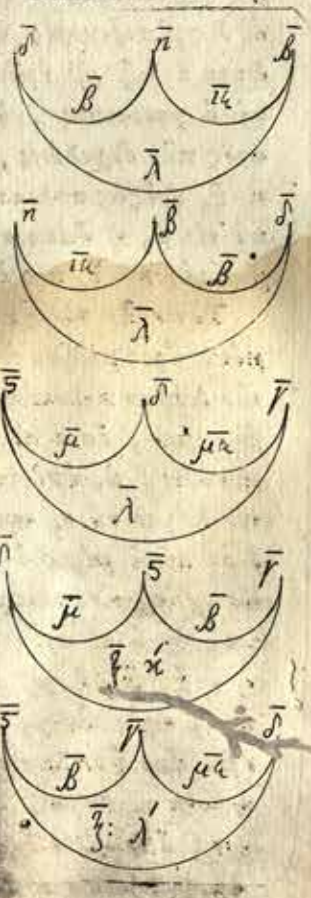


ὥστε

ὥστε ὁ γ ς, τεσσαρακοντοκτάπλασιός ἐστι τοῦ β. τοῦτον τὸν ξόπον εὑρεθήσεται καὶ ὁ τοῦ α: ὅρε λόγος πρὸς τὸν ς΄: ζ΄: η: καὶ λοιποὺς ἐν τῇ ὑπάκτῳ τῆς ὅρων τάξει.

Ὅταν δὲ οἱ ὅροι μὴ ὑπάκτως ὦσι κείμενοι, εἰμὲν ὁ μείζων μέσος ᾖ, ὡς ὁ η, τοῦ δ, καὶ β. εἰλήφθω αὐτοῦ τοῦ μείζονος λόγου, ὃν ὁ μέσος πρὸς τὸν ἐλάττονα τῆς ὅρων ἔχει, τὸ ἀπάλογον τῷ * μονάδος μέρος, δηλ: ὁ ιε, ὥσπερ γὰρ ὁ η, τέτραπλάσιός ἐστι τοῦ β, ὕπω καὶ ὁ ξ, τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ιε, αὐτὶ δὲ τοῦ ἐλάττονος, ὃν ὁ μέσος ἔχει πρὸς τὸν μείζονα τῆς ὅρων, ἤτοι τὸν δ, εἰλήφθω ἡ αὐτῆ πηλικότης, ὁ β. ἐπεὶ καὶ ὁ η, τοῦ δ, διπλάσιός ἐστι. καὶ πολλαπλασιαθήτω ὁ ιε, ἐπὶ τὸν β, καὶ ἐπεὶ ὁ γενόμενος λ, ἥμισύς ἐστι τῆς μονάδος δηλ: τοῦ ξ, φανερὸν, ὅτι καὶ ὁ β, τοῦ δ, ἡμισύς ἐστιν, ὁ δὲ δ, τοῦ β, διπλάσιος.

Eucl. Lib. 6. Fig. 7.



Τοῦτ' αὐτὸ γινέσθω, καὶ ὁ ἐλάχιστος τῆς ὅρων εἴη μέσος. ἔστω γὰρ ὁ β, μέσος τοῦ η, καὶ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ η, τοῦ β, τετραπλάσιός ἐστιν, εἰλήφθω τὸ δ΄: τοῦ ξ, δηλ: ὁ ιε: ἐπεὶ δὲ ὁ δ, τοῦ β, διπλάσιός ἐστι, λάβε τοίνυν πάντα πηλικότητα, ἤτοι τὸν β, καὶ πολλαπλασίασον ἐπ' αὐτὸν τὸν ιε, καὶ ὁ γενόμενος λ, πηλικότης ἐστὶ τοῦ η, πρὸς τὸν δ. ὥστε ὁ η, διπλάσιός ἐστι τοῦ δ,

Εἰδὲ ἐν λόγῳ ἐπιμορίου τύχωσιν ὄντες οἱ ὅροι, ξιχῶς δυνατὸν καὶ ἄπτοι ποικίλεσθαι, ὡς καὶ οἱ τοῦ πολλαπλασίου. Ἔστωσαν δὴ α: ὑπάκτως κείμενοι, ὡς ὁ ς, δ, καὶ γ. καὶ ἐπεὶ ὁ ς, τοῦ δ, ἡμιόλιός ἐστιν, ὁ δὲ δ, τοῦ γ, ἐπίτριτος, εἰλήφθω ὁ μ, καὶ με, ὁ γὰρ ξ, τοῦ μὲν μ, ἡμιόλιός ἐστιν, ἐπίτριτος δὲ τοῦ με. καὶ πολλαπλασιαθήτωσαν ἀλλήλοις, καὶ ὁ γενόμενος ἐξ αὐτῶν φω, μεριθήτω ἐπὶ τὸν ξ. καὶ ἐπεὶ παρέχεται πηλίκον ὁ λ, τοῦ δὲ λ, διπλάσιός ἐστιν ὁ ξ, δῆλον, ὅτι ὁ ς, τοῦ γ, διπλάσιός ἐστιν.

Ἔστω δὲ ὁ μέσος μείζων τῆς ἄκρων, ὡς ὁ ς, τοῦ δ, καὶ γ. καὶ ἐπεὶ ὁ ς, τοῦ μὲν δ, ἡμιόλιός ἐστι, τοῦ δὲ γ, διπλάσιος. εἰλήφθω αὐτὶ μὲν τοῦ ἡμιολίου ὁ μ, αὐτὶ δὲ τοῦ διπλασίου ὁ β, καὶ πολλαπλασιαθήτωσαν ἀλλήλοις, καὶ ὁ γινόμενος π, μεριθήτω ἐπὶ τὸν ξ. ἐπεὶ δὲ παρέχεται πηλίκον μονὰς μεθ' ἑξήκοντα κ, φανερὸν, ὅτι ὁ δ, περιέχει ἐν ἑαυτῷ ὅλον τὸν γ, ἅπαξ, καὶ ἐν αὐτοῦ γ': μέρος.

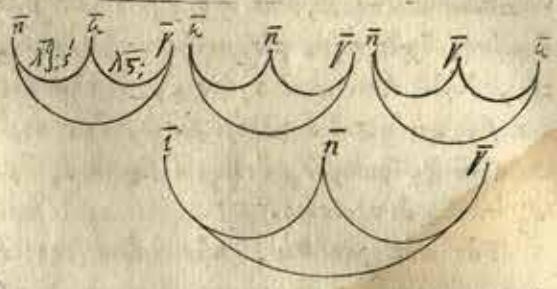
Ἔστω δ' ἔτι ὁ μέσος ἐλάττων ἑκατέρου τῶν ἄκρων, ὡς ὁ γ, τοῦ ς, καὶ δ. καὶ ἐπεὶ τοῦ γ, ὁ μὲν ς, διπλάσιός ἐστιν, ὁ δὲ δ, ἐπίτριτος, εἰλήφθω αὐτὶ μὲν τοῦ διπλασίου ὁ β, αὐτὶ δὲ τοῦ ἐπιτρίτου ὁ με, ὅτι καὶ ὁ ξ, τοῦ με, ἐπίτριτός ἐστι. τὰ δὲ

* Ἐννοεῖσθω τὴν μονάδα διαιρεῖσθαι εἰς τοὺς ἑξήκοντα.

τὰ δὲ λοιπὰ γενέσθω ὡς προγεγράφθαι, καὶ εὑρεθήσεται ὁ ς, τοῦ δ, ἡμιόλιος, παρέχεται γὰρ διὰ τῆς πράξεως πηλίκον ἡ μονὰς μετὰ ἑξήκοντα λ.

Τὰ αὐτὰ γινέσθω καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιμεροῦς. Διὰ δὲ τὸ σαφέστερον, κείσθωσαν καὶ ἐπὶ τούτοις εἰς ὑπόδειγμα οἱ η, ε, γ, ὁπωσοῦν κείμενοι. καὶ ἐπεὶ ὁ μὲν η, τοῦ ε, ἐπιτριμερής ἐστιν, ὁ δὲ ε, τοῦ γ, ἐπιδιμερής, εἰλήφθω αὐτῶν μὲν τοῦ ἐπιτριμεροῦς ὁ λζ μετὰ ἡμίσεως, αὐτῶν δὲ τοῦ ἐπιδιμεροῦς ὁ λς, ὁ γὰρ ξ, τοῦ μὲν λζ μετὰ ἡμίσεως * ἐπιτριμερής ἐστι, τοῦ δὲ λς, ἐπιδιμερής. εἶτα πολλαπλασιαθήτω ὁ λζ μετὰ ἡμίσεως ἐπὶ τὸν λς, καὶ ὁ γενόμενος, ἤτοι τὰ ἐπτακόσια πρὸς τοῖς δισχιλίοις, μεριθήτωσαν ἐπὶ τὸν ξ, καὶ ἕξεις πηλίκον τὸν με. ἐπεὶ δὲ παῦτα * δισσά εἰσι, μεριθήτω ὁ με, ἐπὶ τὸν β, καὶ δώσει σοι πηλίκον τὸν κβ μετὰ ἡμίσεως, ὃ ὁ ἑξήκοντα διπλασιεπιμερής ἐστιν. ἔχει γὰρ ἐν ἑαυτῷ τοῦτον δὶς, καὶ δύο αὐτοῦ μέρη εἰς ἴσα διηρημένα.

Euclid. Lib. 6. Fig. 8.



Τοῦτον δὲ τὸν τρόπον εὑρεθήσεται ὁ Λόγων συγκείμενος, καὶ ὁ μέσος ὅρος μείζων εἴη τῶν ἄκρων, ἢ γοῦν ἐλάττων. (*) Διωάμεθα δὲ θηρεύειν τὰς τῶν Λόγων πηλικότητας, καὶ τὸν ξ, ἐπὶ τὸν μείζονα διαιροῦντες ὅρον, τοσαῦτα λαμβάνωμεν, ὅσαι αἱ τοῦ ἐλάττονος, πρὸς ὃν ὁ μείζων ἀναφέρεται ὅρος, εἰσὶν αἱ μονάδες, ὡς ἐπὶ τοῦ συνάγγυος δῆλον καθίσαται ὑποδείγματος. ζητοῦντες γὰρ τὸν λόγον τοῦ η, πρὸς τὸν ε, διαιροῦμεν τὸν ξ, ἐπὶ τὸν η, καὶ ἐπεὶ παρέχεται ἄγδοον αὐτοῦ μέρος ὁ ζ μετὰ ἡμίσεως, πολλαπλασιάζομεν τὸν ζ μετὰ ἡμίσεως ἐπὶ τὸν ε, καὶ τὸν γενόμενον λζ μετὰ ἡμίσεως λαμβάνομεν αὐτῶν πηλικότητος τοῦ λόγου, ὃν ὁ η, πρὸς τὸν ε, ἔχει. ὥσπερ γὰρ ὁ η, τοῦ ε, ἐπιτριμερής ἐστιν, οὕτω καὶ ὁ ξ, τοῦ λζ μετὰ ἡμίσεως, ἐπιτριμερής ἐστι. ζητοῦντες δ' αὖθις τὴν πηλικότητα τοῦ, πρὸς τὸν γ, διαιροῦμεν τὸν ξ, ἐπὶ τὸν ε, καὶ παρέχεται ἡμῖν πηλίκον ὁ ιβ. εἶτα ξιπλασιάζομεν τὸν ιβ, καὶ τὸν γενόμενον λς, λαμβάνομεν αὐτῶν πηλικότητος τοῦ λόγου, ὃν ὁ ε, ἔχει πρὸς τὸν γ. ὥσπερ γὰρ ὁ ε, τοῦ γ, ἐπιδιμερής ἐστιν, οὕτω καὶ ὁ ξ, τοῦ λς, ἐπιδιμερὴς ὁμοίως ἐστί. Τὰ δὲ λοιπὰ ποιοῦμεν, ὡς προγεγράφθαι. καλῶς ἄρα εἴρηται, ὅτι Λόγος ἐκ Λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα.

* Ὅρα κατωτέρω, ἔνθα τὸ παρὸν σημεῖον (*) καὶ εὑρήσεις τὴν αὐάπτυξιν τοῦ, καθ' ὃν, ξόπτε ὁ ἑξήκοντα τοῦ λζ μετὰ ἡμίσεως, ἐστὶν Ἐπίξιπος.

* Ἐννοητέον ἑκάστην μονάδα τοῦ λζ, εἰς δύο διηρημένην, ἵνα τοῖς αὐτοῖς ἄδυς χρώνται μετὰ τοῦ προσόντος ἡμίσεως, ὥστε τὰ παῦτα γίνεσθαι ἑβδομήκοντα καὶ πέντε ἡμίσεα, ἅτινα πολλαπλασιαστέα ἐπὶ τὸν λς, ποιεῖ παῦτα, 2700.

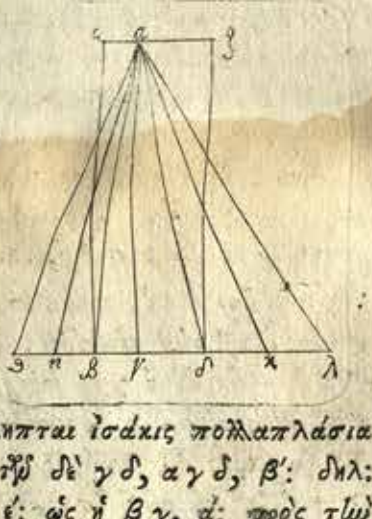
Πρό-

Πρότασις Α΄: Θεώρημα.

Τὰ ῥίγωμα, καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ τοῦ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστωσαν δὴ ῥίγωνα μὲν τὰ αβγ, αγδ· παραλληλόγραμμα δὲ τὰ γε, γζ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ βγ, βάσις πρὸς τὴν γδ, ἔστι τὸ, τε αβγ, ῥίγωνον πρὸς τὸ αγδ, καὶ τὸ γε, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γζ. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ βδ, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὸ συνεχές. καὶ εἰλήφθω τῇ μὲν βγ, ἴσα τὰ βη, ηθ, διαστήματα, τῇ δὲ γδ, τὰ δκ, κλ, ὥστε ἰσοπλήθη εἶναι τὰ τῆς γλ, μέρη τοῖς μέρεσι τῆς γθ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, αθ, ακ, αλ, δίθειαι. καὶ ἐπεὶ τὰ αβγ, αηβ, αθη, ῥίγωνα ἐπὶ ἴσων βάσεών εἰσι, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, δῆλον, ὅτι ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶ, κατὰ τὴν λή: τὰ ά: ὁμοίως δὲ, κατὰ τὴν αὐτὴν καὶ τὰ αγδ, αδκ, ακλ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὥστε ὁσαπλασίων μέν ἐστιν ἡ θγ, βάσις τῆς βγ, βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ αθγ, ῥίγωνον τοῦ αβγ, ῥιγώνου. ὁσαπλασίων δὲ ἡ γλ, βάσις τῆς γδ, βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ αγλ, ῥίγωνον τοῦ αγδ, ῥιγώνου. καὶ ἐπομένως, εἴγε ἡ θγ, βάσις μείζων ἐστὶ τῆς γλ, βάσεως, μεῖζον ἔσται καὶ τὸ αθγ, ῥίγωνον τοῦ αγλ, ῥιγώνου, κἂν ἴση, ἴσον, κἂν ἐλάσσων, ἔλασσον. Ἐπεὶ οὖν τεσσάρων μεγεθῶν τῶν βγ, γδ, βάσεων, καὶ αβγ, αγδ, ῥιγώνων εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν βγ, αβγ, ά: δῆλον: καὶ γ΄: τὰ θγ, αθγ· τῆς δὲ γδ, αγδ, β΄: δηλ: καὶ δ΄: τὰ γλ, αγλ, πάντως γε, κατὸν έ: ὅρον τὸ έ: ὡς ἡ βγ, ά: πρὸς τὴν γδ, β΄: ἔστι καὶ τὸ αβγ, γ΄: πρὸς τὸ αγδ. δ΄: ἀλλὰ τὸ μὲν αβγ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ γε, τὸ δὲ αγδ, τοῦ γζ, ἄρα κατὰ τὴν ιέ: τὸ αὐτὸ, ὡς τὸ αβγ, ῥίγωνον πρὸς τὸ αγδ, οὕτω καὶ τὸ γε, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γζ. ὡς δὲ τὸ αβγ, πρὸς τὸ αγδ, ἔστι καὶ ἡ βγ, βάσις πρὸς τὴν γδ, βάσιν· ἄρα, κατὰ τὴν ιά: τὸ αὐτὸ, ὡς ἡ βγ, βάσις πρὸς τὴν γδ, ἔστι καὶ τὸ γε, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γζ. Τὰ ῥίγωνα ἄρα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euc. Lib. 6. Fig. 9.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν τοῖς ῥιγώνοις ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη, ὡς ἔτυχε, δίθεια, ἀνάλογως τέμνει τὸ ῥίγωνον τῇ αὐτῇ βάσει.

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν τοῦ τριγώνου πλευρὰν ἔσται παράλληλος.

Τριγώνου δὴ τοῦ αβγ ἤχθω παρὰ μίαν τὴν αὐτοῦ πλευρὰν τὴν βγ, παράλληλος ἡ δε. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, ἡ γε, πρὸς τὴν εα. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βε, γδ. καὶ ἐπεὶ τὰ βδε, γεδ, τρίγωνα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐστὶ βάσεως τῆς δε, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ, δε, πάντως γε, κατὰ τὴν ζ'. τοῦ ά. ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. καὶ ἄλλην τινὰ ἡ ζ'. τοῦ έ. τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον πρὸς τὸ αδε, τρίγωνον. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ βδε, πρὸς τὸ αδε, οὕτω καὶ τὸ γδε, πρὸς τὸ αὐτὸ αδε. ἀλλ' ὡς ἔχει τὸ βδε, πρὸς τὸ αδε, ἔχει καὶ ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, ὡς δὲ τὸ γεδ, πρὸς τὸ αεδ, ἡ γε, πρὸς τὴν εα, καὶ τὴν αὐτὴν, ἄρα καὶ τὴν ά. τοῦ έ. ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, ἔστι καὶ ἡ γε, πρὸς τὴν εα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

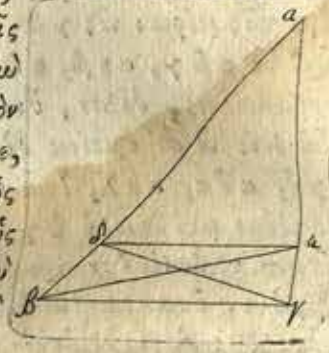
Ἔστω δὴ ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, ἡ γε, πρὸς τὴν γα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εδ. Λέγω, ὅτι ἡ εδ, παράλληλός ἐστι τῇ βγ. τῇ αὐτῇ γὰρ κατασκευασθέντων, ἔστι πάντως, καὶ τὴν αὐτὴν, ὡς μὲν ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, τὸ βδε, τρίγωνον πρὸς τὸ αδε. ὡς δὲ ἡ γε, πρὸς τὴν εα, τὸ γεδ, τρίγωνον πρὸς τὸ αεδ. ἀλλ' ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, ὑπετέθη καὶ ἡ γε, πρὸς τὴν εα. ἄρα, καὶ τὴν ῥηθεῖσαν ά. ἑκάτερον τῶν βεδ, γδε, τριγώνων τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ αδε. καὶ καὶ τὴν θ'. τοῦ αὐτοῦ ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶν, ἔχουσι δὲ καὶ τὴν αὐτὴν βάσιν τὴν εδ, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔστι μέρη, ἄρα καὶ τὴν λ'. τοῦ ά. καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις. ἡ δε, ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνει καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς. καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

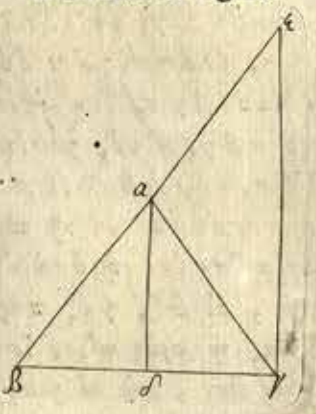
Ἔστω δὴ τρίγωνον τὸ αβγ, καὶ τετμήσθω τετμήσθω ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία δίχα ὑπὸ τῆς αδ, εὐθείας, καὶ τὴν θ'. τοῦ ά. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, ἔστι καὶ

Eucl. Lib. 6. Fig. 10.



σι καὶ ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ γ, παράλληλος τῇ αδ, ἡ γε, καὶ συμπιπτέτω τῇ γε, ἡ βα, ἐκβαλλομένη κατὰ τὸ ε. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς αδ, εγ, πέπτωκεν εὐθεῖα αγ, καὶ βε, παντως γε κατὰ τὸν κθ΄: τοῦ α: ἡ μὲν ὑπὸ αγε, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γαδ, ἐναλλάξ, ἡ δὲ ὑπὸ βαδ, ἐκτὸς τῇ ὑπὸ αεγ, ἐντός. ἀλλ' αἱ ὑπὸ γαδ, βαδ, ἴσαί εἰσι κατὰ τινὰ ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ αγε, αεγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ· καὶ κατὰ τοῦτο ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ, ἡ αγ, ἴση ἐστὶ τῇ αε. ἀλλὰ κατὰ τοῦτο β΄: τοῦ παρόντος, ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, ἔστι καὶ ἡ βα πρὸς τὴν αε, τῇ δὲ αε, δέδεικται ἴση αγ. ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, ἔστι καὶ ἡ αβ, πρὸς τὴν αγ, ὅπερ ἦν τὸ Πρῶτον.

Euclid. Lib. 6. Fig. 11.



Ἔστω δ' ἔτι ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς αδ. τῇ γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἡ γε, ἤχθη παράλληλος τῇ αδ, πάντως κατὰ τὴν β΄: τοῦ παρόντος, ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, ἔχει ἡ βα, πρὸς τὴν αε. ὑπετέθη δὲ καὶ ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἄρα ἡ βα, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἑκατέραν τῶν αε, αγ. καὶ κατὰ τὴν θ΄: τοῦ ε: αἱ αε, αγ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὥστε καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ αγε, αεγ, ὁμοίως ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, κατὰ τὴν ε: τοῦ πρώτου. ἀλλὰ δὴ κατὰ τὴν κθ΄: τοῦ αὐτοῦ ἡμὲν ὑπὸ αεγ, ἐντὸς ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βαδ, ἐκτὸς, ἡ δὲ ὑπὸ αγε τῇ ὑπὸ γαδ, ἐναλλάξ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βαδ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γαδ, καὶ ἑπομένως ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία δίχα ὑπὸ τῆς αδ, τέτμηται, ὅπερ ἦν τὸ δεύτερον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτων δῆλον, ὅτι ἐν τοῖς ἰσοσκελέσι τριγώνοις μιᾶς τῶν ἴσων αὐτοῦ πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἐὰν ἀπὸ τῆς ἐκτὸς γωνίας παράλληλος τῇ βάσει εὐθεῖα ἀχθῇ, δίχα ἡ αὐτὴ τμηθήσεται γωνία, τοῦ γὰρ αγε, ἰσοσκελοῦς τριγ: τῆς αε, ἐκβληθείσης πλευρᾶς, ἐπεὶ ἡ αδ, παράλληλός ἐστι τῇ γε, βάσει, δῆλον, ὅτι ἡ ὑπὸ βαγ, ἐκτὸς γωνία δίχα τέτμηται, ὡς ἤδη δέδεικται.

Πρότασις Δ΄: Θεώρημα.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

Ἔστωσαν δὴ τρίγωνα ἰσογώνια τὰ αβγ, δγε, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ

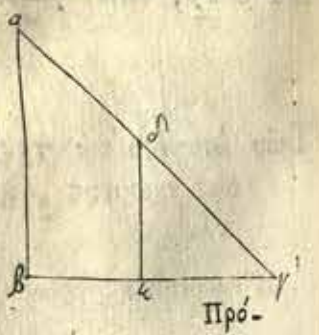
αβγ, γωνίαν τῇ ὑπὸ δγε, τὴν δὲ ὑπὸ βγα, τῇ πρὸς τῷ ε, καὶ τὴν λοιπὴν τῇ λοιπῇ. Λέγω, ὅτι τῶν αὐτῶν τετραγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας. Κείσθω γὰρ ἡ βγ, ἐπ' εὐθείας τῇ γε. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, ἐλάττονές εἰσι δύο ὀρθῶν, καὶ τὴν ι ζ: τοῖς ά: τῇ δὲ ὑπὸ βγα, ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ ε· παύπως γε καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, βεδ, γωνίαι ἐλάσσονές εἰσι δύο ὀρθῶν, καὶ αἱ βα, εδ, ἐκβαλλόμεναι καὶ τὸ συνεχὲς συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν δὴ καὶ τὸ ζ. ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ πρὸς τῷ β, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ δγε, παύπως γε κατὰ τὴν κή: τοῖς αὐτοῖς, αἱ βζ, γδ, παράλληλοί εἰσιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βγα, τῇ πρὸς τῷ ε, ἴση, ἄρα καὶ τῷ αὐτῷ παράλληλοί εἰσι, καὶ αἱ γα, εζ. ὥστε τὸ αγδζ, παραλληλόγραμμόν ἐστι. καὶ καὶ τοῖς δ': τοῖς αὐτοῖς, ἡμεῖν αζ, ἴση ἐστὶ τῇ γδ, ἡ δὲ ζδ, τῇ αγ· καὶ καὶ τοῖς β': τοῖς παρόντος, ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αζ, ἔστι καὶ ἡ βγ, πρὸς τὴν γε, ἴση δὲ ἡ αζ, τῇ γδ, ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν δγ, ἡ βγ, πρὸς τὴν γε, ὥστε καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ δγ, πρὸς τὴν γε. πάλιν ἐπεὶ ἡ γδ, παράλληλός ἐστι τῇ ζβ, ἔστι παύπως γε καὶ τὴν αὐτὴν, καὶ ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γε, ἡ ζδ, πρὸς τὴν δε, ἴση δὲ ἡ ζδ, τῇ αγ, ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γε, ἡ αγ, πρὸς τὴν δε, ὥστε καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, ἡ γε, πρὸς τὴν εδ. δέδεικται δὲ, ὅτι καὶ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτως ἡ δγ, πρὸς τὴν γε, ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἡ γδ, πρὸς τὴν δε, καὶ τὴν κβ: τοῖς έ: τῶν ἰσογωνίων ἄρα ζιγώνων ἀνάλογον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 6. Fig. 12.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτων δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι ἐὰν τετραγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, τὸν αὐτὸν αὖτο ἕξει λόγον πρὸς ἣν ἂν παραλλήλως ἀχθεῖη, ὃν καὶ ἑκατέρα τῶν λοιπῶν τοῦ τετραγώνου πλευρῶν ἔχει πρὸς τὰ μέρη αὐτῆς. τοῦ γὰρ αβγ, τετραγώνου παρὰ τὴν αβ, πλευρὰν ἀχθήτω παράλληλος ἡ δε, καὶ ἐπεὶ τὰ αβγ, δεγ, ζίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, καὶ τὴν κή: τοῖς ά: παύπως γε καὶ τὴν παροῦσαν, ἔστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ δε, πρὸς τὴν εγ, ὥστε καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν δε, ἡ βγ, πρὸς τὴν εγ. καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ δε, πρὸς τὴν αβ, ἡ γε, πρὸς τὴν γβ.

Eucl. Lib. 6. Fig. 13.

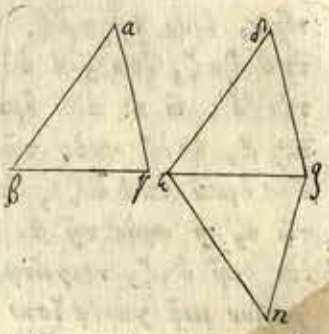


Πρό-

Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ε'αὶ δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Εucl. Lib. 6. Fig. 14.



Ε'κκείσθωσαν δὴ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀνάλογον· καὶ ἔστω ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, ἡ εζ, πρὸς τὴν ζδ, ὡς δὲ ἡ γα, πρὸς τὴν αβ, ἡ ζδ, πρὸς τὴν δε. Λέγω, ὅτι τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα ἰσογώνιά εἰσι, καὶ ἴσας ἕξουσι τὰς γωνίας, τὴν μὲν πρὸς τῷ β, τῇ ὑπὸ δεζ, τὴν δὲ πρὸς τῷ γ, τῇ ὑπὸ δζε, καὶ τὴν λοιπὴν τῇ λοιπῇ. Συνεστάθω γὰρ πρὸς τῇ εζ, εὐθείᾳ ἡ μὲν ὑπὸ ζεη, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ γβα, ἡ δὲ ὑπὸ εζη, τῇ ὑπὸ βγα, καὶ ἔτι παύτως καὶ ἡ λοιπὴ, ἡ πρὸς τῷ η, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ α, ἴση· ὥστε καὶ τὴν ἀνωτέρω τὰ αβγ, ηεζ, τρίγωνα ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευράς. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ ηε, πρὸς τὴν εζ, ἀλλ' ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ὑπετέθη καὶ ἡ δε, πρὸς τὴν εζ, ἄρα αἱ δε, ηε, τὴν αὐτὴν ἔχουσι λόγον πρὸς τὴν εζ, καὶ τὴν ι ά: τὰ ε: καὶ καὶ τὴν ϑ': τὰ αὐτὰ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ δζ, τῇ ηζ, ἴση, κοινῆς δὲ λαμβανομένης τῆς εζ, δειχθήσεται παύτως καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δεζ, ἴση τῇ ὑπὸ ηεζ, καὶ τὴν ἡ: τὰ ά: καὶ ὅλον τὸ δεζ, τρίγωνον ὅλῳ τῷ ηεζ, τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς, ἡ μὲν ὑπὸ εζδ, τῇ ὑπὸ εζη, ἡ δὲ πρὸς τῷ δ, τῇ πρὸς τῷ η, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ηεζ, ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ εζη, τῇ ὑπὸ βγα, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ δεζ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ εζδ, τῇ ὑπὸ βγα, καὶ λοιπὴ ἡ πρὸς τῷ δ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ α. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ δεζ, τριγώνῳ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ ὑποκείμενον.

Πρότασις ς': Θεώρημα.

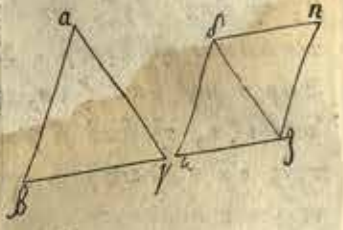
Ε'αὶ δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ε'κκείσθωσαν δὴ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα γωνίαν τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ, ἴσην, καὶ τὰς βα, αγ, πλευρὰς ἀνάλογον ταῖς εδ, δζ. Λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ δεζ, τριγώνῳ. Συνεστάθω γὰρ πρὸς τῇ δζ, εὐθείᾳ, πρὸς μὲν τῷ δ, σημείῳ ἡ ὑπὸ ζδη, γωνία ἴση ὁποτέρᾳ τῶν ὑπὸ βαγ, εδζ, πρὸς δὲ τῷ ζ, ἡ ὑπὸ δζη, τῇ ὑπὸ αγβ, καὶ τὴν κ γ: τὰ ά:

καὶ ἔσαι πάντως καὶ λοιπὴ ἡ πρὸς τῇ η, λοιπῇ τῇ πρὸς τῇ β, ἴση. Ἰσογώνια ἄρα τὰ δηζ, αγβ, τρίγωνα, ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσι, καὶ τιὼ δ': τὸ παρόντος, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τιὼ αγ, ἡ η δ, πρὸς τιὼ δζ, ὡς δὲ ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ὑπεπέθη καὶ ἡ εδ, πρὸς τὴν δζ, ἄρα, καὶ τὴν θ': τὸ ε: αἱ εδ, ηδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ· κοινῆς δὲ λαμβανομένης τῆς δζ, ἔστι καὶ βάσις ἡ εζ, βάσει τῇ ζη, ἴση, καὶ ὅλον τὸ εδζ, τριγωνον, ὅλῳ τῷ ηδζ, τριγώνῳ ἴσον, καὶ γωνία ἡ μὲν ὑπὸ δεζ, γωνία τῇ ὑπὸ δηζ, ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ δζε, τῇ ὑπὸ δζη, κατὰ τὴν δ': τὸ α: ἀλλ' ἡμὲν ὑπὸ δζη, ἴση γέγονε τῇ ὑπὸ αγβ, ἡ δὲ πρὸς τῷ η ἴση δέδεικται τῇ πρὸς τῷ β, ἄρα ἡμὲν ὑπὸ δζε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγβ, ἡ δὲ πρὸς τῷ ε, τῇ πρὸς τῷ β. Ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγ, τριγωνον τῷ δεζ, τριγώνῳ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ, καὶ τὰ ἑξῆς.

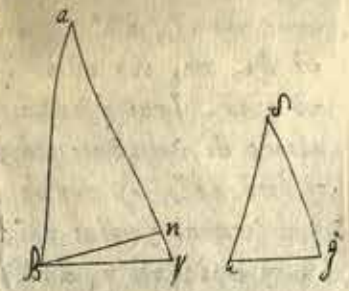
Eucl. Lib. 6. Fig. 15.

Π: 5:



Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

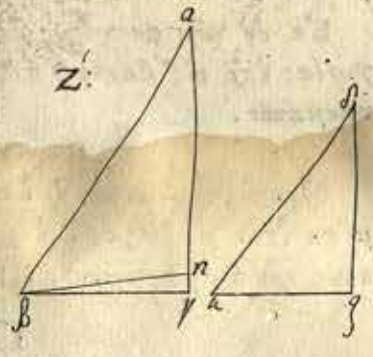
Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἅτοι ἐλάσσονα, ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.



Ἐχέτωσαν δὴ τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα γωνίαν μὲν τὴν πρὸς τῷ α, γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ δ, ἴσην, πλευρὰς δὲ τὰς αβ, βγ, ἀνάλογον ταῖς δε, εζ, καὶ ἔστω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς γ, καὶ ζ, γωνιῶν ἐλάττων ὀρθῆς. Λέγω, ὅτι τὸ αβγ, τρίγ: ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δεζ, καὶ ἔχει τὴν πρὸς τῷ β, ἴσην τῇ πρὸς τῷ ε, εἰ γὰρ μή, ἡ μία πάντως αὐτῶν ἔσται μείζων, ἔστω δὴ αὕτη ἡ πρὸς τῷ β. καὶ συνεστάθω ἡ ὑπὸ αβη, ἴση τῇ πρὸς τῷ ε, ὑπεπέθη δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ α, ἴση τῇ πρὸς τῷ δ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αηβ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση ἐστίν, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβη, τρίγωνον τῷ δεζ. ὥστε ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βη, οὕτως ἡ δε πρὸς τὴν εζ, καὶ τὴν δ': τὸ παρόντος. ἀλλ' ὡς ἡ δε, πρὸς τὴν εζ, ὑπεπέθη καὶ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ αβ, ἄρα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς ἑκατέραν τῶν βη, βγ, καὶ καὶ τὴν θ': τὸ ε: αἱ βη, βγ, ἴσαι εἰσὶν, ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ γ, τῇ ὑπὸ βηγ, κατὰ τὴν ε: τὸ α: ἡ δὲ πρὸς τῷ γ, ὑπεπέθη ἐλάττων ὀρθῆς, ἄρα ἐλάττων ὀρθῆς ἐστι καὶ ἡ ὑπὸ βηγ, ἡ δὲ ὑπὸ βηα, μείζων ὀρθῆς, τῇ δὲ ὑπὸ βηα ἴση δέδεικται ἡ πρὸς τῷ ζ, ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ ζ, μείζων ὀρθῆς, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ἀπο-

ἄτοπον ἄρα. ὥστε ἡ ὑπὸ αβγ, οὐκ ἔστι μείζων τῆς πρὸς τῇ ε, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῇ α, τῇ πρὸς τῇ δ, ἴση, καὶ τλὼ ὑποθέσιν, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῇ γ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῇ ζ, ἴση ἐστὶ, καὶ ἐπομένως τὸ αβγ, τρίγωνον, ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δεζ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς γ, καὶ ζ, μὴ ἐλάττων ὀρθῆς. ὅτι δὲ καὶ οὕτω τὸ αβγ, τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ δεζ, δῆλον. τῇ γὰρ αὐτῇ καταση-

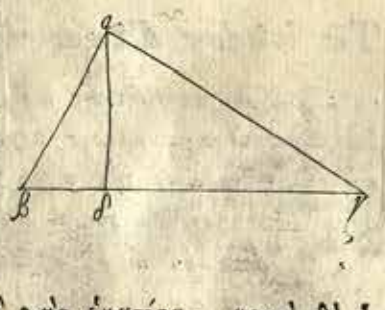


Euel. Lib. 6. Fig. 16.

σκευασθέντων, ὁμοίως δειχθήσεται ἡ μὲν ὑπὸ βηα, γωνία, ἴση τῇ πρὸς τῇ ζ, αἱ δὲ βη, βγ, εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ βηγ, ἴση ἔσται τῇ πρὸς τῇ γ. ἀλλ' ἡ πρὸς τῇ γ, μὴ ἐλάττων ὑπετέθη ὀρθῆς, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βηγ, μὴ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. τὸ βγη, ἄρα τρίγωνον αἱ δύο γωνίαι μὴ ἐλάσσονές εἰσι δύο ὀρθῶν, ὅπερ ἄτοπον, καὶ τλὼ ιζ΄: τὸ ἀ: οὐκ ἄρα ἀνίσος ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ πρὸς τῇ ε. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ πρὸς τῇ γ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῇ ζ, ἴση ἐστὶν. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγ, τρίγωνον τῷ δεζ. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Η΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.



Ἔστω δὴ ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ αβγ. ἀπὸ δὲ τῆς ὑπὸ βαγ, ὀρθῆς αὐτὴ γωνίας πιπτέτω κάθετος ἐπὶ τὴν βγ, βάσεως ἡ αδ. Λέγω, ὅτι ἑκάτερον τῶν αβδ, αδγ, τριγώνων ὅμοιόν ἐστι τῷ τε αβγ, ὅλῳ, καὶ ἀλλήλοις. Ἐπεὶ γὰρ τῶν αβγ, αβδ, τριγώνων αἱ ὑπὸ βαγ, βδα, γωνίαι, ἴσαί εἰσιν, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ β, πάντως γε καὶ λοιπὴ ἡ πρὸς τῇ γ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βαδ, ἴση ἐστὶν, ἰσογώνια ἄρα τὰ αβγ, αβδ, τρίγωνα. καὶ καὶ τλὼ δ΄: τῶν παρόντος, ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευράς, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γβ, πρὸς τλὼ βα, ἡ βα, πρὸς τὴν βδ. ὡς δὲ ἡ βα, πρὸς τλὼ αγ, ἡ βδ, πρὸς τλὼ δα. τὰ ἄρα αβγ, αβδ, τρίγωνα, ὅμοιά εἰσι, καὶ τὸν ά: ὅρον τῶν παρόντος. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ τὸ αδγ, ὅμοιον τῷ αβγ. ἔχουσι γὰρ ἴσας τὰς ὑπὸ βαγ, αδγ, γωνίας, καὶ κοινὴν τλὼ πρὸς τῇ γ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ δαγ, λοιπῇ τῇ πρὸς τῇ β, ἴση ἐστὶν, ἰσογώνια ἄρα τὰ αβγ, αδγ, καὶ καὶ τλὼ ῥηθείσαν δ΄: ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευράς, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ἐπομένως ὅμοιόν ἐστι καὶ τὸ αδγ, τῷ αβγ. ἑκάτερον ἄρα τῶν αβδ, αδγ, τριγώνων ὅμοιόν ἐστι τῷ ὅλῳ αβγ.

αβγ. ὅτι δὲ καὶ ἀλλήλοις ὅμοιά εἰσι τὰ αὐτὰ δηλον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ βδα, γωνία τῇ αβδ, τριγώνῳ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γδα, τῇ αδγ, τριγώνῳ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, δέδεικται δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ β, ἴση τῇ ὑπὸ δαγ, ἡ δὲ ὑπὸ βαδ, τῇ πρὸς τῷ γ. πάντως γε τὸ αβδ, τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ αδγ, τριγώνῳ, καὶ κοινὴν πλευρὰν ὑποτείνουσιν τὴν δ': ἀνάλογον ἔχουσι τὰς πλευρὰς, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, ἡ αὐτὴ δα, πρὸς τὴν δγ, ὡς δὲ ἡ δα, πρὸς τὴν αβ, ἡ δγ, πρὸς τὴν γα, καὶ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, ἡ γα, πρὸς τὴν αδ. τὰ ἄρα αβδ, αδγ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι, δέδεικται δὲ ὅμοιον ἑκάτερον καὶ τῷ ὅλῳ. Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Α'.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσεως πίπτουσα κάθετος, μέση ἀνάλογόν ἐστιν τῶν τῆς βάσεως τμημάτων.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Β'.

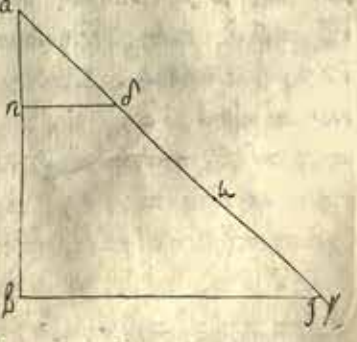
Ἔτι τῆς τε βάσεως καὶ ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος. ἡ μὲν γὰρ αβ, μέση δέδεικται ἀνάλογος τῆς βγ, βάσεως καὶ βδ, τμήματος. ἡ δὲ αγ, τῆς βγ, βάσεως καὶ γδ, τμήματος.

Πρότασις Θ'. Πρόβλημα.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσαχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἔστω δὴ ἀφελεῖν τῆς αβ, δοθείσης εὐθείας μέρος, δὸς εἰπεῖν, τρίτον. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἡ αγ, εὐθεῖα, γωνίαν ποιοῦσα μετὰ τῆς αβ, τὴν τυχοῦσαν, καὶ εἰλήφθω ἀπὸ τῆς αγ, τὸ τυχὸν μέρος αδ, καὶ τούτῳ ἴσον γεγράφθω τὸ, τε δε, καὶ εζ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζβ. ἀπὸ δὲ τοῦ δ, ἤχθω παράλληλος τῇ βζ, ἡ δη, καὶ τὸ αη, μέρος γ': ἔστι τῆς αβ. καὶ γὰρ τῆν β': τὰ παρόντος, ὡς ἡ αδ, πρὸς τὴν αζ, ἔστι καὶ ἡ αη, πρὸς τὴν αβ. ἀλλ' ἡ αδ, τρίτον μέρος εἴληπται τῆς αζ, ἄρα καὶ ἡ αη, γ': μέρος ἐστὶ τῆς αβ. ὅπερ ἔδει τὸ προσαχθέν:

Eucl. lib. 6. Fig. 17.



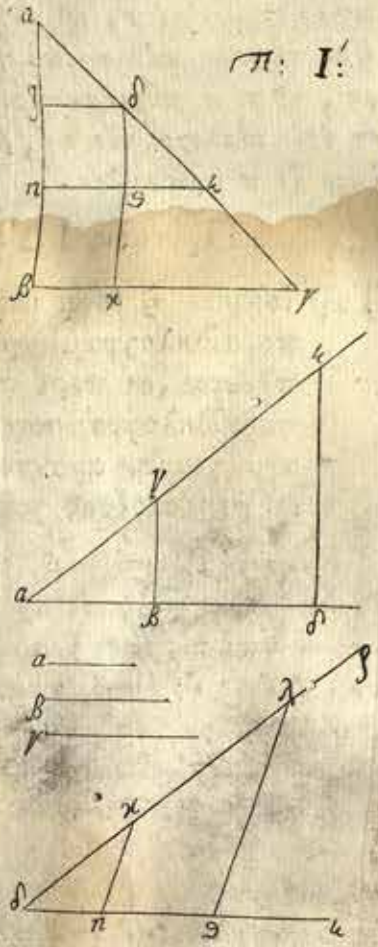
Πρότασις Ι'. Πρόβλημα.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀτμήτῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

Ἔστω δὴ τεμεῖν τὴν αβ, ἄτμητον εὐθεῖαν ὁμοίως τῇ αγ, τετμημένῃ καὶ τὰ δ' καὶ ε, σημεῖα. Κείσθωσαν οὕτω αἱ αβ, αγ, εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας, ὥστε γωνίαν ποιεῖν

ποιεῖν πρὸς φ α, τῷ τυχόσαν. ἐπιζευχθείσης δὲ τῆς β γ, διήχθωσαν ἀπὸ τῶν ε, χ δ. σημείῳ παραλλήλως τῇ αὐτῇ β γ, αἱ δζ, ε η. ἀπὸ δὲ τοῦ δ, παραλλήλως τῇ α β, ἤχθω ἡ δκ, τέμνουσα τὴν ε η, κατὰ τὸ θ, καὶ ἔσται τὸ προσαχθέν. Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμά εἰσι κατασκευήν, παύτως γε, καὶ τὴν δ': ἡ μὲν δθ, ἴση ἐστὶ τῇ ζη, ἡ δὲ θκ, τῇ ηβ. ἀλλὰ τετμήσθω ἡ δκ γ, παράλληλος ἦκται ἡ εθ, τῇ κγ, πλευρᾷ, ἄρα, καὶ τὴν β': τὸ παρόντος, ὡς ἡ γε, πρὸς τὴν εδ, οὕτως ἡ κθ, πρὸς τὴν θδ, ἤτοι ἡ βη, πρὸς τὴν ηζ. Ἐπεὶ δὲ καὶ τετμήσθω τὸ αηε, παρὰ τὴν ηε, πλευρὰν ἦκται παράλληλος ἡ δζ, παύτως γε, καὶ τὴν αὐτὴν, ὡς ἡ εδ, πρὸς τὴν δα, ἡ ηζ, πρὸς τὴν ζα, δέδεικται δὲ καὶ ὡς ἡ γε, πρὸς τὴν εδ, ἡ βη, πρὸς τὴν ηζ. ἄρα ἡ αβ, ὁμοίως τέτμηται τῇ αγ, καὶ τὸ προσαχθέν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 6. Fig. 18.



Π: Ι΄:

Πρότασις ΙΑ΄: Πρόβλημα.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστω δὴ εὑρεῖν τρίτην ἀνάλογον τῶν α β, α γ, εὐθειῶν. Κείσθωσαν αἱ δοθεῖσαι α β, α γ, εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας, ὥστε τὴν τυχοῦσαν ποιεῖν γωνίαν, τὴν πρὸς τῷ α. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γ β, ἐξαγομένων δὲ τῶν α β, α γ, καὶ τὸ συνεχὲς, ἔστω ἡ β δ, ἴση τῇ α γ. καὶ ἀπὸ τοῦ δ, ἤχθω παράλληλος τῇ β γ, ἡ δ ε, καὶ ἡ γ ε, ἔστω ἡ ζητουμένη. καὶ γὰρ τὴν β': τὸ παρόντος ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν β δ, οὕτως ἡ α γ, πρὸς τὴν γ ε, ἀλλ' ἡ β δ, εἴληπται ἴση τῇ α γ, ἄρα ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν α γ, οὕτως ἡ α γ, πρὸς τὴν γ ε. ἡ γ ε, ἄρα τρίτη ἐστὶν ἀνάλογος τῶν α β, α γ, δοθεισῶν εὐθειῶν. ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΙΒ΄: Πρόβλημα.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ζητήσω δὴ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, γ, δοθεισῶν εὐθειῶν. Κείσθωσαν αἱ τυχοῦσαι δε, δζ, εὐθεῖαι τυχοῦσαν ποιοῦσαι γωνίαν τὴν πρὸς τῷ δ, καὶ εἰλήφθω τῇ μὲν α, ἴση ἡ δη, τῇ δὲ β, ἡ ηθ, καὶ τῇ γ, ἡ δκ. καὶ τῇ ηκ, ἐπιζευχθείσῃ, παράλληλος ἤχθω ἀπὸ τοῦ θ, ἡ θλ. καὶ ἡ κλ, ἔσται ἡ ζητουμένη. καὶ γὰρ τὴν β': τὸ παρόντος, ὡς ἡ δκ, πρὸς τὴν ηθ, οὕτως ἡ δκ, πρὸς τὴν κλ,

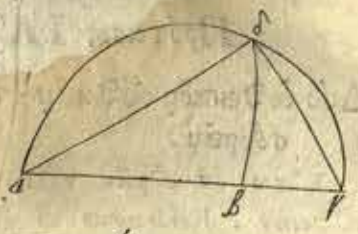
κλ, ἀλλ' ἡ μὲν δκ, εἴληπται ἴση τῇ α, ἡ δὲ κθ, τῇ β, καὶ ἡ ο τῇ γ. ἄρα ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, ἡ γ, πρὸς τὴν κλ. ἡ κλ, ἄρα τεταρτη ἐστὶν ἀνάλογος τῶν α, β, γ, δοθεισῶν εὐθειῶν, ὅπερ ἦν τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΙΓ'. Πρόβλημα.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

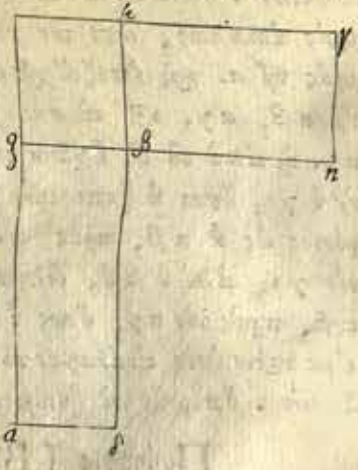
Ἔστωσαν δὴ αἱ αβ, βγ, εὐθεῖαι, καὶ ζητεῖτω ἡ μέση αὐτῶν ἀνάλογος. Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ αβ, βγ, δοθεῖσαι εὐθεῖαι, καὶ γεγράφθω περὶ τὴν ὅλην αγ, ἡμικύκλιον τὸ αδγ, καὶ ἀπὸ τοῦ β, ἀνεστάθω κάθετος ἡ βδ, καὶ αὐτὴ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ε, καὶ κείσθω τῇ βε, ἴση ἡ βζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, δγ. καὶ ἐπεὶ τὸ αδγ, τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐστι, καὶ τὴν λ α: τοῦ γ': ἀπὸ δὲ τῆς πρὸς τῇ δ, αὐτῇ ὀρθῆς γωνίας πέπτωκε κάθετος ἐπὶ τὴν αγ, βάσιν ἡ δβ. ἄρα, καὶ τὸ α: πόρισμα τῆς η: τοῦ παρόντος ἡ βδ, μέση ἐστὶν ἀνάλογος τῶν αβ, βγ, δοθεισῶν εὐθειῶν. ὅπερ ἦν τὸ προσαχθέν.

Eucl. Lib. 6. Fig. 19.



Πρότασις ΙΔ'. Πρόβλημα.

Τῶν ἴσων τε καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.



Ἔστωσαν ἴσα τὰ αβ, βγ, παραλληλόγραμμα, ἔχοντα ἴσας τὰς πρὸς τῇ β, γωνίας. Λέγω δὴ, ὅτι αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ἀντιπεπόνθασι· καὶ ἔστιν ὡς ἡ ηβ, πρὸς τὴν βζ, ἡ δβ, πρὸς τὴν βε. Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ δβ, τῇ βε, καὶ ἔσονται παντὸς ἐπ' εὐθείας καὶ αἱ ηβ, βζ, καὶ τὴν ι ε: τοῦ α': καὶ ἀναπεπληρώσθω τὸ εζ, παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν τὰ αβ, βγ, ἴσα εἰσὶ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, πάντως γε καὶ τὴν ζ': τοῦ ε: τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἑκάτερον πρὸς τὸ εζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ αβ, πρὸς τὸ ζε, τὸ ηε, πρὸς τὸ αὐτὸ ζε. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ αβ, πρὸς τὸ ζε, ἔστι καὶ ἡ δβ, πρὸς τὴν βε, καὶ τὴν α: τοῦ παρόντος. ὡς δὲ τὸ ηε, πρὸς τὸ ζε, ἡ ηβ, πρὸς τὴν ζβ, ἄρα καὶ ὡς ἡ ηβ, πρὸς τὴν βζ, ἡ δβ, πρὸς τὴν βε. ἀντιπεπόνθασιν ἄρα αἱ πλευραὶ τῶν αβ, βγ, παραλληλογράμμων αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ ηβ, πρὸς τὴν βζ, ἡ δβ, πρὸς τὴν βε. Λέγω, ὅτι τὸ αβ, βγ, πα-

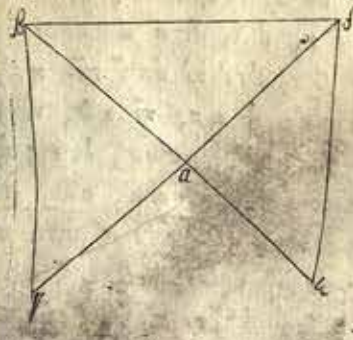
παραλληλόγραμμα ἴσά ἐστι. κατὰ γὰρ τὴν ῥηθεῖσαν ἀ: ὡς μὲν ἡ ηβ, πρὸς τὴν βζ, ἔστι καὶ τὸ ηε, πρὸς τὸ εζ, ὡς δὲ ἡ δβ, πρὸς τὴν βε, τὸ δζ, πρὸς τὸ εζ. ἀλλ' ὡς ἡ ηβ, πρὸς τὴν βζ, ὑπετέθη καὶ ἡ δβ, πρὸς τὴν βε, ἄρα καὶ αβ, βγ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸ εζ, καὶ τὴν θ': τῶν ε: ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. τῶν ἴσων τε ἄρα, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων αὐτιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΕ': Θεώρημα.

Τῶν ἴσων, καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ῥιγώνων αὐτιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν αὐτιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἐκκείσθω δὴ ἴσα ῥίγωνα τὰ αβγ, αδε, ἔχοντα τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ δαε. Λέγω, ὅτι τῶν αὐτῶν ῥιγώνων αὐτιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ἔστιν ἡ γα, πρὸς τὴν αδ, ὡς ἡ εα, πρὸς τὴν αβ. Κείσθω γὰρ ἡ γα, ἐπ' εὐθείας τῇ αδ, καὶ ἔστω παύπως, καὶ τὴν ι': τῶν α': καὶ ἡ βα, ἐπ' εὐθείας τῇ αε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βδ. καὶ ἐπεὶ τὰ αβγ, αδε, ῥίγωνα ἴσά ἐστι, παύπως γε, καὶ τὴν ζ': τῶν ε: ὡς τὸ αβγ, ῥίγωνον πρὸς τὸ βαδ, οὕτω καὶ τὸ αδε, πρὸς τὸ αὐτὸ βαδ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ αβγ, πρὸς τὸ βαδ, ἔχει, καὶ ἡ γα, πρὸς τὴν αδ, ὡς δὲ τὸ αδε, πρὸς τὸ αὐτὸ βαδ, ἔχει καὶ ἡ εα, πρὸς τὴν αβ, καὶ τὴν α': τὸ παρόντος, ἄρα, καὶ τὴν ι α': τοῦ ε: ὡς ἡ γα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ εα, πρὸς τὴν αβ, ὅπερ ἦν τὸ α': Ἀλλὰ δὴ ἔστω καὶ ὡς ἡ γα, πρὸς τὴν αδ, ἡ εα, πρὸς τὴν αβ. Λέγω, ὅτι τὸ αβγ, ῥίγωνον ἴσόν ἐστι τῷ αδε. Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ γα, πρὸς τὴν αδ, ἔστι καὶ ἡ εα, πρὸς τὴν αβ, καὶ ὡς μὲν ἡ γα, πρὸς τὴν αδ, ἔστι καὶ τὸ αβγ, ῥίγωνον πρὸς τὸ βαδ, ὡς δὲ ἡ εα, πρὸς τὴν αβ, τὸ αδε, πρὸς αὐτὸ τὸ βαδ, καὶ τὴν ι α': τὸ παρόντος, παύπως γε τὰ αβγ, αδε, ῥίγωνα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ἑκάτερον πρὸς τὸ βαδ, καὶ τὴν ι α': τῶν ε: καὶ κατὰ τὴν θ': τῶν αὐτῶν, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. Τῶν ἴσων τε ἄρα καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ῥιγώνων αὐτιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 6. Fig. 20.

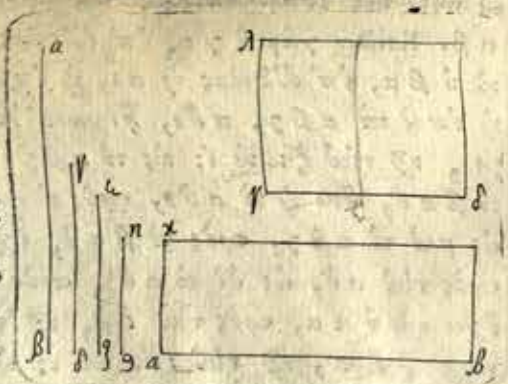


Πρότασις Ις΄: Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ α β, γ δ, ε ζ, η θ, εὐθεῖαι, ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν α β, η θ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γ δ, ε ζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ ἐπὶ τῶν α β, γ δ, κάθετοι αἱ α κ, γ λ, καὶ ἔστω ἡ μὲν α κ, ἴση τῇ η θ, ἡ δὲ γ λ, τῇ ε ζ, καὶ συμπεπληρώθωσαν τὰ β κ, δ λ, παραλληλόγραμμα ὀρθογώνια. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, ἔστιν καὶ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ, καὶ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ τῇ μὲν ε ζ, ἴση εἴληπται ἡ γ λ, τῇ δὲ η θ, ἡ α κ, παντὸς γε ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, ἔστι καὶ ἡ γ λ, πρὸς τὴν α κ, τῶν ἄρα β κ, δ λ, ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ· εἰσὶ δὲ καὶ ἰσογώνια, ἄρα καὶ τὴν αὐτέρω τὰ β κ, δ λ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν· ἀλλὰ τὸ μὲν β κ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν α β, η θ, ἄκρων, ἴση γὰρ ἡ α κ, τῇ η θ, τὸ δὲ δ λ, τὸ ὑπὸ τῶν γ δ, ε ζ, μέσων, ἴση γὰρ ἡ γ λ, τῇ ε ζ, ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν α β, η θ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γ δ, ε ζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Eucl. Lib. 6. Fig. 21.



Ἔστω δ' ἔτι τὸ ὑπὸ τῶν α β, η θ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν γ δ, ε ζ, περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Λέγω, ὅτι αἱ α β, γ δ, ε ζ, η θ, εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ μὲν β κ, ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν α β, η θ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴση γὰρ ἡ α κ, τῇ η θ, τὸ δὲ δ λ, τὸ ὑπὸ τῶν γ δ, ε ζ, ἴση γὰρ ἡ γ λ, τῇ ε ζ· παντὸς γε τὰ β κ, δ λ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν· ἀλλὰ δὴ καὶ ἰσογώνια, ἄρα καὶ τὴν αὐτέρω, ἀντιπεπόνθασιν αὐτῶν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, ἡ γ λ, τουτέστιν ἡ ε ζ, πρὸς τὴν α κ, δηλονότι τὴν η θ. Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

Πρότασις ΙΖ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ῥητὸς εὐθεῖα ἀλόγου μοῖρα τμηθῇ, ἑκατέρα τῶν ἀλόγων ἐστίν.

Ἔστω ῥητὸς μὲν ἡ α, ἄλογος δὲ ἡ β γ, καὶ τετμήσθω ἡ β γ κατὰ τὸ δ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν β δ, δ γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς α· ἡμίσεια δὲ ἔστω ἡ ε ζ· λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν β δ, δ γ ἄλογός ἐστιν.

Ἤχθω γὰρ διὰ μὲν τοῦ ε τῇ β γ παράλληλος ἡ ε η, διὰ δὲ τοῦ β τῇ α ἴση καὶ παράλληλος ἡ β θ, καὶ ἀναπεπληρώσθω τὸ θ γ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ θ γ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ θ γ τῷ ἀπὸ τῆς α· ἡμίσεια δὲ ἡ α τῆς ε ζ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν β δ, δ γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ε ζ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν β δ, δ γ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς β ἐφαπτομένης· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς β ἐφαπτομένης ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ε ζ· ἡ ἄρα β ἐφάπτεται τοῦ ε ζ κύκλου· ἡ δὲ ἐφαπτομένη κύκλου οὐ συμβάλλει τῇ περιφερείᾳ κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ἡ ἄρα β γ οὐ συμβάλλει τῇ ε ζ κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην κάθετος ἐπιζευγνυμένη ἐπὶ τὴν τομὴν ἐμπίπτει· ἡ ἄρα ε δ κάθετος ἐπιζευγνυμένη ἐπὶ τὴν τομὴν ἐμπίπτει· ἐμπιπτέτω κατὰ τὸ ζ· ἡ ἄρα ε ζ κάθετος ἐπὶ τὴν β γ ἐστίν· ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ε η ἐπὶ τὴν β γ κάθετος ἐστίν, ἡ δὲ β θ ἐπὶ τὴν β γ κάθετος ἐστίν, ἡ ἄρα ε η τῇ β θ ἐστὶ παράλληλος· ἀλλὰ καὶ ἡ β θ τῇ ε η παράλληλος ἐστίν· ἡ ἄρα ε β θ η παραλληλόγραμμον ἐστίν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ε η τῇ β θ, ἡ δὲ β θ τῇ α· ἡ ἄρα α τῇ ε η ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ α ἀσύμμετρός ἐστι τῇ β γ μήκει· καὶ ἡ ε η ἄρα τῇ β γ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ε η πρὸς τὴν β γ, οὕτως ἡ ε ζ πρὸς τὴν ζ δ· καὶ ἡ ε ζ ἄρα τῇ ζ δ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε ζ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν β δ, δ γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν β δ, δ γ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ε ζ· καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ε ζ ῥητόν· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν β δ, δ γ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν β δ, δ γ· ἐὰν ἄρα ῥητὸς εὐθεῖα ἀλόγου μοῖρα τμηθῇ, ἑκατέρα τῶν ἀλόγων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα. Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ α β γ, καὶ τετμήσθω ἡ α γ δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ τῇ α γ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δ β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α β, β γ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ δ β τῇ ε ζ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ α δ τῇ δ γ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ α ε τῇ ε γ· ἡ ε ἄρα κέντρον ἐστὶ τοῦ α β γ ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ε α τῇ ε β· καὶ ἡ ε α ἄρα τῇ ε β ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ α ε τῇ ε η ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ε β ἄρα τῇ ε η ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ ε ζ τῇ ε δ ἐστὶν ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ η ε ὅλῃ τῇ ε β ἐστὶν ἴση· καὶ ἐστὶν ἡ μὲν η ε τῇ ζ ε ἴση, ἡ δὲ ε β τῇ ε δ· καὶ ἡ ζ ε ἄρα τῇ ε δ ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ δ ε τῇ β δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ζ ε ἄρα τῇ β δ ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ ζ ε τῇ δ γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ δ γ ἄρα τῇ β δ ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ δ γ τῇ δ α ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ δ α ἄρα τῇ β δ ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ δ α τῇ ε ζ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ β δ ἄρα τῇ ε ζ ἐστὶν ἴση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἔστω δὴ ῥητὸν μὲν τὸ α, ἀπὸ δὲ τῆς α ῥητὸν δυνάμει παρὰ ῥητὴν τὴν β γ παραβεβλήσθω τὸ β γ ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ε ζ, πλάτος δὲ ποιείτω τὴν β δ· λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν β δ, δ γ ἄλογός ἐστιν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἐπὶ τῆς α γ ἡμικύκλιον τὸ α β γ, καὶ τετμήσθω ἡ α γ δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ τῇ α γ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δ β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α β, β γ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ δ β τῇ ε ζ· ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν β δ, δ γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ε ζ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν β δ, δ γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β δ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν β δ, δ γ ἄλογόν ἐστιν· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς β δ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ β δ· ἀλλὰ καὶ ῥητή· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ β γ ἀλόγου μοῖρα τμηθήσεται κατὰ τὸ δ· ὥστε ἐὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθὲν ὀρθογώνιον ποιῇ πλάτος ἄλογον, ἑκατέρα τῶν ἀλόγων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ α, ἀπὸ δὲ τῆς α ῥητὸν δυνάμει παρὰ ῥητὴν τὴν β γ παραβεβλήσθω τὸ β γ ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ε ζ, πλάτος δὲ ποιείτω τὴν β δ· λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν β δ, δ γ ἄλογός ἐστιν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἐπὶ τῆς α γ ἡμικύκλιον τὸ α β γ, καὶ τετμήσθω ἡ α γ δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ τῇ α γ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δ β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α β, β γ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ δ β τῇ ε ζ· ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν β δ, δ γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ε ζ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν β δ, δ γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β δ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν β δ, δ γ ἄλογόν ἐστιν· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς β δ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ β δ· ἀλλὰ καὶ ῥητή· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ β γ ἀλόγου μοῖρα τμηθήσεται κατὰ τὸ δ· ὥστε ἐὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθὲν ὀρθογώνιον ποιῇ πλάτος ἄλογον, ἑκατέρα τῶν ἀλόγων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα. Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ α β γ, καὶ τετμήσθω ἡ α γ δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ τῇ α γ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δ β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α β, β γ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ δ β τῇ ε ζ.

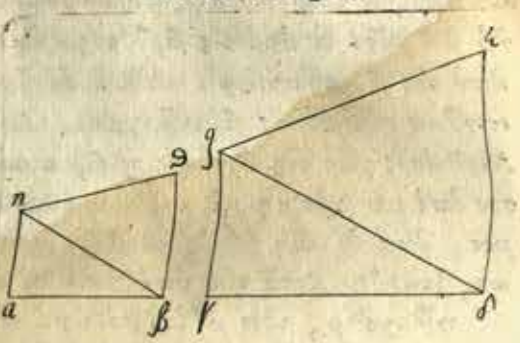
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ α δ τῇ δ γ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ α ε τῇ ε γ· ἡ ε ἄρα κέντρον ἐστὶ τοῦ α β γ ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ε α τῇ ε β· καὶ ἡ ε α ἄρα τῇ ε β ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ α ε τῇ ε η ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ε β ἄρα τῇ ε η ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ ε ζ τῇ ε δ ἐστὶν ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ η ε ὅλῃ τῇ ε β ἐστὶν ἴση· καὶ ἐστὶν ἡ μὲν η ε τῇ ζ ε ἴση, ἡ δὲ ε β τῇ ε δ· καὶ ἡ ζ ε ἄρα τῇ ε δ ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ δ ε τῇ β δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ζ ε ἄρα τῇ β δ ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ ζ ε τῇ δ γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ δ γ ἄρα τῇ β δ ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ δ γ τῇ δ α ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ δ α ἄρα τῇ β δ ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ δ α τῇ ε ζ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ β δ ἄρα τῇ ε ζ ἐστὶν ἴση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἔστω δὴ ῥητὸν μὲν τὸ α, ἀπὸ δὲ τῆς α ῥητὸν δυνάμει παρὰ ῥητὴν τὴν β γ παραβεβλήσθω τὸ β γ ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ε ζ, πλάτος δὲ ποιείτω τὴν β δ· λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν β δ, δ γ ἄλογός ἐστιν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἐπὶ τῆς α γ ἡμικύκλιον τὸ α β γ, καὶ τετμήσθω ἡ α γ δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ τῇ α γ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δ β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α β, β γ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ δ β τῇ ε ζ· ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν β δ, δ γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ε ζ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν β δ, δ γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β δ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν β δ, δ γ ἄλογόν ἐστιν· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς β δ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ β δ· ἀλλὰ καὶ ῥητή· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ β γ ἀλόγου μοῖρα τμηθήσεται κατὰ τὸ δ· ὥστε ἐὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθὲν ὀρθογώνιον ποιῇ πλάτος ἄλογον, ἑκατέρα τῶν ἀλόγων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πρὸς τῇ γ, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ αηβ, ἴση ἐστὶ λοιπῇ τῇ ὑπὸ γζδ. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβη, τριγώνῳ τῷ γδζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δζ, πρὸς τὴν βη, ἡ ζγ, πρὸς τὴν ηα, καὶ ἔτι ἡ γδ, πρὸς τὴν αβ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸ ηβϑ, τριγώνον, ἰσογώνιον τῷ ζδε, καὶ ἔσται ὡς ἡ δζ, πρὸς τὴν βη, ἡ ζε, πρὸς τὴν ηϑ, καὶ ἔτι ἡ εδ, πρὸς τὴν ϑβ. ἀλλ' ὡς ἡ δζ, πρὸς τὴν βη, δέδεικται ἡ ζγ, πρὸς τὴν ηα, καὶ ἔτι ἡ γδ, πρὸς τὴν αβ, ἄρα καὶ τὴν ια: τῶν ε: ὡς ἡ ζγ, πρὸς τὴν ηα, οὕτως ἡ ζε, πρὸς τὴν ηϑ, καὶ ἡ εδ, πρὸς τὴν ϑβ, καὶ ἔτι ἡ γδ, πρὸς τὴν αβ. ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ αηβ, γωνία ἴση δέδεικται τῇ ὑπὸ γζδ, ἡ δὲ ὑπὸ βηϑ, τῇ ὑπὸ δζε, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αηϑ, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ γζε. Διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβϑ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γδε. ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῇ α, ἴση τῇ πρὸς τῇ γ, ἡ δὲ πρὸς τῇ ϑ, τῇ πρὸς τῷ ε. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αϑ, τῷ γε. ἔχει δὲ καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, παντὸς γε καὶ τὸν α: ὅρον τοῦ παρόντος, ὅμοιόν ἐστιν. Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὁμοιον, καὶ τὰ ἑξῆς.

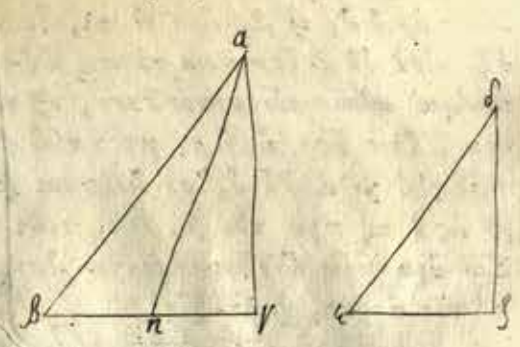
Eucl. Lib. 6. Fig. 23.



Πρότασις ΙΘ': Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς.

Ἔστωσαν ὅμοια τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ, ἴσην μὲν ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ ε, τὰς δὲ βγ, εζ, ὑποτεινούσας ὁμολόγους. Λέγω, ὅτι τὸ αβγ, τρίγωνον πρὸς τὸ δεζ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἤπερ ἡ βγ, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν εζ, ὁμόλογον πλευράν. Εὑρεθήτω γὰρ τρίτη ἀνάλογος τῇ βγ, εζ, ἡ βη, τῶν τὴν ια: τῶν παρόντος. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αη. καὶ ἐπεὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, κατὰ τὴν δ': τῶν παρόντος, παντὸς γε ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ἔσται καὶ ἡ δε, πρὸς τὴν εζ. ὥστε καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν δε, ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. ὡς δὲ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ, γέγονε καὶ ἡ εζ, πρὸς τὴν βη, ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν δε, ἔστι καὶ ἡ εζ, πρὸς τὴν βη, ὥστε τῶν αβη, δεζ, τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἄρα καὶ τὴν ιε: τῶν παρόντος, τὰ αβη, δεζ, τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἀλλ' ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν βη, οὕτως τὸ αβγ, τρίγωνον πρὸς τὸ αβη, καὶ τὴν ά: τῶν αὐτῶν, ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν βη, ἔχει καὶ τὸ αβγ, τρίγ: πρὸς τὸ δεζ,



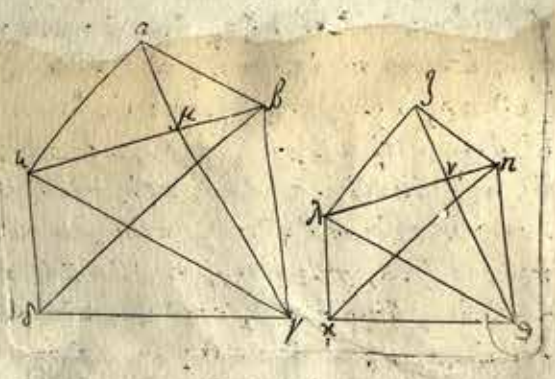
δεζ, ἡ δὲ βγ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ πρὸς τὴν βη, ἥπερ πρὸς τὴν εζ, καὶ τὴν ι: ὅρον τῶν ε: ἄρα καὶ τὸ αβγ, ξύγωνον πρὸς τὸ δεζ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστίν, ἥπερ ἡ βγ, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν εζ, ὁμόλογον. Τὰ ὅμοια ἄρα ξύγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κ΄: Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἐστωσαν ὅμοια πολύγωνα τὰ αβγδε, ζηθκλ, ἔχοντα ὁμολόγους πλευρὰς τὰς αβ, ζη. Λέγω δὴ, ὅτι τὰ αβγδε, ζηθκλ, ὅμοια πολύγωνα εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βε, εγ, ηλ, λθ. καὶ ἐπεὶ τὰ αβγδε, ζηθκλ, πολύγωνα, ὅμοιά εἰσι, παύπως γε, κατὰ τὸν α: ὅρον τῶν παρύπος, ἔχουσι καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αε, ἡ ηζ, πρὸς τὴν ζλ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαε, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ηζλ, διὰ τὴν ἴσην πολυγώνων ὁμοιότητα, ἄρα τὰ αβε, ζηλ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν. ὥστε ἡ ὑπὸ αβε, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ζηλ. ἀλλὰ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ αβγ, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ ζηθ, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ εβγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ληθ, ἴση ἐστίν. Αὖθις ἐπεὶ τὰ αβε, ζηλ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσι, παύπως γε, καὶ τὴν δ΄: τὰ παρύπος, ὡς ἡ εβ, πρὸς τὴν βα, ἕτως καὶ ἡ λη, πρὸς τὴν ηζ. ἀλλ' ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ὕπως ηζ, πρὸς τὴν ηθ, δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ εβ, πρὸς τὴν βγ, ἡ λη, πρὸς τὴν ηθ. δέδεικται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εβγ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ληθ, ὅμοια ἄρα τὰ εβγ, ληθ, τρίγωνα. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅμοια καὶ τὰ εγδ, λθκ. ὥστε τὰ αβγδε, ζηθκλ, πολύγωνα εἰς ἴσα διήρηται τρίγωνα, καὶ ἰσοπληθῆ. ὅτι δὲ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, δῆλον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, ζθ: καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ὕπως ἐστὶν ἡ ζη, πρὸς τὴν ηθ, διὰ τὴν ἴσην ὑμμάτων ὁμοιότητα, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, γωνία, ἴση τῇ ὑπὸ ζηθ. ἄρα τὸ αβγ, ζηθ, τρίγωνα ὅμοιά εἰσιν, ὥστε καὶ ἰσογώνια. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ βαμ, τῇ ὑπὸ ηζν, δέδεικται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αβμ, ἴση τῇ ὑπὸ ζην, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αμβ, ἴση ἐστὶ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ζνη, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αμβ, τρίγωνον τῷ ζνη.

Eucl. lib. 6. Fig. 24.



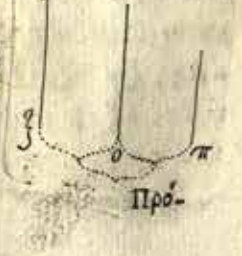
ζνη. ὥστε καὶ ὅμοια. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν μβ, ἡ ζη, πρὸς τὴν νη. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ὡς ἡ βμ, πρὸς τὴν μγ, ἡ ηι, πρὸς τὴν ιθ. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ αμ, πρὸς τὴν μγ, ἡ ζι, πρὸς τὴν ιθ. ἀλλ' ὡς ἡ αμ, πρὸς τὴν μγ, ἔχει τὸ, τε αμβ, τρίγ: πρὸς τὸ βμγ, καὶ τὸ αμε, πρὸς τὸ εμγ, ἄρα καὶ τὴν ια: τῶ ε: ὡς τὸ αμβ, πρὸς τὸ βμγ, οὕτω τὸ αμε, πρὸς τὸ εμγ. καὶ κατὰ τὴν ιβ: τῶ αὐτῶ, ὡς τὸ αμβ, ἡγούμενον πρὸς τὸ βμγ, ἑπόμενον, οὕτω πάντα τὰ ἡγούμενα, ἥπερ τὸ βαε, τρίγωνον πρὸς πάντα τὰ ἑπόμενα τὸ βεγ, δηλ: τρίγωνον. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ὡς τὸ ζνη, πρὸς τὸ ηνθ, τὸ ηζλ, πρὸς τὸ ληθ. ἀλλ' ὡς τὸ αμβ, πρὸς τὸ βμγ, δέδεικται καὶ τὸ ζνη, πρὸς τὸ ηνθ, ἄρα, κατὰ τὴν ρηθεῖσαν ια: ὡς τὸ βαε, πρὸς τὸ εβγ, οὕτω καὶ τὸ ηζλ, πρὸς τὸ ληθ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ αβε, πρὸς τὸ ζηλ, οὕτω τὸ εβγ, πρὸς τὸ ληθ. Ἐὰν δὲ ἐπιζευχθῶσι καὶ αἱ γε, θλ, δειχθήσεται τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ὡς τὸ εβγ, πρὸς τὸ εγδ, τὸ ληθ, πρὸς τὸ λθκ. καὶ ἐναλλὰξ, τρία ἄρα μεγέθη τὰ εαβ, βεγ, γδε, τρίγωνα ἀνάλογόν εἰσι τρισὶ μεγέθεσι τοῖς λζη, ηλθ, θκλ, τριγώνοις, ὥστε κατὰ τὴν ιβ: τῶ ε: ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων τὸ εαβ, πρὸς εἷς τῶν ἑπομένων τὸ λζη, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα, τὸ αβγδε, πολύγωνον, πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, τὸ ζηθκλ, δηλ: πολύγωνον. ἄρα τὸ αβγδε, ζηθκλ, πολύγωνα διήρηται εἰς ὅμοια τρίγωνα, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις. Λέγω δ' ὅτι καὶ τὸ αβγδε, πολύγωνον πρὸς τὸ ζηθκλ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς αβ, ὁμολόγου πλευρᾶς πρὸς τὴν ζη, ὁμόλογον. ἐπεὶ γὰρ τὸ αβγδε, πολύγωνον πρὸς τὸ ζηθκλ, πολύγωνον δέδεικται ἔχειν, ὡς τὸ αβε, τρίγωνον πρὸς τὸ ζηλ, τρίγωνον, τὸ δὲ αβε, τρίγ: πρὸς τὸ ζηλ, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἥπερ ἡ αβ, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ζη, ὁμόλογον πλευρὰν κατὰ τὴν ἀνωτέρω, τὸ ἄρα αβγδε, πολύγων: πρὸς τὸ ζηθκλ, πολύγωνον ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἥπερ ἡ αβ, ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ζη, ὁμόλογον πλευράν. Τὰ ὅμοια ἄρα πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται, καὶ τὰ ὅμοια τετράπλευρα σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἶναι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ὡς δέδεικται καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων. ὥστε ἐκ τούτων ἔχομεν συναγαγεῖν καθόλου, ὅτι τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Β': Ἐπεὶ δὲ ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον ληφθῶσιν, ὡς αἱ ξο, πξ, πρώτη πρὸς τὴν π, τρίτην ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἥπερ πρὸς τὴν ο, δευτέραν. δῆλον, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἀπὸ τῆς α: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β: ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον εὐθύγραμμον, ἔχει ὡς ἡ α: πρὸς τὴν γ:

Euclid. Lib. 6. Fig. 25.



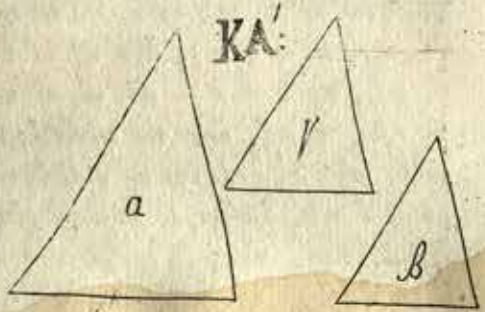
Πρό-

Πρότασις ΚΑ΄: Θεώρημα.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Ἔστω δὴ ἑκάτερον τῶν α, καὶ β, εὐθυγράμμων ὅμοιον τῷ γ. Λέγω, ὅτι καὶ α, β, εὐθύγρ: καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια. Ἐπεὶ γὰρ τὸ α, ὁμοιόν ἐστι τῷ γ· δῆλον, ὅτι καὶ ἰσογώνιον, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, καὶ τὴν δ΄: τοῦ παρόντος. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ β, ἰσογώνιόν ἐστι τῷ γ, καὶ τὰς πλευρὰς τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας ἔχει ἀνάλογον, ὥστε, καὶ τὴν ι α: τοῦ πέμπτου, ἰσογώνιά εἰσι καὶ ἀλλήλοις, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. καὶ τὸν α: ἄρα ὅρον τοῦ παρόντος, τὰ α β, εὐθύγραμμα, ὅμοιά εἰσι.

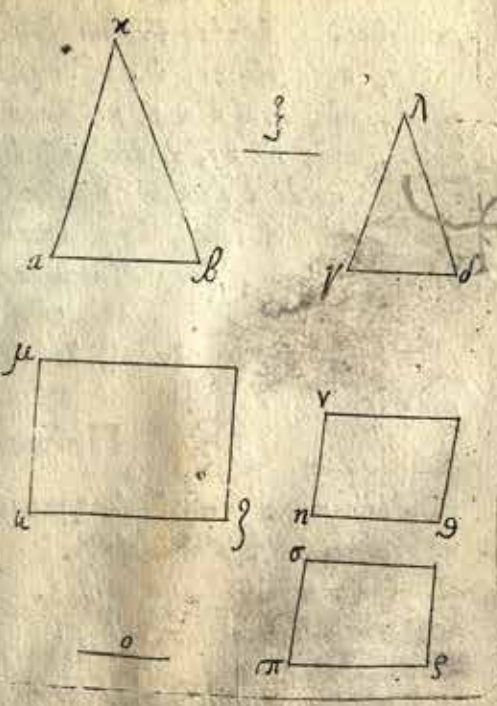
Euclid. Lib. 6. Fig. 26.



Πρότασις ΚΒ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται, καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν ἤδη εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ α β, γ δ, ε ζ, η θ. καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναγεγράφθωσαν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα, ἀπὸ μὲν τῶν α β, γ δ, τὰ κ α β, λ γ δ, ἀπὸ δὲ τῶν ε ζ, η θ, τὰ μ ζ, ν θ. Λέγω, ὅτι τὰ κ α β, λ γ δ, ἀνάλογόν εἰσι τοῖς μ ζ, ν θ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ κ α β, πρὸς τὸ λ γ δ, οὕτω τὸ μ ζ, πρὸς τὸ ν θ. εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν α β, γ δ, τρίτη ἀνάλογον ἡ ξ. τῶν δὲ ε ζ, η θ, ἡ ο. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η θ, καὶ τὴν ὑπόθεσιν, ὡς δὲ ἡ γ δ, πρὸς τὴν ξ, ἡ η θ, πρὸς τὴν ο, καὶ τὴν κατασκευήν, ἄρα καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν ξ. οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν ο, καὶ τὴν κβ΄: τοῦ ε΄: ἀλλ' ὡς μὲν ἡ α β, ε΄: πρὸς τὴν ξ, γ΄. ἔχει καὶ τὸ ἀπὸ τῆς α β, ε΄: τὸ κ α β, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γ δ, β΄: τὸ λ γ δ. ὡς δὲ



ὡς δὲ ἡ εζ, ὁμοίως ἀ: πρὸς τὴν ο, γ': ὅπου καὶ τὸ ἀπὸ τῆς εζ, ἀ: τὸ μζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς νθ, β': τὸ νθ. ἄρα καὶ τὴν ι ἀ: τῷ αὐτῷ, καὶ ὡς τὸ καβ, πρὸς τὸ γλδ, ὅπου τὸ μζ, πρὸς τὸ νθ. ὅπερ ἦν τὸ ἀ:

Λλλ' δὴ ἔστω πὰ καβ, λγδ, ἀνάλογον τοῖς μζ, νθ. Λέγω, ὅτι καὶ αἱ αβ, γδ, εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσι ταῖς εζ, νθ. Γεγράφω γὰρ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, ἡ εζ, πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν πρ, καὶ τὴν ιβ: τῷ παρόντος. καὶ ἀναγεγράφθω ὁποτέρῳ τῷ μζ, νθ, ἀπὸ τῆς πρ, τὸ σρ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον. καὶ ἐπεὶ αἱ αβ, γδ, ἀνάλογόν εἰσι ταῖς εζ, πρ, καὶ ἀπὸ μὲν τῶν αβ, γδ, ἀναγέγραπται εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα πὰ καβ, λγδ, ἀπὸ δὲ τῶν εζ, πρ, πὰ μζ, σρ, ἄρα καὶ πὰ ἤδη εἰρημένα, ἔσαι ὡς τὸ καβ, πρὸς τὸ λγδ, τὸ μζ, πρὸς τὸ σρ. ἀλλ' ὡς τὸ καβ, πρὸς τὸ λγδ, ὑπεκέθη καὶ τὸ μζ, πρὸς τὸ νθ, τὸ μζ, ἄρα τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρός τε τὸ νθ, καὶ σρ. ὥστε καὶ τὴν θ': τῷ ε: τὸ νθ, ἴσον ἐστὶ τῷ σρ, ἔστι δὲ καὶ ὅμοιον, καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον, ἄρα καὶ ἡ νθ, ὁμόλογος πλευρὰ, ἴση ἐστὶ τῇ πρ, ὁμολόγῳ πλευρᾷ. Ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, γέγονεν ἡ εζ, πρὸς τὴν πρ, παντὸς γε ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν γδ, ἔχει καὶ ἡ εζ, πρὸς τὴν νθ. ὅπερ ἦν τὸ β': Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ πὰ ἑξῆς.

Ὅτι δὲ ἡ νθ, ἴση ἐστὶ τῇ πρ, δῆλον. Ἐπεὶ γὰρ πὰ νθ, σρ, ἴσα τε καὶ ὁμοιά εἰσι, καὶ ὁμοίως ἔτι κείμενα, πάντως γε, καὶ τὸν ἀ: τὸ παρόντος ὅρον, ὡς ἡ θν, πρὸς τὴν νν, ἡ ρπ, πρὸς τὴν πσ. Λέγω δ' ὅτι ἡ πρ, ἴση ἐστὶ τῇ νθ. εἰ γὰρ μή, ἔσω ἡ πρ, μείζων τῆς νθ· καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ πρ, πρὸς τὴν πσ, ἡ θν, πρὸς τὴν νν, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ἡ ρπ, πρὸς τὴν νθ, ἡ πσ, πρὸς τὴν νν. μείζων δὲ ἡ ρπ, τῆς νθ, μείζων ἄρα καὶ ἡ πσ, τῆς νν· τὸ σρ, ἄρα μείζων τοῦ νθ, ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ πρ, τῆς νθ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων, ἴση ἄρα.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τῶν ἴσων τε καὶ ὁμοίων εὐθυγράμμων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ, ἴσαί εἰσι.

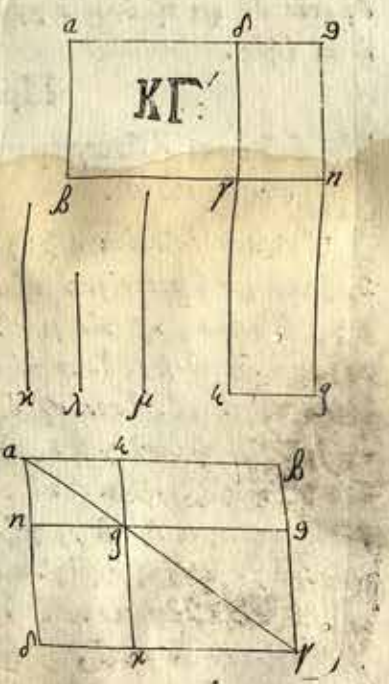
Πρότασις ΚΓ': Θεώρημα.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἐκκείσθωσαν δὴ πὰ αγ, γζ, ἰσογώνια παραλληλόγραμμα γωνίαν τὴν ὑπὸ βγδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εγη, ἴσην. Λέγω, ὅτι τὸ αγ, πρὸς τὸ γζ, ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τὸν ἔκτε τοῦ τῆς βγ, λόγου πρὸς τὸν γη, καὶ τοῦ τῆς εγ, πρὸς τὸν γδ. Κείσθω γὰρ ἡ βγ, ἐπ' εὐθείας τῇ γη, καὶ ἔσαι πάντως γε καὶ τὸν ιε: τῷ ἀ: ἐπ' εὐθείας καὶ ἡ γδ, τῇ γε, καὶ ἀποπεπληρώσθω τὸ γθ, παραλληλόγραμμον. εἶτα εἰλήφθω τυχοῦσα εὐθεῖα ἡ κ, καὶ γεγράφθω ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γη,

γκ, ἡ κ, πρὸς τὴν λ, ὡς δὲ ἡ δγ, πρὸς τὴν γε, ἡ λ, πρὸς τὴν μ, καὶ τὴν ι β΄: τοῦ παρόντος. ἡ κ, ἄρα πρὸς τὴν μ, λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τῶν πλευρῶν τῶν αγ, γζ, παραλληλογράμμων, καὶ τὸν ε: ὅπερ ἔδει δεῖξαι τοῦ παρόντος. Ἐπεὶ δὲ ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γκ, ἐστὶ τὸ αγ, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ γθ. ὡς δὲ ἡ βγ, πρὸς τὴν γκ, γέγονε καὶ ἡ κ, πρὸς τὴν λ, ἄρα ὡς ἡ κ, πρὸς τὴν λ, τὸ αγ, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ γθ. αὖθις ἐπεὶ ὡς ἡ δγ, πρὸς τὴν γε, ἔστι καὶ τὸ γθ, πρὸς τὸ γζ, καὶ τὴν α: τοῦ αὐτοῦ. ὡς δὲ ἡ δγ, πρὸς τὴν γε, γέγονε καὶ ἡ λ, πρὸς τὴν μ, ἄρα καὶ ὡς ἡ λ, πρὸς τὴν μ, οὕτω τὸ γθ, πρὸς τὸ γζ. ἴσα ἄρα μεγέθη τὰ αγ, γθ, γζ, ἴσαι μεγέθεσι ταῖς κ, λ, μ, ἐν τῇ αὐτῇ εἰσὶ λόγῳ σὺν δύο λαμβανόμενα, ὥστε καὶ δι' ἴσου, ὡς τὸ αγ, πρὸς τὸ γζ, ἡ κ, πρὸς τὴν μ, καὶ τὴν κ β΄: τοῦ ε: ἀλλ' ἡ κ, πρὸς τὴν μ, ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἔκ τῶν πλευρῶν, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τὸ αγ, πρὸς τὸ γζ, ἔχει λόγον ὁμοίως τὸν συγκείμενον ἔκ τῶν πλευρῶν. Τὰ ἰσογώνια ἄρα παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. lib. 6. Fig. 27.



Πρότασις ΚΔ΄: Θεώρημα.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, ὅμοιά ἐστι τό τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω δὴ περὶ τὴν διάμετρον αγ, τοῦ αβγδ, παραλληλογράμμου, παραλληλόγραμμα τὰ εζ, ηθγκ. Λέγω παῦτα, ὅμοια εἶναι τό τε ὅλῳ αγ, καὶ ἀλλήλοις. Ἐπεὶ γὰρ ἡ εζ, παράλληλός ἐστι τῇ βγ, παύτως γε, κατὰ τὴν κθ: τοῦ α: ἡ μὲν ὑπὸ αεζ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ εζα, τῇ ὑπὸ βγα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ εαζ, κοινή, ἄρα τὸ αεζ, τρίγωνον, ἰσογώνιόν ἐστι τῷ αβγ, τριγώνῳ. ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, καὶ τὴν δ΄: τοῦ παρόντος. ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ αε, πρὸς τὴν εζ, ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ὡς δὲ ἡ εζ, πρὸς τὴν ζα, ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, καὶ ὡς ἡ ζα, πρὸς τὴν αε, ἡ γα, πρὸς τὴν αβ. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, καὶ τὸ αζη, ἰσογώνιον τῷ αγδ. ὥστε ὡς ἡ αζ, πρὸς τὴν ζη, ἡ αγ, πρὸς τὴν γδ. ὡς δὲ ἡ ζη, πρὸς τὴν ηα, ἡ γδ, πρὸς τὴν δα, καὶ ὡς ἡ αη, πρὸς τὴν αζ, ἡ δα, πρὸς τὴν αγ. Ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὡς μὲν ἡ εζ, πρὸς τὴν ζα, ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, ὡς δὲ ἡ αζ, πρὸς τὴν ζη, ἡ αγ, πρὸς τὴν γδ, καὶ δι' ἴσου ἄρα, καὶ τὴν κβ΄: τοῦ ε: ὡς ἡ εζ, πρὸς τὴν ζη, ἡ βγ, πρὸς τὴν γδ. Πάλιν ἐπεὶ δέδεικται ὡς μὲν ἡ ηα, πρὸς τὴν αζ, ἡ δα, πρὸς τὴν αγ, ὡς δὲ ἡ ζα, πρὸς τὴν αε, ἡ γα, πρὸς τὴν αβ, καὶ δι' ἴσου ἄρα, καὶ τὴν

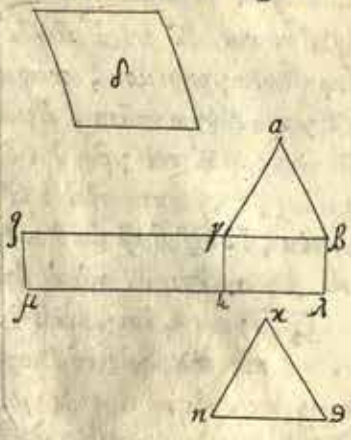
ρημένον κβ΄: ὡς ἡ να, πρὸς τὴν αε, ἡ δα, πρὸς τὴν αβ. δέδεικται δὲ καὶ ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν εζ, ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ὡς δὲ ἡ ζη, πρὸς τὴν να, ἡ γδ, πρὸς τὴν δα, ἄρα καὶ τὸ αεζη, αβγδ, παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, ὅτι δὲ καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν ἴσαι, δῆλον. δέδεικται γὰρ ἡ μὲν ὑπὸ αεζ, ἴση τῇ ὑπὸ αβγ, ἡ δὲ ὑπὸ αηζ, τῇ ὑπὸ αδγ. ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ εαζ, δέδεικται ἴση τῇ ὑπὸ βγα, ἡ δὲ ὑπὸ αζη, τῇ ὑπὸ αγδ, ἄρα καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ εζη, ἴση ἐστὶν ὅλῃ τῇ ὑπὸ βγδ. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ εαη, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βαδ, ἴση ἐστίν, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αεζη, παραλληλόγρ: τῷ αβγδ. ἔχει δὲ καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς ἤδη δέδεικται. ἄρα, καὶ τὸν ά: ὅρον, ὅμοιόν ἐστι τὸ αὐτὸ αεζη, παραλλ: τῷ αβγδ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τὸ ζθγκ, ὅμοιον τῷ αὐτῷ αβγδ. ὥστε, κατὰ τὴν κά: τὸ παρόντος, τὸ αζ, ζγ, ὅμοιόν ἐστι. δέδεικται δὲ καὶ τῷ ὅλῳ αγ, ἕκάτερον ὅμοιον, Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΕ΄: Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὁμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συνίστασθαι.

Ἔστωσαν δοθέντα εὐθύγραμμα τὸ, τε αβγ, καὶ δ. καὶ ζητεῖται συστήσασθαι εὐθύγραμμον ὅμοιον μὲν τῷ αβγ, ἴσον δὲ τῷ δ. παραβεβλήσθω δὴ παρὰ μὲν τὴν βγ, εὐθείαν, καὶ τὴν μδ΄: καὶ μέ: τῷ ά: παραλλ-

Eucl. Lib. 6. Fig. 28.



λόγραμμον τὸ βε, ἴσον τῷ αβγ, δοθέντι· παρὰ δὲ τὴν γε, τὸ εζ, ἴσον τῷ δ, ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ εγζ, ἴσην τῇ ὑπὸ γβλ, καὶ ἔστω παντὸς ἐπ' εὐθείας ἡ βγ, τῇ γζ, καὶ τὴν ιδ΄: τῷ αὐτῷ. εἶτα εὑρεθήτω μέση ἀνάλογον τῶν βγ, γζ, ἡ ηθ, διὰ τῆς ιγ΄: τῷ παρόντος· καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ηθ, εὐθύγραμμον τὸ ηθκ, ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ αβγ, διὰ τῆς ιή. τῷ αὐτῷ, καὶ τῷτο ἔστω τὸ ζητούμενον. Ἐπεὶ γὰρ αἱ βγ, ηθ, γζ, ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, πάντως γε, καὶ τὸ πόρισμα τῆς κ΄. τῷ παρόντος, ἔστιν ὡς ἡ βγ, πρώτη πρὸς τὴν γζ, τρίτην, τὸ ἀπὸ τῆς ά. αβγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β΄. ηθκ. ὡς δὲ ἡ βγ, πρὸς τὴν γζ, ἔστι καὶ τὸ βε, πρὸς τὸ εζ, καὶ τὴν ά. τῷ αὐτῷ, ἄρα, καὶ τὴν ια. τῷ ε΄. ὡς τὸ βε, πρὸς τὸ εζ, τὸ αβγ, πρὸς τὸ ηθκ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ βε, πρὸς τὸ αβγ, τὸ εζ, πρὸς τὸ ηθκ, ἴσον δὲ τὸ βε, τῷ αβγ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ εζ, τῷ ηθκ. ἀλλὰ τὸ εζ, ἴσον γέγονε τῷ δ. ἄρα καὶ τὸ ηθκ, ἴσόν ἐστι τῷ δ. γέγονε δὲ τὸ αὐτὸ καὶ ὅμοιον τῷ αβγ, τῷ δοθέντι ἄρα εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον συνέστηται τὸ αὐτό.

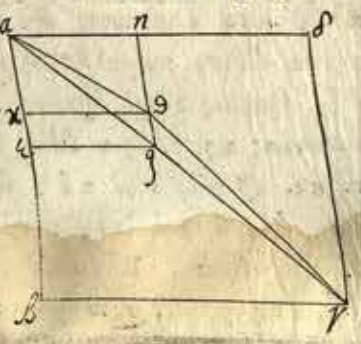
Πρό-

Πρότασις Κ ς΄. Θεώρημα.

Ε'αν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὁμοιόν τε τῷ ὅλῳ, καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

Ἀφῃρήσθω δὴ ἀπὸ τοῦ αβγδ, παραλληλογράμμου ὅμοιον παραλληλόγραμμον τὸ αεζη, καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ αβγδ, ἔχον καὶ γωνίαν κοινὴν τὴν ὑπὸ βαδ. Λέγω, ὅτι τὸ αεζη, παραλληλόγραμμον περὶ τὴν αὐτὴν αζγ, διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ αβγδ. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω αὐτῷ διάμετρος ἡ αθγ· καὶ διὰ τοῦ θ, διήχθω παράλληλος ὁποτέρα τῶν αδ, βγ, ἡ θκ.

Eucl. Lib. 6. Fig. 29.



καὶ ἐπεὶ τὸ ηκ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ αβγδ, παύπως γε, κατὰ τὴν κδ΄: τοῦ παρόντος, ὅμοιόν ἐστι τὸ ηκ, τῷ βδ. ὥστε καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, καὶ τὸν ά: ὅρον τοῦ παρόντος, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δα, πρὸς τὴν αβ, ἡ ηα, πρὸς τὴν ακ, ἀλλ' ὡς ἡ δα, πρὸς τὴν αβ, ἐστι καὶ ἡ ηα, πρὸς τὴν αε, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν εη, βδ, ἄρα, καὶ τὴν ιά: τοῦ ε: ἡ ηα, πρὸς ἑκατέραν τῶν ακ, αε, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ καὶ τὴν θ΄: τοῦ αὐτοῦ, ἡ ακ, ἴση ἐστὶ τῇ αε, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ αθγ, διάμετρός ἐστι τοῦ αγ, ἀλλ' ἡ αζγ, τοῦτε αβγδ, καὶ αεζη, διάμετρός ἐστιν. Ε'αν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς.

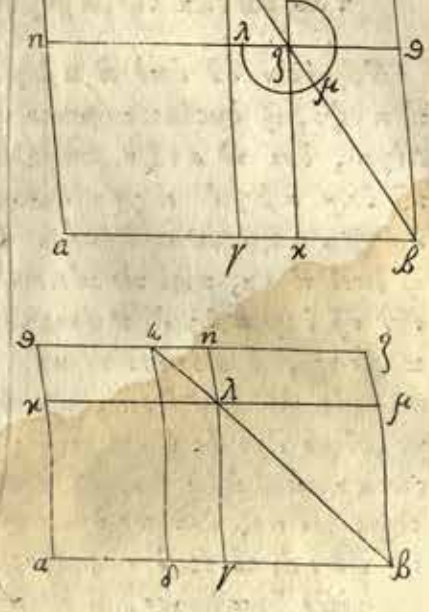
Πρότασις ΚΖ΄. Θεώρημα.

Παντὸς τοῦ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παραβαλλομένου παραλληλογράμμου, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

Ἔστω δὴ εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ. εἰπὲ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν αβ, τὸ αδ, αζ, παραλληλόγραμμα, ἐλλείποντα εἴδεσι παραλληλογράμμοις τοῖς γε, κθ, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας γβ, ἤτοι τῷ γε. Λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αγ, παραλληλόγραμμον, δηλ: τὸ αδ, μεῖζόν ἐστι τοῦ αζ. καὶ γὰρ τῇ ὑποθέσιν τὸ κθ, ὁμοιόν ἐστι τῷ γε, ὥστε, καὶ τῷ ἀνωτέρω, τὸ κθ, γε, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσι διάμετρον. ἤχθω τοίνυν διάμετρος αὐτῶν ἡ δβ, καὶ ἀναπεπληρώσθω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ τὸ γζ, ἴσον ἐστὶ τῷ ζε, κατὰ τὴν μγ΄: τοῦ ά: κοινὸν προσκείσθω τὸ κθ. ἔσαι παύτως ὅλον τὸ γθ,

ἴσον ὅλῳ τῷ κε. ἀλλὰ τὸ γθ, ἴσόν ἐστι τῷ γη, καὶ τῷ λς· τὸ αὐτὸ, ἄρα καὶ τὸ κε, ἴσόν ἐστι τῷ γη. κοινὸν δὲ λαμβανομένου τοῦ γζ, ὅλον τὸ αζ, ἴσόν ἐστι τῷ λμν, γνώμονι, τῷ δὲ λμν, γνώμονος μεῖζόν ἐστι τὸ γε, ὅλον, ἄρα τὸ γε, μεῖζόν ἐστι καὶ τοῦ αζ. ἀλλὰ τῷ γε, ἴσόν ἐστι τὸ αδ, καὶ τῷ ῥηθέισαν λς· τὸ ά· τὸ αδ, ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ αζ.

Euclid. Lib. 6. Fig. 30.



Παραβεβλήθωσαν δὲ πάλιν παρὰ τὴν αβ, τετραγώνῳ δίχα, κατὰ τὸ γ, τὰ αλ, αε, παραλληλόγραμμα, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ἡμισείας αγ, τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάττονος τῆς ἡμισείας αδ, ἐλλείποντα εἴδεσι παραλληλογράμμοις, τοῖς γμ, δζ, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αγ. Λέγω δὴ, τὸ αλ, μεῖζον εἶναι τοῦ αε. κατ' γὰρ τὴν κδ': τοῦ παρόντος, ἐπεὶ τὰ γμ, δζ, ὁμοιά εἰσι, περὶ τὴν αὐτὴν πάντως εἰσὶ διάμετρον. Ἔστω δὴ διάμετρος αὐτῶν ἡ εβ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ τὸ ζλ, ἴσόν ἐστι τῷ λθ, κατ' τὴν λς· τοῦ ά· τὸ δὲ λζ, ἴσόν ἐστι τῷ δλ, κατὰ τὴν μγ': τοῦ αὐτοῦ, πάντως καὶ τὸ δλ, ἴσόν ἐστι τῷ λθ. ἀλλὰ τὸ λθ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κε, ἄρα καὶ τὸ δλ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κε. κοινὸν δὲ εἰλήμμενον τὸ δκ, ὅλον ἄρα τὸ αλ, ὅλου τοῦ αε, μεῖζόν ἐστι. πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν δοθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΚΗ'. Πρόβλημα.

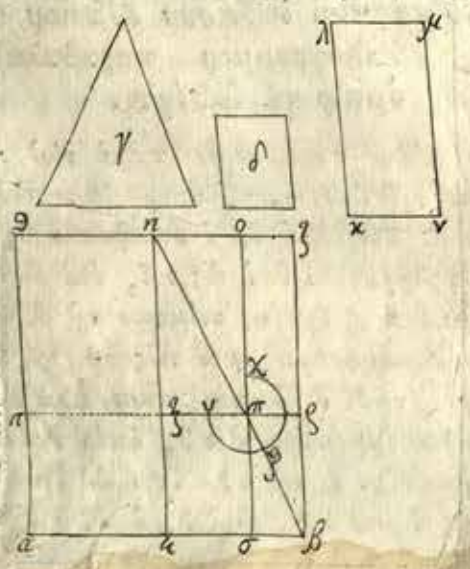
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν δοθείᾳ τῷ δοθέντι δυθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλείπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι. δεῖ δὴ τὸ διδόμενον δυθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τοῦ τε ἐλλείμματος, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας, καὶ τοῦ, ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν, παραλληλογράμμου.

Δοθείσα μὲν ἡ αβ, δυθύγραμμον δὲ τὸ γ, παραλληλόγραμμον δὲ τὸ δ. καὶ ἐπιπεπάχθω παραβεβλῆσθαι παρὰ τὴν αβ, δυθείαν παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ γ, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δ. τὸ δὲ γ, ἔστω μὴ μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς αβ, ὁμοίων ὄντων τοῦ ἐλλείμματος, τοῦτε παραβεβλημέ-

νου

σομένῃ παραλληλογράμμῳ, καὶ τῇ ἀπὸ τῆς ἡμισείας. Τμηθήτω δὴ, καὶ τὴν ι: τῇ ά: ἡ α β, δίχα καὶ τὸ ε, καὶ ἀπὸ τῆς α ε, ἀναγεγράφθω ὅμοιον τῷ δοθέντι δ, παραλληλογρ: τὸ α η, παραλληλόγρ: διὰ τῆς ι ή: τῇ παρόντος, καὶ ἀναπεπληρώθω τὸ χῆμα. εἰ οὖν τὸ τὸ α η, ἴσον ἐστὶ τῷ δοθέντι γ, γέγονε τὸ ἐπιταχθέν. ἐλλείπει γὰρ τῷ ε ζ, παραλληλογράμ: ὁμοίῳ ὄντι τῷ δ, δοθέντι. Εἰ δὲ μὴ ἴσον, ἔσαι παντὸς μεῖζον. ἢ γὰρ ἔλαττον, καθ' τινὰ ὑπόθεσιν. ἀλλὰ δὴ τὸ α η, ἴσον ἐστὶ τῷ ε ζ, καὶ τὴν λ ς': τῇ ά: ἄρα τὸ ε ζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ γ. Συνεστάθω δὴ, καὶ τινὰ κέ: τῇ παρόντος, τὸ λ κ ν μ, παραλληλόγραμμον ἴσον μὲν τῇ ὑπεροχῇ, ἣν ὑπερέχει τὸ ε ζ, τοῦ γ, ὅμοιον δὲ τῷ δοθέντι δ. καὶ ἔσαι παντὸς ὅμοιον καὶ τῷ ε ζ, καπὲ τὴν κά: τοῦ παρόντος. ἔστω δὴ, ὁμόλογος, ἡ μὲν λ κ, τῇ κε, ἡ δὲ λ μ, τῇ κζ. καὶ ἐπεὶ τὸ ε ζ, ἴσόν ἐστι συναμφοτέροις τοῖς γ, κ μ, παντως γε τὸ ε ζ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κ μ, ὥστε καὶ αἱ ὁμόλογοι αὐτοῦ πλευραὶ, μείζονές εἰσι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τοῦ κ μ. εἰλήφθω δὴ ἡ μὲν κ ξ, ἴση τῇ λ κ, ἡ δὲ κ ο, τῇ λ μ, καὶ τινὶ γ': τῇ ά: καὶ συμπεπληρώθω τὸ ξ ο, παραλληλόγραμμον, καὶ τὴν λ ά: τῇ αὐτῇ. καὶ ἔσαι ἴσον τῷ κ μ, καὶ ὅμοιον. ἀλλὰ τὸ κ μ, ὁμοιόν ἐστι τῷ ε ζ, ἄρα καὶ τὸ ξ ο, ὁμοιόν ἐστι τῷ αὐτῷ ε ζ, καὶ τινὶ κά: τῇ παρόντος, καὶ περὶ τὴν αὐτὴν παντὸς διάμετρον, καὶ τινὶ κ ς': τῇ αὐτῇ. Ἔστω δὲ διάμετρος αὐτῶν ἡ κ β. καὶ καταγεγράφθω τὸ χῆμα, καὶ ἔσαι τὸ σ ρ, ὅμοιον τῷ δ, διὰ τὸ εἶναι ὅμοιον τῷ ξ ο. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ε ζ, ἴσόν ἐστι τοῖς γ, κ μ, τῷ δὲ κ μ, ἴσόν ἐστι τὸ ξ ο, ἄρα ὁ υ φ χ, γώμων ἴσός ἐστι τῷ γ. Αὖθις ἐπεὶ τὸ ο ρ, ἴσόν ἐστι τῷ ε π, καὶ τινὶ μγ': τῇ ά: κοινῇ λαμβανομένῃ τῇ σ ρ, ἔσαι ὅλον τὸ ο β, ἴσον ὅλῳ τῷ α ρ. ἀλλὰ τὸ ε ρ, ἴσόν ἐστι τῷ α ξ, καὶ τινὶ λ ς': τῇ αὐτῇ, ἄρα καὶ τὸ ο β, ἴσόν ἐστι τῷ α ξ. κοινῇ δὲ αὐθις λαμβανομένῃ τῇ ε π, ἔσαι ὅλον τὸ ω π, ἴσον τῷ υ φ χ, γώμονι, ἀλλ' ὁ υ φ χ, γνώμων, ἴσος δέδεικται τῷ γ, ἄρα καὶ τὸ α π, ἴσόν ἐστι τῷ γ, ἐλλείπει δὲ τῷ σ ρ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δ. παρὰ τινὰ δοθεῖσαν ἄρα δυθεῖαν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euclid. lib. 6. Fig. 31.

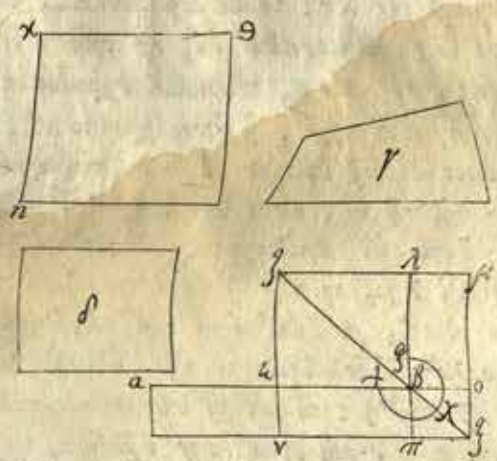


Πρό-

Πρότασις ΚΘ'. Πρόβλημα.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἔστω παραβαλεῖν παρὰ τὴν αβ, δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ δοθέντι γ, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ. Τετμήσθω δὴ ἡ δοθεῖσα αβ, εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ ε, διὰ τῆς ί: τῇ ά: καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς εβ, διὰ τῆς εή: τῷ παρόντος παραλληλόγραμμον τὸ ελ, ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τῷ δ. εἰ- Eucl. Lib. 6. Fig. 32.



πὰ συναμφοτέροις μὲν τοῖς ελ, γ, ἴσον, τῷ δὲ δ, ὅμοιον, συνεστάθω παραλληλόγραμμον τὸ ηθ, ὅπερ πάντως ὁμοιάνεται καὶ τῷ ελ· ἔστω δὴ ὁμόλογος μὲν ἡ κθ, τῇ ζλ, ἡ δὲ κη, τῇ ζε. καὶ ἐπεὶ τὸ ηθ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ελ, μεῖζον δύναται καὶ ἡ μὲν κθ, τῆς ζλ, ἡ δὲ κη, τῆς ζε. ἐκβεβλήσθωσαν τοίνυν κατὰ τὸ συνεχὲς αἱ ζλ, ζε. καὶ ἔστω ἡ μὲν ζλμ, ἴση τῇ κθ, ἡ δὲ ζεν τῇ κη, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ μν, καὶ ἔστι πάντως ἴσον τῷ ηθ. ἀλλὰ τῷ ηθ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ελ, ἄρα καὶ τὸ μν, ὅμοιόν ἐστι τῷ ελ· ὥστε τὰ ελ, μν, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσὶ διάμετρον, κατὰ τὸ κς': τῇ παρόντος. Ἔστω δὴ διάμετρος αὐτῶν ἡ ζξ. καὶ ἐπεὶ τὸ ηθ, ἴσόν ἐστι τοῖς ελ, γ, πάντως γε καὶ τὸ μν, ἴσόν ἐστι τοῖς ελ, γ· κοινοῦ δὲ ἀφῃρημένου τοῦ ελ, ἐναπολείπεται ὁ φχψ γνώμων, ἴσος τῷ γ. Λύθεις ἐπεὶ τὸ μβ, ἴσόν ἐστι τῷ βν, κατὰ τὴν μγ': τῇ ά: ἔστι δὲ καὶ τὸ αν, ἴσον τῷ βν, κατὰ τὴν λς': τῇ αὐτῇ, ἄρα τὸ αν, ἴσόν ἐστι τῷ μβ, κατὰ τὸ ά: ἀξίωμα. κοινὸν εἰλήφθω τὸ ον, ὅλον ἄρα τὸ αξ, ἴσόν ἐστιν ὅλῳ τῷ φχψ, γνώμονι, ἀλλ' ὁ φχψ, γνώμων, ἴσός ἐστι τῷ γ. ἄρα καὶ τὸ αξ, ἴσόν ἐστι τῷ γ. ἔστι δὲ τὸ πο, ὅμοιον τῷ δ, διὰ τὸ εἶναι ὅμοιον τῷ ελ, κατὰ τὴν κά: τῇ παρόντος. παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα αβ, εὐθεῖαν παραβέβληται παραλληλόγραμμον τὸ αξ, ἴσον τῷ δοθέντι γ, ὑπερβάλλον τῷ πο, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι δ.

Πρό-

Πρότασις Λ': Πρόβλημα.

Τῳ δοθείσαν εὐθείαν πεπερασμένην ἄκρον, καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ε'στω δὴ τεμεῖν τὴν α β, δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον. Ἀναγεγράφθω μεν οὖν ἀπὸ τῆς α β, τετράγωνον τὸ β γ, καὶ τετμήσθω ἡ α γ δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν α γ, παραλληλόγραμον τὸ γ δ, ἴσον τῷ β γ, τετραγώνῳ, ὑπερβάλλον εἴδει τῷ α δ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ αὐτῷ β γ, τετραγ: καὶ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ἔσται πάντως καὶ τὸ α δ, τετράγωνον. καὶ ἐπεὶ τὸ γ δ, ἴσόν ἐστι τῷ γ β, κοινοῦ ἀφῃρημένου τοῦ α ζ, ἐναπολείπεται τὸ α δ, ἴσον τῷ ε θ. ἔστι δὲ τῷ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον. ἄρα, καὶ τὸ ι δ': τοῦ παράντος, ἀντιπεπόνθασιν αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ τῶν α δ, ε θ. ὡς ἄρα ἡ ζ ε, πρὸς τὴν ε δ, οὕτως ἡ α ε, πρὸς τὴν ε β, ἀλλ' ἡ μὲν ζ ε, ἴση ἐστὶ τῇ α γ, κατὰ τὸ λ δ': τοῦ ά: ἥτοι τῇ α β, ἡ δὲ ε δ, τῇ α ε, ἄρα ὡς ἡ α β, πρὸς τὸ α ε, οὕτως ἡ α ε, πρὸς τὴν ε β. μείζων δὲ ἡ α β, τῆς α ε, μείζων ἄρα καὶ ἡ α ε, τῆς ε β. ὅπερ δέ ἐστιν, ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλαττον, ἄκρον, καὶ μέσον λέγεται τετμῆσθαι λόγον, κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ παράντος. ἡ α β, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον τέτμηται λόγον, καὶ τὸ προσαχθέν.

Eucl. lib. 6. Fig. 33.

Ἄλλως. Τετμήσθω ἡ α β, δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ τὸ γ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν α β, β γ, περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς α γ, τετραγώνῳ, καὶ τοῦ ι ά: τοῦ β': καὶ ἔσονται πάντως αἱ α β, α γ, γ β, ἑξῆς ἀνάλογον. τετμήσθω ὡς ἡ ὅλη α β, πρὸς τὸ α γ, μεῖζον τμῆμα, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλαττον, ὥστε καὶ ὅπου μέσον, καὶ ἄκρον τέτμηται λόγον.

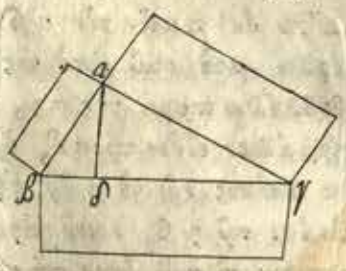
Πρότασις ΛΑ': Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τοῦ ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν τοῦ ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ε'στω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ α β γ, ὀρθὴν ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ β α γ. Λέγω δὴ, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς β γ, εἶδος, ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν α β, α γ, εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α, κάθετος ἐπὶ τὴν β γ, ἡ α δ. καὶ πάντως γε καὶ τοῦ ά: τοῦ παράντος τὰ α β δ, α γ δ, τρίγωνα, ὁμοιά εἰσι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ἔστιν ἄρα κατὰ τὸν ά: ὅρον τοῦ παράντος,

πος, ὡς ἡ γβ, πρὸς τὴν βα, ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, καὶ ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γα, ἡ γα, πρὸς τὴν γδ. ὥστε καὶ τὸ β′: πόρισμα τῆς κ′: τοῦ παρόντος, ὡς ἡ γβ, ά: πρὸς τὴν βδ, γ′: οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς γβ, ά: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, β′: ὡς δὲ ἡ βγ, πρώτη πρὸς τὴν γδ, γ′: οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, ά: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, β′: ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς τὰς βδ, δγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδη, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἀλλ' ἡ βγ, ἴση ἐστὶ ταῖς βδ, δγ, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Eucl. Lib. 6. Fig. 34.



Ἄλλως. Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι, λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, καὶ τὸ ά: πορίσμα τῆς κ′: τοῦ παρόντος, πάντως γε τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, εἶδος, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τοῦ τῆς βγ, πρὸς τὴν αβ. ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγωνον, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγ: ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τοῦ τῆς βγ, πρὸς τὴν αβ, καὶ τὸ αὐτὸ πόρισμα, ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετρ: οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγ. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τετράγ. οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ὅμοιόντε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγ. πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αγ, τετράγωνα, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδη, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, αγ, τετραγώνοις, καὶ τῷ μζ′: τοῦ ά: ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, εἶδος, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, αγ, εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις ἄρα τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος, ἴσον ἐστὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΒ′: Θεώρημα.

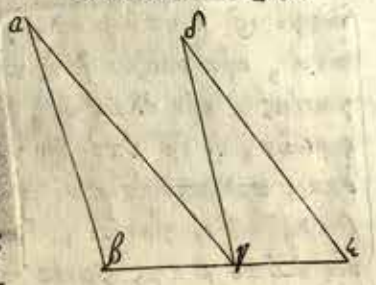
Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Τρίγωνα ἤτοι τὰ αβγ, δγε, ἔχοντα τὰς βα, αγ, καὶ γδ, δε, πλευρὰς αὐτῶν ἀνάλογον, ὡς τὴν βα, πρὸς τὴν αγ, οὕτω τὴν γδ, πρὸς τὴν δε. Συν-

συν-

πθήπωσαν καὶ μίαν γωνίαν, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς παραλλήλους εἶναι, τὴν μὲν βα, τῇ γδ, τὴν δὲ αγ, τῇ δε. Λέγω, ὅτι αἱ λοιπαὶ αὐτῶν πλευραὶ βγ, γε, ἐπ' εὐθείας εἰσίν. Εἰ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς αβ, δγ, πέπτωκε ἡ αγ, παντὸς γε, καὶ τὴν κδ': τῶν ἀ: ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγδ, ἐναλλάξ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ γδε, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ αγδ, ὥστε ἡ πρὸς τῷ α, γωνία τῇ αβγ, τετγώνε ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ, τῇ δγε, καὶ τὰ ἀ: ἀξίωμα. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ βα, αγ, ἀνάλογοι ταῖς γδ, δε, ἄρα καὶ τὴν ς': τῶν παράντος, τὰ αβγ, δγε, τετγωνα ἰσογώνια εἰσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δγε. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ αγδ, ἴση, ὡς δέδεικται, ἄρα κοινῆς λαμβανομένης τῆς ὑπὸ βγα, παντὸς γε αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ βγα, αγδ, δγε, ἀλλ' αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, τρεῖς τῶν τετγώνε γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ τὴν λβ': τῶν ἀ: ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ βγα, αγε, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ καὶ τὴν ιγ': τῶν αὐτῶν αἱ βγ, γε, εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας εἰσίν. Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα συνισταθῇ καὶ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 6. Fig. 35.

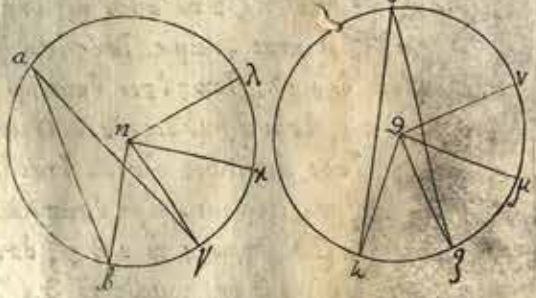


Πρότασις ΛΓ΄: Θεώρημα.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι, ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἂν τε πρὸς τοῖς κέντροις συνεστάμενοι.

Ἐν τοῖς αβγ, δεζ, ἴσοις κύκλοις ἔστωσαν γωνίαι πρὸς μὲν τοῖς η, θ, κορυφοῖς αἱ ὑπὸ βηγ, εθζ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις, αἱ ὑπὸ βαγ, εδζ. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ βγ, περιφέρεια πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἥτε ὑπὸ βηγ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εθζ, καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, πρὸς τὴν ὑπὸ εδζ. εἰλήφθωσαν γὰρ περιφέρειαι ὁσαιδηποτοῦν ἴσαι τῇ μὲν βγ, αἱ γκ, κλ, τῇ δὲ εζ, αἱ ζμ, μν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηκ, ηλ, θμ, θν· καὶ ἐπεὶ αἱ μὲν γκ, ηλ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῇ βγ, αἱ δὲ ζμ, μν, τῇ εζ, παντὸς γε καὶ γωνίαι αἱ μὲν ὑπὸ γηκ, κηλ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῇ ὑπὸ βηγ, αἱ δὲ ὑπὸ ζθμ, μθν, τῇ ὑπὸ εθζ. ὥστε ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ βλ, περιφέρεια τῆς βγ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ βηλ, γωνία τῆς

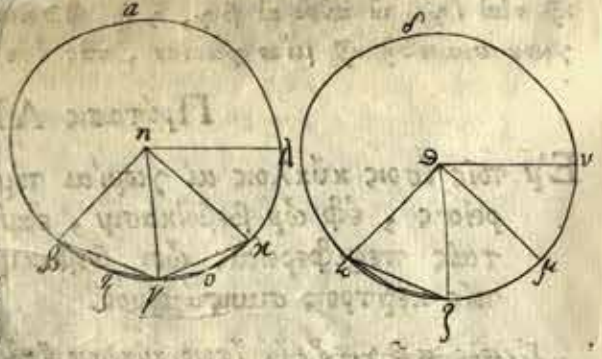
Eucl. Lib. 6. Fig. 36.



ὑπὸ βηγ, ὁσαπλασίων δὲ ἡ εν περιφέρεια τῆς εζ, τοσαυταπλασίων καὶ ἡ ὑπὸ εθν, γωνία, τῆς ὑπὸ εθζ. ὥστε εἰ ἡ βλ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ εν, πάντως γε καὶ ἡ ὑπὸ βηλ, γωνία, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εθν, διὰ τὸ τῶν κύκλων ἰσότητα, κἂν μείζων ᾖ ἡ περιφέρεια τῆς περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ γωνία τῆς γωνίας, κἂν ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων ἄρα μεγεθῶν τῶν βγ, εζ, περιφερειῶν, καὶ τῶν ὑπὸ βηγ, εθζ, γωνιῶν, εἴληπται τῶν μὲν βγ, εζ, ἰσάκις πολλαπλάσια αἱ βλ, εν, περιφέρειαι, τῶν δὲ ὑπὸ βηγ, εθζ, αἱ ὑπὸ βηλ, εθν, γωνίαι, ἄρα, κατὰ τὸν ε' ὅρον τὸ ε': ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἡ ὑπὸ βηγ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ εθζ, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ βηγ, διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ, κατὰ τὸ κ': τοῦ γ': ἡ δὲ ὑπὸ εθζ, τῆς ὑπὸ εδζ. ἄρα καὶ ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἡ ὑπὸ βαγ, πρὸς τὴν ὑπὸ εδζ, ὅπερ ἐδεῖ τὸ πρῶτον.

Λέγω δ' ὅτι καὶ ὁ ηβγ, τομεὺς πρὸς τὸν θεζ, τομέα ἔχει, ὡς ἡ βγ, περιφέρεια, πρὸς τὴν εζ, περιφέρειαν. εἰλήφθωσαν γὰρ τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῶν βγ, γκ, περιφερειῶν τὰ ξ, ο. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βγ, γκ, βξ, ξγ, γο, οκ. καὶ ἐπεὶ αἱ βη, ηγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς γη, ηκ, κατὰ τὸν ι': ὅρον τὸ α': ἔστι δὲ καὶ βάσις ἡ βγ, βάσει τῇ γκ, ἴση, καὶ τὸ ηβγ, ἄρα τριγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ εθζ, τριγ: Αὐθις ἐπεὶ ἡ βγ, περιφέρεια, ἴση ἐστὶ τῇ γκ, δῆλον, ὅτι καὶ λοιπὴ ἡ βλγ, ἴση ἐστὶ λοιπῇ τῇ γβλκ, ὥστε καὶ τὴν κζ: τοῦ γ': καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βξγ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ γοκ. ἄρα τὰ βγξ, γκο, τμήματα, ὅμοιά εἰσι, κατὰ τὸν ι': ὅρον τὸ γ': καὶ δὲ τῶν κζ': τοῦ αὐτοῦ καὶ ἴσα. ἀλλὰ καὶ τὰ βηγ, γηκ, τρίγωνα ἴσα ἐστίν, ὡς δέδεικται, ἄρα ἴσός ἐστι καὶ ὁ ηβγ, τομεὺς τῷ ηγκ, τομεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὁ ηκλ, ἴσός ἐστιν ἑκατέρῳ τῶν ηβγ, ηγκ. οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς ηβγ, ηγκ ηκλ, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. Ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ θεζ, θζμ, θμν, τομεῖς, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. Ἴσαι δὲ ἀλλήλαις εἰσὶν, αἵ τε βγ, γκ, κλ, καὶ εζ, ζμ, μν, περιφέρειαι, ἄρα ὁσαπλασίων ἐστὶν ηβλ, τῆς βγ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ηβλ, τομεὺς τοῦ ηβγ, ὁσαπλασίων δὲ ἡ εν, περιφέρεια τῆς εζ, τοσαυταπλασίων καὶ ὁ θεν, τομεὺς τοῦ θεζ, τομέως. ὥστε ἐὰν ἡ βλ, περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ εν, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ηβλ, τομεὺς τῷ θεν, τομεῖ, κἂν μείζων ἡ περιφέρεια τῆς περιφερείας, μείζων καὶ ὁ τομεὺς τοῦ τομέως, κἂν ἐλάσσων, ἐλάσσων.

Eucl. lib. 6. Fig. 37.



πσ-

παράλληλα ἄρα μεγεθῶν τῶν βγ, εζ, περιφερειῶν, καὶ ἡ βγ, θεζ, τομέων, ἐπεὶ εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν βγ, εζ, περιφερειῶν αἱ βλ, εν, περιφέρειαι, τῆς δὲ ἡ βγ, θεζ, τομέων οἱ ἡ βλ, θεν, τομεῖς, ἄρα καπὰ τὸν ε΄. ὅρον τὸ ε΄: ὡς ἡ βγ, περιφέρεια πρὸς τὴν εζ, οὕτως ὁ ἡ βγ, τομεὺς πρὸ τὸν θεζ, τομέα. ὅπερ ἦν τὸ β΄. Ἐν τοῖς ἴσοις ἄρα κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, εἴτε πρὸς τοῖς κέντροις, εἴτε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνεστάμενοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα, οὕτω καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

Τέλος τοῦ Ε΄κτου τῶν Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΟΥ ΕΒΔΟΜΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Ὅρος Πρῶτος.

Μονάς ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.

Τοῦτ' ἔστι μονάς ἐστι τὸ ἀμερὲς καὶ ἁπλοῦν, καθ' ὃ καὶ πᾶν ὅλον, ὡς ἀδιαίρετον ἐννοούμενον, εἷν λέγεται· καὶ πᾶν, ὃ μέρος μὲν ἕτερα γίνεσθαι δυνάται, αὐτὸ δὲ πᾶν ἐκ μερῶν ἀ συνίσταται, ὡς ἐπὶ τῶν Γεωμετρικῶν, παραδείγματος χάριν μέτρων, μονὰς λέγεται ὁ δάκτυλος, ὅτι ὁ δάκτυλος μέτρον μὲν τοῦ Ποδὸς, τοῦ Βήματος, τῶν Σπιθαμῶν, καὶ τῶν λοιπῶν Γεωμετρικῶν μέτρων γίνεται. πάσου δὲ ἀδυνάτου μέτρον ὑποτίθεται. καὶ μίμησιν δὲ πάσου, καὶ ὁ Πούς, εἰς λέγεται, καὶ τὸ Βῆμα οὕ, καὶ πᾶν ἕτερον. ἀλλά γε καὶ ἕνος τινὸς μονάδα ἀκριβῶς ἀ παρίστησι. ὁ μὲν γὰρ Πούς δυνάται διαιρεθῆναι ἐπ' ἄπειρον, καὶ αἰσθήσει ὑποπίπτει, ἡ δὲ μονὰς ἀδιαίρετος ὅλως, καὶ νῷ μόνῳ καταληπτὴ, ὡς καὶ τὸ σημεῖον, ἀρχὴ γὰρ ἑκάστη παρὰ τοῖς Ἀριθμητικοῖς ὑποτίθεται.

Β'. Ἀριθμός ἐστι, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

Τυπέστιν Ἀριθμός ἐστιν ἡ πολλῶν μονάδων συνάψις. ὡς ὁ α, β, γ, καὶ αἱ λοιπαὶ ἀριθμοί. ὥστε ἐν πάσῃ συνάγεται, ὅπερ ὁ 2 πλῆθος μονάδων ἀ παρεμφαίνει, (τὸ γὰρ πλῆθος ἀπὸ τοῦ 3 ἄρχεται) κυρίως ἀριθμὸς ἀ λέγεται. ἔτι τε ἀδυνάτου τῶν σχημάτων διὰ τοῦ 2 παρίστατο, ἄρα ἀριθμὸς κυρίως ἐκ ὀνομάζεσθαι δίον, ἀλλὰ καταχρηστικῶς.

3	4	5
α	β	γ

Γ'. Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμερῇ τὸν μείζονα.

Ὡς ὁ δ, μέρος ἐστὶ τῶν ε, ζ, η, καὶ τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν, ὅσους καταμετρεῖ. Ἐπεὶ δὲ ὁ δ, τὸν μὲν ε, κατὰ τὰς ἐν τῷ θ, μονάδας μετρεῖ, ὁ θ, λέγεται τοῦ ε, μέρος ὁμώνυμον τῷ δ. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸν ζ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ κ, καὶ τὸν η, κατὰ τὰς ἐν τῷ λ, λέγεται ὁ κ, μέρος τοῦ ζ, καὶ ὁ λ, τοῦ η, ὁμώνυμον τῷ δ. καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὡσαύτως. ἑκάστῳ τοίνυν ἀριθμῷ μέρει ὄντι ἑτέρῳ, ὁμώνυμος λέγεται αὐτῷ ὁ τοσαύτας μονάδας ἔχων, ὁσάκις ἕπος τὸν, ἕ μέρος ἐστὶ, μετρεῖ.

3	6	9	12
δ	ε	ζ	η
	2	3	4
	θ	κ	λ

Δ'. Μέρη δὲ, ὅταν οὐ καταμετρεῖ.

Τοιοῦτόν ἐστιν ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν πολλαπλασιαζόμενος, ἢ ἐλλείπει, ἢ ὑπερέχει τοῦ μείζονος, οὐδέποτε δὲ ἀποπληροῖ ὡς ὁ α, τοῦ β, γ, καὶ λοιπῶν.

4	6	10	
α	β	γ	

Ε'. Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

Ὡς ὁ δ, τοῦ ε, ὁ ζ, τοῦ η, καὶ ὅσοι ἄλλοι ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος δὶς, ἢ τρὶς, ἢ τετράκις, ἢ πλεονάκις καταμετροῦνται.

6	3	12	4
δ	ε	ζ	η

ς'. Ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν, ὁ δίχα διαιρούμενος.

Τοιοῦτοί εἰσιν ὁ θ, ι, κ, λ, καὶ ὅσοι ἄλλοι δίχα διαιρεῖσθαι δύνανται.

4	6	8	10
θ	ι	κ	λ

Ζ'. Περισσὸς δὲ, ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα, ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου.

Τοιοῦτοί εἰσιν, ὁ μ, ν, ξ, ο, καὶ ὅσοι δίχα διαιρεθῆναι οὐ δύνανται. ὧν ὁ μὲν μ, τοῦ θ, ὁ δὲ ν, τοῦ ι, ὁ δὲ ξ, τοῦ κ, καὶ ὁ ο, τοῦ λ, μονάδι ὑπερέχει.

5	7	9	11
μ	ν	ξ	ο

Η'. Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος, κατ' ἄρτιον ἀριθμόν.

Τοιοῦτόν εἰσιν ὁ π, ρ, σ, ὧν ὁ μὲν π, μετρεῖται ὑπὸ τοῦ τ, ὁ δὲ ρ, ὑπὸ τοῦ υ, καὶ ὁ σ, ὑπὸ τοῦ φ, καὶ πάντες κατὰ τὸν χ. εἰσὶ δὲ πάντες ἄρτιοι, ὑφ' ὧν μετροῦνται, καθ' ὃν μετροῦνται.

8	16		32
π	ρ		σ
4	8		16
τ	υ		φ
	2		
	χ		

Θ': Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος, καὶ περισσὸν ἀριθμόν.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ α, β, γ, ὧν ἕκαστος μιγεῖται ὑπὸ τοῦ δ, ὅστις ἐστὶν ἄρτιος, καὶ ὁ μὲν α, μιγεῖται, καὶ τὸν ε, ὁ δὲ β, καὶ τὸν ζ, καὶ ὁ γ, καὶ τὸν η. οἵτινες πάντες εἰσὶ περισσοί.

12	20	28
α	β	γ
4	3	5	7
δ	ε	ζ	η

Ι': Περισάκις δὲ περισσός ἐστιν ἀριθμός, ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος καὶ περισσὸν ἀριθμόν.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ θ, ι, κ, ὧν ἕκαστος μιγεῖται ὑπὸ τοῦ λ, περισσοῦ ἀριθμοῦ. καὶ ὁ μὲν θ, καὶ τὸν μ, ὁ δὲ ι, καὶ τὸν ν, ὁ δὲ κ, καὶ τὸν ξ, οἵτινές εἰσι πάντες περισσοί.

9	15	21
θ	ι	κ
3	3	5	7
λ	μ	ν	ξ

ΙΑ': Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν, ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.

Τοιοῦτοί εἰσι πάντες οἱ περισσοὶ, ὡς ὁ ο, π, ρ, σ, καὶ τ. καὶ ὅσοι ἑνὶ ἀριθμῷ μιγέντα δύνανται ἢ μονάδι, ὡς εἶπον.

3	5	7	11	13
ο	π	ρ	σ	τ

ΙΒ': Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ φ, χ, καὶ ψ, ω, καὶ ὅσοι κοινὸν μέτρον οὐκ ἔχουσιν, ἢ τὴν μονάδα.

4	5	8	9
φ	χ	ψ	ω

ΙΓ': Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.

Τοιοῦτοί εἰσιν οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ, καὶ πάντα τὰ τοῦ ἀρτίου εἴδη, δηλ: οἱ ἀρτιάκις ἄρτιοι, οἱ ἀρτιάκις περισσοὶ, καὶ οἱ περισσάκις ἄρτιοι, ἔτι δὲ καὶ οἱ περισσάκις περισσοί. ὡς οἱ α, β, γ, δ,

8	10	12	9
α	β	γ	δ

ΙΔ': Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ δ, ε, ζ, η, ὧν οἱ μὲν δ, ε, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν θ, καὶ κ, οἱ δὲ ε, ζ, η, τὸν λ, μ, καὶ ζ,

4	8	6	12
δ	ε	ζ	η
2	4	2	3	6
θ	κ	λ	μ	ζ

ΙΕ΄: Ἀριθμὸς ἀριθμοῦ πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις.

Παραδ: χάρ: ὁ π, τότε λέγεται πολλαπλασιάζειν τὸν ρ, ὅτε ὁ ρ, τοσαυτάκις λαμβανόμενος, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ π, μονάδες ποιῇ τὸν σ. ὥστε εἶναι, ὡς ὁ σ, πρὸς τὸν ρ, ὁ π, πολλαπλασιάζων πρὸς τὸν τ, μονάδα.

1	3	4	12
τ	π	ρ	σ

Ις΄: Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

Παραδ: χάρ: ὁ π, τὸν ρ, πολλαπλασιάσας τὸν σ, ποιείτω, ὁ σ, ἄρα ἐπίπεδος καλεῖται. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ ὁ π, καὶ ρ,

3	4	12
π	ρ	σ

ΙΖ΄: Ὅταν δεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς καλεῖται. πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

Παραδ: χάρ: οἱ α, β, γ, πολλαπλασιασάτωσαν ἀλλήλους. καὶ ὁ μὲν β, τὸν γ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω, ὁ δὲ α, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω, ὁ ε, ἄρα στερεὸς καλεῖται. πλευραὶ δὲ τοῦ ε, οἱ α, β, γ.

3	4	5	20	60
α	β	γ	δ	ε

ΙΗ΄: Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἰσάκις ἴσος, ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ ζ, κ, θ, καὶ οἱ ὅμοιοι. ἑκάστη γὰρ τῶν ζ, κ, θ, αἱ πλευραὶ πᾶσαι ἴσαι, καὶ ἕκαστος ὑπὸ δύο ἀριθμῶν ἴσων περιέχεται. ὁ γὰρ ζ, ὑπὸ τῶν ι, κ, περιέχεται. ὁ δὲ κ, ὑπὸ τῶν λμ, καὶ ὁ θ, ὑπὸ τῶν ν ξ, ὥστε ἀρκεῖ μόνον τὸν ἀριθμὸν ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιαθῆναι, καὶ γενήσεται ὁ τετράγωνος.

9	16	25
ζ	κ	θ

3	3	4	4	5	5
ι	κ	λ	μ	ν	ξ

ΙΘ'. Κύβος δὲ, ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις, ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ π, ρ, σ, καὶ οἱ ὅμοιοι. ἕκαστος γὰρ τῶν π, ρ, σ, ὑπὸ ξιῶν ἴσων ἀριθμῶν περιέχεται. ὁ μὲν γὰρ π, ὑπὸ τῶν α, β, γ, ὁ δὲ ρ, ὑπὸ τῶν δ, ε, ζ, καὶ ὁ σ, ὑπὸ τῶν η, θ, ι, περιέχεται.

27	64	125	
π	ρ	σ	
9	16	25	
333	444	555	
αβγ	δεζ	ηθι	

Κ'. Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ α' τὸν β': καὶ ὁ γ' τὸν δ': ἰσάκις ἢ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσι.

Παραδ: χάρ: ὅταν ᾖ ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ μ, πρὸς τὸν ν, οἱ κ λ, μ ν, ἀριθμοὶ, εἰσὶν ἀνάλογον. ὅτι ὁσαπλάσιός ἐστιν ὁ κ, τοῦ λ, τοσαυταπλάσιος ὁ μ, τοῦ ν· καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ λ, τοῦ κ, τοῦτο αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὁ ν, τοῦ μ, ὡσαύτως καὶ οἱ ξ, π, ρ, ἀνάλογόν εἰσιν. ὅτι ἃ μέρη ἐστὶν ὁ π, τοῦ ξ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ρ, τοῦ π,

4	2	6	3
κ	λ	μ	ν
9	6	4	
ξ	π	ρ	

ΚΑ'. Ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἢ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.

Παραδ: χάρ: τῶν μὲν ἐπιπέδων ὅμοιοι ἀριθμοί εἰσιν, οἱ α, β, ὅτι τοῦ μὲν α, πλευραί εἰσιν, οἱ γ, δ. τοῦ δὲ β, οἱ ε, ζ, καὶ ἔστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. τῶν δὲ στερεῶν ὅμοιοί εἰσιν, οἱ η, θ. ὅτι τοῦ μὲν η, πλευραί εἰσιν, οἱ ι, κ, λ, τοῦ δὲ θ, οἱ μ, ν, ξ. καὶ ἔστιν ὡς ὁ ι, πρὸς τὸν κ, οὕτως ὁ μ, πρὸς τὸν ν, καὶ ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν λ, ὁ ν, πρὸς τὸν ξ.

8	32	24	48		
α	β	γδ	εζ		
	48		162		
	η		θ		
2	4	6	3	6	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ

ΚΒ'. Τέλειος ἀριθμός ἐστιν, ὁ τοῖς αὑτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν.

Τοιοῦτοί εἰσιν, οἱ π, ρ, ὅτι τοῦ μὲν π, μέρη εἰσὶν, οἱ σ, τ, καὶ α, μονὰς, ἅτινα συναπτόμενα συμπληροῦσι τὸν π· τοῦ δὲ ρ, μέρη εἰσὶν, οἱ β, γ, δ, ε, καὶ ἡ ζ, μονὰς, ὧν συναπτομένων ἀποπληροῦται ὁ ρ, ἀριθμός.

6	28	3	2	1	
π	ρ	σ	τ	α	
14	7	4	2	1	
β	γ	δ	ε	ζ	

Πρό-

Πρότασις Α΄: Θεώρημα.

Ε΄αν δύο ἀριθμῶν ἀφίσων ἐκκειμένων, ἀφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ὑπὸ τοῦ μείζονος, ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ αὐτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο ἤδη ἀριθμῶν τῶν α β, γ δ, ἐκκειμένων, καὶ ἀφαιρουμένου τοῦ ἐλάσσονος γ δ, παρὰ τοῦ μείζονος α β, ὁ λειπόμενος α ζ, μὴ καταμετρείτω τὸν πρὸ αὐτοῦ ζ β, τοῦ δὲ α ζ, παρὰ τοῦ γ δ, ἀφαιρουμένου, ὁ λειπόμενος γ η, μὴ καταμετρείτω τὸν η δ. τοῦ δὲ γ η, παρὰ τοῦ α ζ, ἀφαιρουμένου, λειφθήτω ἡ α θ, μονάς. Λέγω τοὺς α β, γ δ, πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, καὶ τῷ α θ, μονάδα μόνῳ τούτους μετρεῖν, εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός, καὶ ἔστω ἕτος ὁ ε. Euclid. Lib. 7. Fig. 1.

Ἐπεὶ τοίνυν ὁ ε, τὸν γ δ, μετρεῖ, μετρήσει πάντως καὶ τὸν β ζ, τὸν ἴσον τοῦ γ δ, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν α β, μετρήσει ἄρα καὶ τὸν α ζ, ἔτι δὲ καὶ τὸν δ η, τὸν ἴσον τοῦ α ζ, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν γ δ, μετρήσει ἄρα καὶ τὸν γ η, ἔτι δὲ καὶ τὸν θ ζ, ἴσον τοῦ γ η, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν α ζ, μετρήσει ἄρα καὶ τὴν α θ, μονάδα, καὶ ἔστιν ἀριθμὸς ὁ ε, ὅπερ ἄτοπον. Οἱ α β, γ δ, ἄρα ἀριθμοὶ μόνῃ τῇ α θ, μονάδι μετροῦνται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Β΄: Πρόβλημα.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Δύο ἤδη ἀριθμῶν μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τῶν α β, γ δ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον δέον εὑρεῖν. εἰ μὲν οὖν ὁ ἐλάττων γ δ, μετρεῖ τὸν μείζονα α β, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ὁ γ δ, ἄρα τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον ἔσται. οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ δ γ, αὐτὸν μετρήσει. εἰ δὲ μὴ μετρεῖ ὁ γ δ, τὸν α β, ἀφαιρεθῶ ὁ γ δ, παρὰ τοῦ α β, καὶ ἐναπολειφθήτω ὁ α ε. τοῦ δὲ α ε, παρὰ τοῦ γ δ, ἀφαιρουμένου, ἐναπολειφθήτω ὁ γ ζ, ὁ δὲ γ ζ, τὸν α ε, μετρείτω. Λέγω τὸν γ ζ, κοινὸν μέτρον εἶναι τῶν α β, γ δ. ἐπεὶ γὰρ ὁ γ ζ, μετρεῖ τὸν α ε, μετρήσει πάντως καὶ τὸν δ ζ, τὸν ἴσον τῷ α ε, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν. μετρεῖ ἄρα καὶ ὅλον τὸν γ δ, ἔτι δὲ καὶ τὸν ε β, τὸν ἴσον τῷ γ δ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν α ε, μετρήσει ἄρα καὶ ὅλον τὸν α β. ἐπεὶ δὲ μετρεῖ καὶ τὸν γ δ, ἄρα κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις ἀριθμὸς τοὺς α β, γ δ, μείζων τοῦ γ ζ, καὶ ἔστω ὁ η. ἐπεὶ οὖν ὁ η, μετρεῖ τὸν γ δ, μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν ε β, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν α β, μετρήσει ἄρα

καὶ τὸν δζ, τὸν ἴσον τῷ αε, μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν γδ, μετρήσει ἄρα καὶ τὸν γζ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἀδύνατον, ὁ γζ, ἄρα ἐστὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν αβ, γδ, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρεῖ.

Πρότασις Γ'. Πρόβλημα.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Euclid. Lib. 7. Fig. 2.

Τριῶν δὴ ἀριθμῶν τῶν αβγ, μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους δοθέντων, ὅπως αὐ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον, εὑρεθήτω πρῶτον διὰ τῆς ἀνωτέρω, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν α, β, καὶ ἔστω ὁ δ. εἰ οὖν ὁ δ, καὶ τὸν γ, μετρεῖ, ὁ δ, ἔσαι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν α, β, γ. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον, εἰ γὰρ μή, ἔστω μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν αβγ, ὁ ε, μείζων τοῦ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ ε, μετρεῖ τοὺς α β, μετρήσει καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον, καὶ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, τοῦτο δ' ἐστὶν ὁ δ, ἄρα ὁ ε, μετρήσει τὸν δ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσω, ὅπερ ἀδύνατον.

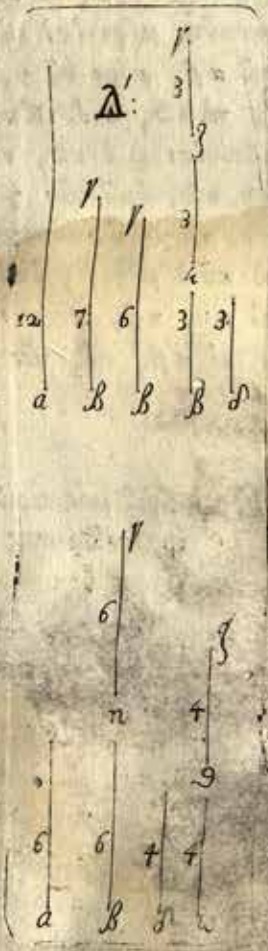
Εἰ δὲ ὁ δ, τὸν γ, ἀμετρεῖ, δειχθήσεται πρῶτον τοὺς γ δ, μὴ πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι. ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ μετρῶν αὐτοὺς ἀριθμὸς, μετρήσει καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον, καὶ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω, τοιοῦτοι τὸν δ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γ, ἄρα οἱ γ δ, οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. εὑρεθήτω τοίνυν τῶν γ δ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω ὁ ε, ὁ ε, τοίνυν μετρῶν τὸν δ, τὸ μέγιστον δηλ: κοινὸν μέτρον τῶν α β, μετρήσει πάντως καὶ τοὺς α β, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γ, ὁ ε, ἄρα ἐστὶ τὸ κοινὸν μέτρον τῶν α, β, γ. Λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή, ἔστω τοῦτο μείζων, μετρῶν τοὺς α, β, γ, ὁ ζ. καὶ ἐπεὶ ὁ ζ, μετρεῖ τοὺς α β, μετρήσει καὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον αὐτῶν τὸν δ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν γ, μετρήσει ἔτι καὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον αὐτῶν τὸν ε, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσω, ὅπερ ἀδύνατον. ὁ ε, ἄρα ἐστὶ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον τῶν α, β, γ. ὅπερ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Πᾶς ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

Τῶν δύο ἤδη ἀριθμῶν α, β γ, λέγω τὸν β γ, ἐλάσσονα ἢ μέρος εἶναι ἢ μέρη τοῦ μείζονος α. πρῶτον μὲν γὰρ ὑποτιθεμένων τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους, ἐπεὶ περ ἑκάστη μονὰς τοῦ γ β, μετρεῖ τὸν α. ὁ γ β, ἄρα μέρη ἐστὶ τοῦ α. δεύτερον δὲ μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους ὑποτιθεμένων, εἰ μὲν ὁ γ δ, τὸν α, μετρεῖ, μέρος ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ α, εἰ δὲ οὐ μετρεῖ, τοῦ μεγίστου κοινοῦ μέτρου ἀριθμούντος, τοῦτο α, καὶ β γ, ἔστω ὁ δ. ἐπεὶ οὖν ὁ δ, τὸν γ β, μετρεῖ, καὶ τοῦ β ε, ε ζ, ζ γ, μέρη, πολλαπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ γ β, τοῦ δ. Λύθις ἐπεὶ ὁ αὐτὸς δ, μετρεῖ καὶ τὸν α, καὶ ἕκαστον ἄρα μέρος τοῦ β γ, τουτέστιν ἕκαστον τῶν β ε, ε ζ, ζ γ, τὸν α, μετρήσει. ἄρα ὁ γ β, μέρη ἐστὶ τοῦ α, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

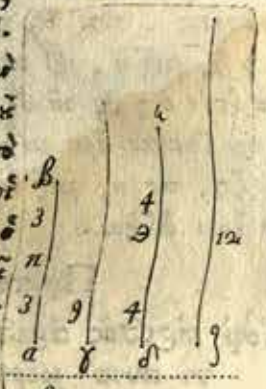
Euc. lib. 7. Fig. 3.

Πρότασις Ε'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμῷ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Τοῦ α ἤδη ἀριθμοῦ μέρος ἔστω τοῦ γ β, ὅπερ ὁ δ, τοῦ ζ ε. λέγω καὶ συναμφοτέρους τοὺς α, δ, τὸ αὐτὸ μέρος εἶναι. συναμφοτέρων τῶν γ β, ε ζ, ὅπερ ὁ α, τοῦ γ β. Ἐπεὶ γὰρ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ γ β, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ δ, τοῦ ε ζ, ὅσα ἄρα μέρη ἐστὶν ἐν τῷ γ β, ἴσα τῷ α, τοσαῦτα μέρη ἐστὶ καὶ ἐν τῷ ε ζ, ἴσα τῷ δ. συνεθὲν ἄρα τῷ μερῶν τοῦ γ β, τοῖς μέρεσι τοῦ ε ζ, τοσαῦτα μέρη συνέθηται ἔσονται ἐν τοῖς γ δ, ε ζ, ἴσα τοῖς α, δ, ὁμοῦ, ὅσα μέρη ἁπλᾶ ἐστιν ἐν τῷ γ β, ἴσα τῷ α. ἄρα ὁσαπλάσιός ἐστιν ὁ γ δ, τοῦ α, τοσαυταπλάσιοι ἔσονται καὶ οἱ γ β, ε ζ, τῶν α δ, καὶ ἑπομένως, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ β γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, καὶ συναμφότεροι αἱ α δ, συναμφοτέρων τῶν γ β, ε ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ς'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμῷ μέρη ᾖ, ὁ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ, καὶ σωναμφότερος σωναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ, ἀριθμοῦ τοῦ γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔστω, ἅπερ ἐστὶν ὁ εδ, τοῦ ζ. Λέγω καὶ ἀμφότερος τὸς αβ, εδ, τὰ αὐτὰ μέρη εἶναι ἀμφοτέρων τῶν γ, ζ, ἅπερ ἐστὶν ὁ αβ, τοῦ γ. Ἐπεὶ γὰρ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ αβ, τοῦ γ, τὰ αὐτὰ ἐστι καὶ ὁ εδ, τοῦ ζ, διαιρεθέντος γὰρ τοῦ αβ, εἰς τὰ τοῦ γ, μέρη, καὶ τοῦ εδ, εἰς τὰ τοῦ ζ, ὅσα μέρη τοῦ γ, ἐστὶν ἐν τῷ αβ. τοσαῦτα μέρη ἐστὶ καὶ τοῦ ζ, ἐν τῷ εδ. Ἔστω τοίνυν ἐν μὲν τῷ αβ, μέρη τοῦ γ, τὰ αη, ηβ, ἐν δὲ τῷ εδ, μέρη τοῦ ζ, τὰ εθ, θδ. Ἐπεὶ τοίνυν ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αη, τοῦ γ, τὸ αὐτὸ ἐστι καὶ ὁ εθ, τοῦ ζ, ἔσονται διὰ τῆς ἀνωτέρω, καὶ οἱ αη, εθ, ὁμοῦ τῶν γζ, ὁμοῦ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ἐστὶν ὃ αη, τοῦ γ. ὡσαύτως, καὶ οἱ ηβ, θδ, ὁμοῦ τῶν γζ, ὁμοῦ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ἐστὶν ὁ ηβ, τοῦ γ. ὥστε ἃ μέρη εἰσὶν οἱ αη, ηβ, τατέστιν ὁ αβ, τοῦ γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσονται καὶ οἱ αβ, εδ, τῶν γζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 4.

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ, ἀριθμοῦ τοῦ γδ, ἔστω μέρος, ὅπερ ὁ ἀφαιρεθεὶς αε, τοῦ ἀφαιρεθέντος γζ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς εβ, τοῦ λοιποῦ ζδ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ καὶ ὅλος ὁ αβ, ὅλου τοῦ γδ. Γεγόνθω ὁ εβ, τοῦ γη, τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ἐστὶ καὶ ὁ αε, τοῦ γζ, διὰ τῆς ε: ἄρα τοῦ παρόντος, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αε, τοῦ γζ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὅλος ὁ αβ, ὅλου τοῦ ζη, ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ αε, τοῦ γζ, τὸ αὐτό ἐστι καὶ ὁ αβ, τοῦ γδ, ἄρα ὁ αβ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον πρὸς τὸν ζη, καὶ πρὸς τὸν γδ. καὶ διὰ τῆς θ: τοῦτ' ἐστὶ ὁ ζη, καὶ γδ, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί. κοινοῦ δὲ ἀφῃρημένου τοῦ γζ, ἐγκαταλειφθήσονται καὶ οἱ γη, ζδ, ἴσοι. Ἐπεὶ δὲ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ αε, τοῦ γζ, τὸ αὐτό ἐστι καὶ ὁ εβ, τοῦ γη. ἄρα ὁ εβ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται καὶ τοῦ δζ, ὅπερ ὁ αε, τοῦ γζ. ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ αε, τοῦ γζ, ἔστι καὶ ὁ αβ, τοῦ γδ, ἄρα καὶ ὁ εβ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ τοῦ δζ, ὅπερ ὅλος ὁ αβ, ὅλου τοῦ γδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις Η': Θεώρημα.

Ε'αμ' ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, μέρη ᾖ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ αβ, ἀριθμοῦ τοῦ γδ, μέρη ἔστω, ἅπερ ὁ ἀφαιρεθεὶς αε, τοῦ ἀφαιρεθέντος γζ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς εβ, τοῦ λοιποῦ ζδ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος αβ, τοῦ ὅλου γδ.

Εἰλήφθω ἕτερος ἀριθμὸς ἴσος τῷ αβ, ὁ ηθ, ὁ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ηθ, τοῦ γδ, τὰ αὐτὰ καὶ ὁ αε, τοῦ γζ· διαιρεθέντος δὲ τοῦ μὲν ηθ, εἰς τὰ τοῦ γδ, μέρη, τὰ ηκ, κθ, τοῦ δὲ αε, εἰς τὰ τοῦ γζ, τὰ αλ, λε, ὁ μέρος ἐστὶν ὁ εκ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὁ αλ, τοῦ γζ, ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ κθ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ λε, τοῦ γζ, μείζων δὲ ὁ γδ, τοῦ γζ, μείζων ἄρα καὶ ὁ ηκ, τοῦ αλ, καὶ ὁ κθ, τοῦ λε. ἀφαιρεθέντος δὲ τοῦ μὲν ημ, ἴσου τῷ αλ, τοῦ δὲ κν, ἴσου τῷ λε, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ηκ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ ημ, τοῦ γζ, καὶ ἑπομένως καὶ τὸν ἀνωτέρω, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ηκ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὁ μκ, τοῦ ζδ· ὡσαύτως καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ κθ, τοῦ γδ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὁ νθ, τοῦ ζδ· καὶ συντιθέμενοι ἄρα οἱ μκ, νθ, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσονται τοῦ ζδ, ἅπερ οἱ ηκ, κθ, ὅμοῦ, τουτέστιν ὁ αβ, τοῦ γδ. ἐπεὶ δὲ οἱ ημ, κν, ἴσοι εἰσὶ τοῖς αλ, λε, καὶ ὁ ηθ, τῷ αβ, ἄρα καὶ τὸ γ': ἀξίωμα καὶ οἱ μκ, νθ, ὅμοῦ ἴσοι εἰσὶ τῷ εβ, καὶ ἑπομένως ἃ μέρη ἐστὶν ὁ αβ, τοῦ γδ, τὰ αὐτὰ καὶ ὁ εβ, τοῦ ζδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 5.

Πρότασις Θ': Θεώρημα.

Ε'αμ' ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος, καὶ ἐναλλὰξ ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ α' τοῦ γ': τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔσται καὶ ὁ β' τοῦ δ':

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ α, ἀριθμοῦ τοῦ βγ, ἔστω ὁποιονδήποτε μέρος, καὶ ὁ δ, τοῦ εζ, τὸ αὐτὸ, ὅπερ ὁ α, τοῦ βγ. Λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλάξ· ὃ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν ὁ α, τοῦ δ, τὸ αὐτό ἐστι μέρος ἢ μέρη καὶ ὁ βγ, τοῦ εζ. καὶ γὰρ τῶν ὑποθεσιν, ὅσοι ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ α, εἰσὶν ἐν τῷ βγ, τοσοῦτοι ἴσοι τῷ δ, εἰσὶν ἐν τῷ εζ. Διαιρεθέντων δὲ τοῦ μὲν βγ, εἰς τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς τῷ α, τοὺς βη, ηγ, τοῦ δὲ εζ, εἰς τοὺς ἴσους τῷ δ, τοὺς εθ, θζ, ὃ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν ὁ βη, τοῦ εθ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ηγ, τοῦ θζ, καὶ κατὰ

τῶν

τὴν ε: τῷ παρόντος, ὃ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν ὁ β η, (τετάρτην ὁ α, ἴσοι γὰρ) τῷ ε θ. (τετάρτῳ τῷ δ,) τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔσται καὶ ὁ β γ, τῷ ε ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

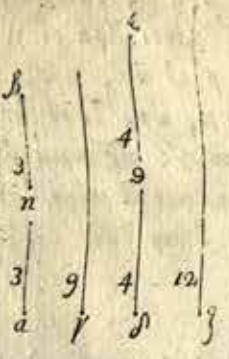
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι ἐὰν ἀριθμοὶ ἀριθμῶν ἴσων τὸ πλῆθος τὸ αὐτὸ μέρος ὦσιν, ἑκάτερος ἑκατέρου, ὅπερ ἕτερός τις ἀριθμὸς ἑτέρου τινὸς ἀριθμοῦ, καὶ πάντες ὁμοῦ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πάντων τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν ἔσονται τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ ῥηθεὶς τοῦ ῥηθέντος.

Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐναλλὰξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου, ἢ μέρος.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ α β, ἀριθμοῦ τοῦ γ, ἔστω μέρη ὁποιαδηποτοῦν. καὶ ἕτερος ὁ δ ε, ἑτέρου τοῦ ζ, τὰ αὐτὰ, ἃ ὁ α β, τοῦ γ. Λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ, ἃ μέρη ἢ μέρος ἐστὶν ὁ α β, τοῦ δ ε, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ γ, τοῦ ζ. καθ' γὰρ τινὰ ὑπάρξιν, ὅσα μέρη ἐστὶν ἐν τῷ α β, τοῦ γ, τοσαῦτα ἐστὶ καὶ ἐν τῷ δ ε, τοῦ ζ. διῃρημένων δὴ, τοῦ μὲν α β, εἰς τὰ τοῦ γ, μέρη τὰ α η, η β, τοῦ δὲ ε δ, εἰς τὰ τοῦ ζ, τὰ δ θ, θ ε. ἕκαστον γε μέρος ἐστὶν ὁ α η, τοῦ γ, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ὁ δ θ, τοῦ ζ, καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὃ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν ὁ α η, τοῦ δ θ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔσται καὶ ὁ γ, τοῦ ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὃ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν, ὁ η β, τοῦ θ ε, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔσται καὶ ὁ αὐτὸς γ, τοῦ ζ, καὶ διὰ τὸ ποσάκις τοῦ αὐτοῦ, ὃ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν ὁ γ, τοῦ ζ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἔσται, καὶ ὁ α β, τοῦ δ ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 7. Fig. 6.

Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα, καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.

Ὅλος γὰρ ὁ α β, πρὸς ὅλον τὸν γ δ, ἔστω ὡς ὁ α ε, ἀφαιρεθεὶς πρὸς τὸν γ ζ, ἀφαιρεθέντα. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ε β, πρὸς τὸν λοιπὸν ζ δ, ἔσται ὡς ὅλος ὁ α β, πρὸς ὅλον τὸν γ δ. καθ' γὰρ τὴν ἡ: τοῦ παρ: ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ α β, τοῦ γ δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ α ε, τοῦ γ ζ, καὶ διὰ τὰς ζ: τοῦ αὐτοῦ, καὶ ὁ ε β, τοῦ ζ δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἢ μέρη, ὅπερ μέρος ἢ μέρη ἐστὶν ὁ α β, τοῦ γ δ.

Πρό-

Πρότασις ΙΒ΄: Θεώρημα.

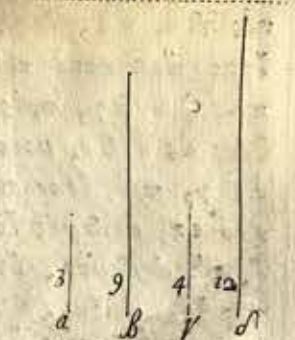
Ε'αμ ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀμάλογον, ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους.

Τῶν ἤδη α β, γ δ, ἀριθμῶν ἀνάλογον ὄντων, ἐστὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. Λέγω, ὅτι καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως εἰσὶν οἱ α γ, πρὸς τοὺς β δ. καὶ μὲν γὰρ τὴν ὑπόθεσιν, ὁ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ β, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ γ, ἐστὶ τοῦ δ. καὶ δὴ τινὰ ἑ: τοῦ παρόντος, καὶ συναμφότεροι οἱ α γ, τὸ αὐτὸ μέρος εἰσὶ τῶν β δ, ὅπερ ὁ α, τοῦ β. καὶ ἑπομένως ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως οἱ α γ, πρὸς τοὺς β δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. Lib. 7. Fig. 7.

Πρότασις ΙΓ΄: Θεώρημα.

Ε'αμ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀμάλογον ὦσι, καὶ ἐναλλὰξ ἀμάλογον ἔσονται.

Τεσσάρων ἤδη ἀριθμῶν τῶν α β, γ δ, ἀνάλογον ὄντων, ἔστι ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. Λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἔσται, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὅπως ὁ β, πρὸς τὸν δ. καπὶ γὰρ τινὰ ὑπόθεσιν, ὁ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ β, τὸ αὐτὸ ἐστὶ καὶ ὁ γ, τοῦ δ, καὶ καὶ τινὰ θ΄: τοῦ παρόντος, ὁ μέρος ἐστὶν ὁ α, τοῦ γ, τὸ αὐτὸ καὶ ὁ β, τοῦ δ. καὶ ἑπομένως, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ β, πρὸς τὸν δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΔ΄: Θεώρημα.

Ε'αμ ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενοι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Ἀριθμῶν ἤδη τῶν α, β, γ, καὶ δ, ε, ζ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντων, καὶ σὺν δύο λαμβανομένων, ἐστὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. Λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἔσται, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. διὰ γὰρ τῆς αὐωπέρω, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ἔσαι καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, ὁ ὁ β, πρὸς τὸν ε. Αὖθις ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. ἔσαι διὰ τῆς αὐτῆς, καὶ ὡς ὁ β, πρὸς τὸν ε, ὁ γ, πρὸς τὸν ζ. ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν ε,

ἰσῶ καὶ ὁ α, πρὸς τὸν δ, ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. ὅπερ καὶ τὰ ἑξῆς.

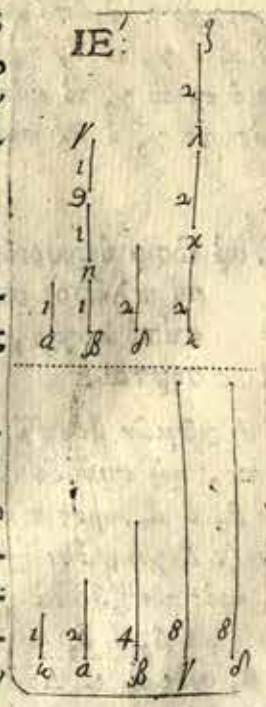
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι καὶ τοὐναντίον, ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τῷ πλήθει δύ' ἴσοι λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ σὺν δύο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται. εἰ γὰρ μή, οὐκ δύ' ἴσοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μερῇ, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μερεῖ, καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν πρῶτον ἀριθμὸν μερήσει, καὶ ὁ β' τὸν δ'.

Μονὰς γὰρ ἡ α, μετρείτω τὸν βγ, καὶ ὁ δ, ἀριθμὸς τὸν ε ζ, ἰσάκις. Λέγω, ὅτι μετρήσει ἰσάκις καὶ ἡ α, μονὰς τὸν δ, καὶ ὁ βγ, τὸν ε ζ. ἐπεὶ μὲν γὰρ τινὰ ὑπόθεσιν, ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ βγ, ἴσαι τῇ α, ποσοῦτοι ἀριθμοί εἰσιν ἐν τῷ ε ζ, ἴσοι τῷ δ. Διῃρείσθω τοίνυν ὁ μὲν βγ, εἰς τὰς ἴσας μονάδας τῇ α, δῆλον· τὰς βη, ηϑ, ϑγ, ὁ δὲ ε ζ, εἰς τοὺς τῷ δ, ἴσους ἀριθμούς, τοὺς εκ, κλ, λζ, ἔσαι ἄρα κατὰ τινὰ ϑ'· ὡς ἡ βη, μονὰς πρὸς τὸν εκ, οὕτως ἡ ηϑ, πρὸς τὸν κλ, καὶ ἡ ϑγ, πρὸς τὸν λζ, καὶ δὲ τινὰ ι β'· τὸ παρόντος, ἔσαι ὡς ἡ βη, μονὰς, πρὸς τὸν εκ, ἀριθμὸν, οὕτως ὅλος ὁ βγ, πρὸς ὅλον τὸν ηζ, ἡ δὲ βη, μονὰς ἴση ἐστὶ τῇ α, καὶ ὁ εκ, ἀριθμὸς ἴσος τῷ δ. ἄρα καὶ ὡς ἡ α, μονὰς πρὸς τὸν δ, γ': ἀριθμὸν, οὕτως ἐστὶν ὁ βγ, β': πρὸς τὸν εζ, δ': ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 8.

Πρότασις Ις'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

Τῶν δύο ἤδη ἀριθμῶν α, β, τοῦ μὲν α, τὸν β, πολλαπλασιάσαντος, γενέσθω ὁ γ, τοῦ δὲ β, τὸν α, πολλαπλασιάσαντος γενέσθω ὁ δ. Λέγω δὴ τὸν γ, καὶ δ, ἴσους εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκεν, ὁ β, ἄρα τὸν γ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ α, μονάδας, διὰ τὸ ιέ· ὅρος. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ ε, μονὰς τὸν α, κατὰ τὰς ἐν τῷ αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ ε, μονὰς μετρεῖ τὸν α, καὶ ὁ β, τὸν γ, καὶ διὰ τῆς ἀνωτέρω, ἰσάκις ἡ μονὰς ἔτι μετρεῖ τὸν β,

καὶ ὁ

καὶ ὁ α, τὸν γ· δειχθήσεται ἰσάκις ἔτι μέρη ἡ ε, μονὰς τὸν β, καὶ ὁ α, τὸν δ. ἄρα ὁ αὐτὸς α, ἰσάκις μέρη τόν τε γ, καὶ δ. καὶ ἐναλλὰξ οἱ γ, δ, ἴσοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α΄: Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ μὲν πολλαπλασιάζων μέρος ἐστὶ τοῦ γενομένου καθ' ἃς ἐν τῷ πολλαπλασιαζομένῳ μονάδας, ὁ δὲ πολλαπλασιαζόμενος τοῦ αὐτοῦ, καθ' ἃς ἐν τῷ πολλαπλασιάζοντι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

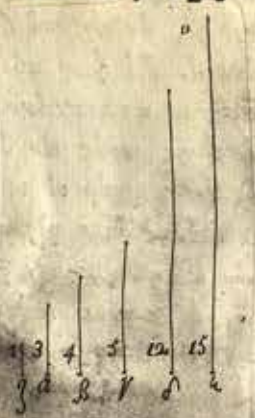
Β΄: Ἔτι δῆλον ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ἔσται ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν πολλασιάζοντα, ὁ πολλαπλασιαζόμενος πρὸς τὸν γενόμενον. ὥστε ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσῃ, ἔσται ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, οὕτως ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν γενόμενον.

Πρότασις ΙΖ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἕξουσι τοῖς πολλαπλασιασθεῖσιν.

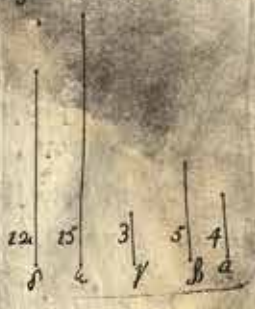
Ἀριθμὸς γὰρ ὁ α, τοὺς β γ, πολλαπλασιάσας τοὺς δ ε, ποιείτω. Λέγω δὴ, ὅτι ἐστὶν, ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ δ, πρὸς τὸν ε. ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκε. διὰ τοῦτο β΄: ποσίσματος τῆς αὐτέρω, ἔσται ὡς ἡ ζ, μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν δ. ὡσαύτως ἐπεὶ ὁ α, αὖθις τὸν γ, πολλαπλασιάσας τὸν ε, πεποίηκεν. ἔσται διὰ τοῦτο αὖθις, ὡς ἡ ζ, μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν ε. καὶ διὰ τῆς ια΄: τοῦτο ἐστὶν ὡς ὁ β, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν ε. ἄρα διὰ τῆς ιγ΄: τοῦτο παρόντος, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὁ β, πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ δ, πρὸς τὸν ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. lib. 7. Fig. 9.



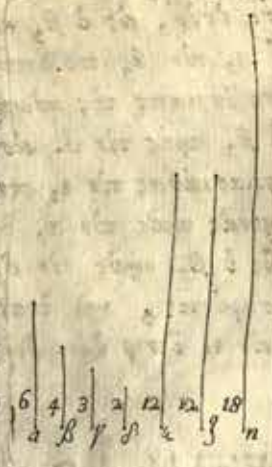
Πρότασις ΙΗ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασι.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α, β, τὸν γ, πολλαπλασιάσαντες τοὺς δ, ε, ποιείτωσαν. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ, πρὸς τὸν ε. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν γ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκε, καὶ ὁ γ, ἄρα διὰ τῆς ιε΄: τοῦ παρόντος, τὸν α, πολλαπλασιάσας τὸν αὐτὸν δ, ποιεῖ. πολλαπλασιάσας δὲ καὶ τὸν β, τὸν ε, ποιεῖ. ἄρα διὰ τῆς αὐτέρω, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ δ, πρὸς τὸν ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ α' καὶ δ' γινόμενος ἀριθμὸς, ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τοῦ β' καὶ γ' γινομένῳ ἀριθμῷ· καὶ ἐὰν ὁ ἐκ τοῦ α' καὶ δ' γινόμενος ἀριθμὸς, ἴσος ᾖ τῷ ἐκ τοῦ β' καὶ γ' οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Τέσσαρες ἤδη ἀριθμοὶ οἱ α, β, γ, δ, ἔστωσαν ἀνάλογον ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ· καὶ ὁ μὲν α, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω· ὁ δὲ β, τὸν γ, πολλαπλασ: τὸν ζ, ποιείτω. Λέγω δὴ τὸς ε ζ, ἴσους εἶναι. πολλαπλασιασάτω ἔτι ὁ α, τὸν γ, καὶ τὸν η, ποιείτω· δείκνυται. Ἐπεὶ ὁ α, τὸς δ γ, πολλαπλασιάσας τὸς η ε, πεποίηκεν. ἔσαι ἄρα διὰ τῆς ιζ': τῶ παρόντος, ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ η, πρὸς τὸν ε, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς β. ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ η, πρὸς τὸν ε. Αὖθις ἐπεὶ οἱ α, β, τὸν γ, πολλαπλασιάσαντες τὸς η, ζ, πεποιήκασιν. ἔσαι ἄρα διὰ τῆς αὐτέρω, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ η, πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἐδείχθη καὶ ὁ η, πρὸς τὸν ε. ἄρα οἱ ε ζ, πρὸς τὸν αὐτὸν η, τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον, καὶ ἑπομένως διὰ τῆς θ': τῶ ε': οἱ ε ζ, ἴσοί εἰσιν, ὅπερ ἐστὶ τὸ α': Λέγω δὴ ἔτι, ἐπεὶ ὁ ε, ἑκ τῶ α': καὶ δ': γινόμενος, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ β': καὶ γ': δηλον: τῷ ζ, ἔσαι ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. τῷ γὰρ αὐτῷ καπασκδαθσάτω, ἐπεὶ ὁ α, τὸς γ, δ, πολλαπλασιάσας τὸς η, ε, πεποίηκεν. ἄρα διὰ τῆς ιζ': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὕπως ἔσαι ὁ η, πρὸς τὸν ε, τουτέστι τὸν ζ. (ἴσοι γὰρ οἱ ε, ζ.) Αὖθις ἐπεὶ οἱ α, β, τὸν γ, πολλαπλασιάσαντες τὸς η, ζ, πεποιήκασιν. ἄρα διὰ τῆς αὐτέρω ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ η, πρὸς τὸν ζ. ὡς δὲ ὁ η, πρὸς τὸν ζ, δέδεικται καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἔσαι. ὅπερ ἐστὶ τὸ β': Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

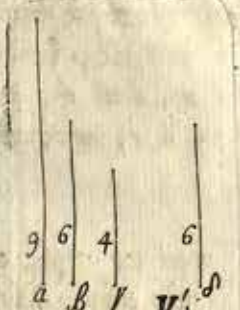
Eucl. Lib. 7. Fig. 10.

Πρότασις Κ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖσι τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου. ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Τρεῖς ἤδη ἀριθμοὶ οἱ α, β, γ, ἀνάλογον ἔστωσαν, δηλ: ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὕπως ὁ β, πρὸς τὸν γ. Λέγω, ὅτι ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ β. Τῷ γὰρ δ, ἴσω τῷ β, γενομένω, ἔσαι ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὕπως ὁ δ, πρὸς τὸν γ, καὶ διὰ τῆς αὐτέρω, ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσος ἔσαι τῷ ὑπὸ τῶν β δ, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν

β δ,

βδ, ἴσός ἐστι τῷ ἀπὸ τῆ β, μόνου. ἄρα ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσός ἐστι τῷ ἀπὸ τῆ β, ἔπερ ἐστὶ τὸ ά: Eucl. Lib. 7. Fig. 11.

Ε΄στω δὴ ἔτι ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσος τῷ ἀπὸ τῆ β. Λέγω, ὅτι ἔσαι ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν γ. Τῆ γὰρ δ, αὐθις ἴσου τῷ β, ὑποκειμένῃ, ἐπεὶ ὁ ὑπὸ τῶν α γ, ἴσός ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν β δ. ἔσαι διὰ τῆς ἀνωτέρω, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν γ, ἔστι δὲ ὁ δ, ἴσος τῷ β, ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ἔσαι ὁ β, πρὸς τὸν γ, καὶ ἔστι τὰ β': ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΑ΄: Θεώρημα.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὡς ὁ μείζων τὸν μείζονα, καὶ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα.

Ε΄στωσαν ἤδη ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ γ δ, ε ζ. ἔστω δὲ καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ δ, πρὸς τὸν ε ζ. Λέγω, ὅτι ὁ γ δ, μετρήσει τὸν α, καὶ ὁ ε ζ, τὸν β, ἰσάκις, τουτέστιν ἑκάτερος ἑκατέρου μέρος ἐστὶ καὶ ὡσαύτως μέρη. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστωσαν μέρη, ἆ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ γ δ, τοῦ α, τὰ αὐτά ἐστι καὶ ὁ ε ζ, τοῦ β, καὶ τὴν ὑπόθεσιν. διῃρεθέντων δὴ τοῦ μὲν γ δ, εἰς τὰ τοῦ α, μέρη, τὰ γ η, η δ, τοῦ δὲ ε ζ, εἰς τὰ τοῦ β, τὰ ε θ, θ ζ, ἔσονται ἴσα τὰ γ η, η δ, τοῖς ε θ, θ ζ, τῷ πλήθει. καὶ ἐπομένως ἔσαι ὡς ὁ γ η, πρὸς τὸν ε θ, οὕτως ὁ γ δ, πρὸς τὸν ε ζ, ἄρα οἱ γ δ, ε ζ, ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς γ η, ε θ, ἐλάττοσιν αὐτῶν, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα μέρη, ἀλλ' ἑκάτερος μέρος ἐστὶν ἑκατέρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΒ΄: Θεώρημα.

Ε΄αν ὦσι τρεῖς ἀριθμοί, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ δὲ τεταραγμένη ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ ἔσονται λόγῳ.

Τριῶν ἤδη ἀριθμῶν τῶν α, β, γ, καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος τῶν δ ε ζ, ἔστω ἡ ἀναλογία τεταραγμένη, τουτέστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ε. Λέγω, ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ὁ α,

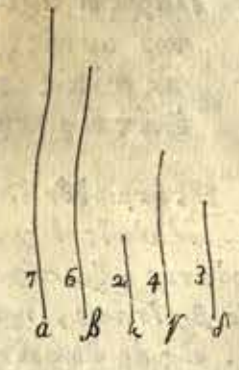
πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β ε ζ, εἰσὶν ἀνάλογον, ὁ ὑπὸ τῶν α ζ, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β ε, καὶ τὸν ι θ: διὰ τὰ αὐτὰ ἔτι καὶ ὁ ὑπὸ τῶν γ δ, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β ε, ἄρα ὁ ὑπὸ τῶν α ζ, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν γ δ, καὶ τὰ ἑξῆς. ἀξίωμα. καὶ διὰ τῆς προειρημένης προτάσεως, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. Lib. 7. Fig. 12.

Πρότασις ΚΓ'. Θεώρημα.

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἀριθμοὶ ἤδη οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν. Λέγω, ὅτι καὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, εἰ γὰρ μή, ἔσονταί τινες ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς α β. ἔστωσαν τοῖνυν ὅποι οἱ γ δ. καὶ ἐχέτω ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ, διὰ τῆς κ α: ἄρα ὁ γ, τὸν α, καὶ ὁ δ, τὸν β, ἰσάκις μετρεῖσι, μετρήτωσαν καὶ τὰς ἐν τῷ ε, μονάδας οἱ γ δ, τὰς α β. καὶ ὁ ε, ἄρα τὰς α β, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ γ, καὶ δ, μονάδας. ἄρα οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν ε, ὅπερ ἄτοπον. ἄρα οἱ α β, ἐλάχιστοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πρότασις ΚΔ'. Θεώρημα.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Οἱ α β, ἤδη ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ὄντες, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν. εἰ γὰρ μή, μετρήσειτις αὐτοὺς ἀριθμός, καὶ ἔστω ὅπος ὁ γ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ αὐτὸς γ, τὸν α, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ δ, ὁσάκις δὲ τὸν β, τοσαῦται ἔστωσαν ἐν τῷ ε. ὁ γ, τοίνυν τὰς δ ε, πολλαπλασιάσας τὰς α β, πεποίηκε. διὰ τῆς ι ζ: ἄρα τὸ παρόντος, ἔσαι ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ἄρα οἱ δ ε, ἐλάσσονες τῶν α β, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς, ὅπερ ἄτοπον. οἱ ἐλάχιστοι ἄρα ἀριθμοὶ καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

Πρότασις ΚΕ΄: Θεώρημα.

Εαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ τὸν ἕνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Euel. lib. 7. Fig. 13.

Τῶν αβ, ἤδη ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ὄντων, ὁ γ, τὸν α, μετρῶν πρὸς τὸν β, πρῶτος ἔσται. εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις αὐτὸς ἀριθμός, καὶ ἔστω ὅτος ὁ δ. ἐπεὶ τοίνυν ὁ δ, τὸν γ, μετρεῖ, ὁ δὲ γ, τὸν α, ὁ δ, ἄρα καὶ τὸν α, μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν β, ἄρα οἱ αβ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν δ, ἀριθμόν. ὅπερ ἄτοπον. Εαν ἄρα δύο ἀριθμοὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κς΄: Θεώρημα.

Εαν δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσι, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γινόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται.

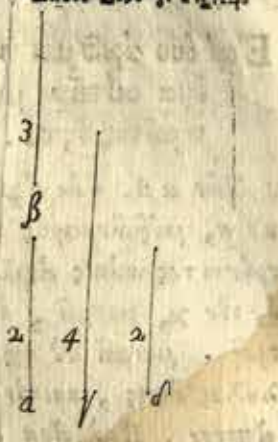
Ἀριθμοὶ ἤδη οἱ αβ, πρὸς τὸν γ, πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ γινόμενος δὲ ἐξ αὐτῶν δ. Τὸν δ, λέγω πρῶτον εἶναι, πρὸς τὸν γ. εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις ἀριθμὸς αὐτὸς, καὶ ἔστω ὅτος ὁ ε. ὁ ε, ἄρα τὸν γ, μετρῶν πρὸς τὸν α, πρῶτός ἐστι διὰ τῆς ἀνωτέρω, ὁσάκις δὲ ὁ ε, τὸν δ, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἐν τῷ ζ, ἔστωσαν. ἄρα καὶ ὁ ζ, τὸν δ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ ε, μονάδας· καὶ διὰ τὸ πορίσματος τῆς ις΄: ὁ ε, τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκεν. ἀλλὰ καὶ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν αὐτὸν δ, πεποίηκεν. ἄρα κατὰ τὸν ιθ΄: τῷ παρόντος, ἔσται ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν α, ὁ β, πρὸς τὸν ζ, οἱ δὲ ε, καὶ α, πρῶτοί εἰσι πρὸς ἀλλήλους, ὡς προδέδεικται. ἄρα διὰ τῆς κδ΄: ὁ ε, τὸν β, μετρεῖ, καὶ ὁ α, τὸν ζ, ὁ δὲ ε, καὶ τὸν γ, μετρεῖ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. οἱ β γ, ἄρα πρῶτοι ὄντες πρὸς ἀλλήλους, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν ε, ἀριθμόν. ὅπερ ἄτοπον. ὁ δ, ἄρα πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν γ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις ΚΖ'. Θεώρημα.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἑκατέρου αὐτῶν γινόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν α, β, πρώτων πρὸς ἀλλήλους ὄντων, ὁ ἑκατέρου τῶν α, γινόμενος ἀριθμὸς, ἔστω ὁ γ, πρὸς τὸν β, πρῶτος ἔσται. Ἐκκείσθω γὰρ ἴσος τῷ α, ὁ δ. Ἐπεὶ οὖν ὁ α, πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν β, ἄρα καὶ ὁ δ, πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν αὐτὸν β. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ, ὁ ὑπὸ τῶν α δ, γενόμενος ἀριθμὸς, πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν β, ὁ δὲ γ, ὁ ἑκατέρου τῶν α, γινόμενος, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν α δ, γινομένῳ, καὶ τὰ ἑξῆς ὅρα. ὁ γ, ἄρα πρὸς τὸν β, πρῶτός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euc. Lib. 7. Fig. 14.

Πρότασις ΚΗ'. Θεώρημα.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμοὺς ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι ὦσι, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γινόμενοι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α, β, πρὸς ἑκάτερον τὸν γ, δ, πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ἐκ μὲν τοῦ α, πρὸς τὸν β, ὁ ε, γενέσθω, ἐκ δὲ τοῦ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ζ. Λέγω ὅτι οἱ ε ζ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, πρὸς ἑκάτερον τῶν γ δ, πρῶτοί εἰσιν, ἄρα διὰ τὰ κς'. καὶ ὁ γινόμενος ὑπὸ τῶν α β, τουτέστιν ὁ ε, πρῶτός ἐστι πρὸς ἑκάτερον τῶν γ δ. Διὰ τὰ αὐτὰ οἱ γ δ, πρῶτοί εἰσι πρὸς τὸν ε, διὰ τὰ αὐτὰ κς'. καὶ ὁ ὑπὸ τῶν γ δ, γινόμενος, ὅπερ ὁ ζ, πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν ε, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΘ'. Θεώρημα.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ ἐκεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

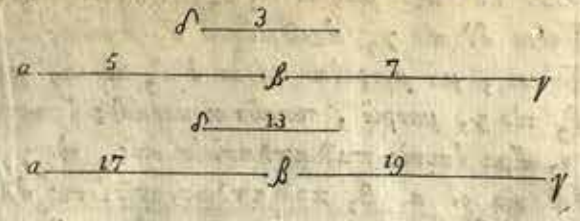
Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α, β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν, καὶ ὁ μὲν α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω. πρὸς δὲ τὸν γ, τὸν ε, ποιείτω. ὁ δὲ β, ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω, πρὸς δὲ τὸν δ, τὸν

δ, τὸν ζ. Λέγω τὰς γ δ, ε ζ, πρώτας πρὸς ἀλλήλας εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἐκ δὲ τῆ α, γέγονεν ὁ γ, ὁ γ, ἄρα πρὸς τὸν β, διὰ τῆς κζ: πρῶτός ἐστιν. Λύθις ἐπεὶ οἱ γ β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἐκ δὲ τῆ β, γέγονεν ὁ δ, διὰ τῆς αὐτῆς ἄρα κζ: καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, πρῶτός ἐστιν, ὅπερ ἐστὶ τῶ α: εἶτα ἐπεὶ οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ δ, ἐκ τῆ β, γέγονεν, ὁ δ, πρὸς τὸν α, πρῶτός ἐστιν, ὥστε ἀμφότεροι οἱ α, γ, πρὸς ἑκάτερον τῶν β δ, πρῶτοί εἰσι, καὶ διὰ τῆς κη: ὁ ὑπὸ τῶν α γ, γινόμενος, τετράγωνος ὁ ε, πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν β δ, τετράγωνον τὸν ζ, πρῶτός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. lib. 7. Fig. 15.

Πρότασις Λ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται, καὶ ἐὰν συναμφότερος πρὸς ἕνα τινὰ αὐτῶν, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Eucl. Lib. 7. Fig. 16.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ α β, β γ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν τὸ πρῶτον. Λέγω, ὅτι καὶ συναμφότερος αὐτῶν δηλ: ὁ α γ, πρὸς τὸν α β, πρῶτός ἐστιν. εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς, καὶ ἔστω ὅτος ὁ δ, εἰ δυνατὸν ὁ δ, τὸν α γ, καὶ α β, μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν β γ, μετρεῖ καὶ τὸν α β, οἱ α β, ἄρα β γ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν δ, ὅπερ ἄτοπον. οἱ α β, ἄρα, α γ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἔστωσαν δεύτερον οἱ α γ, α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω καὶ τὰς α β, β γ, πρώτας εἶναι. εἰ γὰρ μή, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς, καὶ ἔστω ὁ δ. ἄρα ὁ δ, τὰς α β, β γ, μετρῶν, μετρήσει πάντως καὶ τὸν α γ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν α β, οἱ α γ, ἄρα α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες, κοινὸν μέτρον ἔχουσι τὸν δ, ὅπερ ἄτοπον. οἱ α β, ἄρα β γ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις ΛΑ'. Θεώρημα.

Ἅπας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστι.

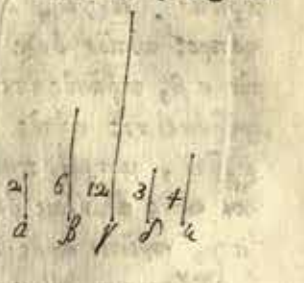
Πρῶτος ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, τὸν β, μὴ μετρείτω. Λέγω τὼς α β, πρώτως πρὸς ἀλλήλους εἶναι. εἰ γὰρ μὴ, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς, καὶ ἔστω ὑπὸς ὁ γ. ὁ γ, τοίνυν ἀριθμὸς οὐκ ἔστιν ὁ αὐτὸς τῷ α. ἤ γὰρ μετρεῖ τὸν β, ὁ α, ὁ δὲ γ, μετρεῖ. ἐπεὶ οὖν ὁ γ, τὼς β α, μετρεῖ, ὁ α, ἄρα πρῶτος ὢν ὑπ' ἀριθμοῦ μετρεῖται, ὅπερ ἄτοπον. οἱ α, β, ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 17.

Πρότασις ΛΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γινόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμὸς, καὶ ἕνα τὸν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.

Δύο ἤδη ἀριθμοὶ οἱ α, β, πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους, τὸν γ, ποιείτωσαν. μετρείτω δὲ τὸν γ, ἀριθμὸν ὁ δ, πρῶτος. Λέγω, ὅτι ὁ δ, καὶ ἕνα τῶν α β, μετρήσει, μὴ μετρείτω τοίνυν ὁ δ, τὸν α, μετρήσει πάντως τὸν β. ὁσάκις γὰρ ὁ δ, τὸν γ, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ε, οἱ δ, ε, ἄρα ἑαυτοὺς πολλαπλασιάσαντες, τὸν γ, πεποιήκασιν, ἀλλὰ καὶ οἱ α, β, πολλαπλασιασθέντες ἀλλήλοις τὸν αὐτὸν γ, πεποιήκασι· καὶ τὸν ι Θ': ἄρα, ἔστιν ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν ε, οἱ δὲ α, δ, εἰσὶ πρῶτοι, ἄρα καὶ τὸν κά: ὁ δ, τὸν β, μετρεῖ, καὶ ὁ α, τὸν ε. διὰ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται, ὅτι ἐὰν ὁ δ, τὸν β, μὴ μετρεῖ, τὸν α, μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 18.

Πρότασις ΛΓ'. Θεώρημα.

Ἅπας σύνθετος ἀριθμὸς, ὑπό τινος πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Σύνθετος ἤδη ἀριθμὸς ἔστω ὁ α. Λέγω, ὅτι ὑπό τινος πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρείτω γὰρ αὐτὸν ὁ β, εἰ μὲν οὖν ὁ β, πρῶτός ἐστιν, εἴη ἂν τὸ ζητούμενον, εἰ δὲ μὴ, μετρείτω τὸν β, ὁ γ, ὅς καὶ τὸν α, μετρήσει. εἰ δὲ αὖθις ὁ γ, πρῶτός ἐστι, καὶ τὸν α, σύνθετον μετρεῖ, δέδεικται τὸ

πρω

προπεσῶ. εἰδὲ μὴ, μεζείπω καὶ τὸν γ, ἕτερος, ὃς μεζήσει καὶ τὸν α. καὶ τύπου ἐφ' ἑξῆς γινομένου, εὑρεθήσεταί τις ἀ: ἀριθμὸς τὸν α, μεζῶν. εἰ γὰρ μὴ, μεζήσουσι τὸν α, ἄπειροι ἀριθμοὶ, ὅπερ ἐν ἀριθμοῖς ἀδύνατον, ὡρισμένοι γάρ. καὶ ἄλλως.

Εucl. Lib. 7. Fig. 19.

Εὑρεθήτω τῶ α, συνθέτου ἀριθμὸς ὁ ἐλάχιστος τῶν μεζόντων αὐτὸν, καὶ ἔστω ὁ β. Λέγω τὸν β, πρῶτον εἶναι, εἰ γὰρ μὴ, μεζήσει τις αὐτὸν ἀριθμὸς, καὶ ἔστω ὅπος ὁ γ. ὁ γ, ἄρα ἐπεὶ τὸν β, μεζεῖ, μεζεῖ πάντως καὶ τὸν α, καὶ ἔστιν ἐλάττων τῶ β, ὁ δὲ β, ἐστὶν, ὁ ἐλάχιστος τῶν τὸν α, μεζόντων, ὅπερ ἄτοπον, ἄρα ὁ β, πρῶτός ἐστι.

Πρότασις ΛΔ΄: Θεώρημα.

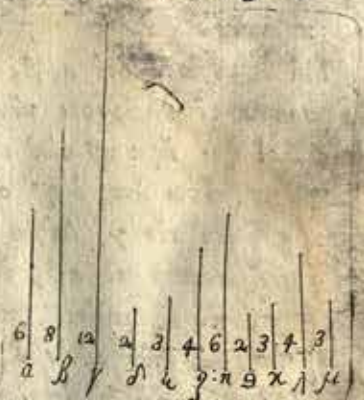
Ἅπας ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ὁ γὰρ α, ἀριθμὸς, εἰ μὲν πρῶτός ἐστι, δῆλον τὸ ζητούμενον. εἰδὲ συνθετος, ὑπὸ τινὸς ἀρώτερου μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΕ΄: Πρόβλημα.

Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἀριθμῶν ἢ δοθέντων τῶν α β γ, δοθέντων, τοὺς ἐλαχίστους τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς δεῖ εὑρεῖν. Εὑρεθήτω διὰ τῶν γ΄: τὸ μέγιστον κοινὸν μέζον τῶν α β γ, καὶ ἔστω ὁ δ. καὶ ὁσάκις ὁ δ, ἕκαστον τῶν α β γ, μεζεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τοῖς ε, ζ, η. ἕκαστος τοίνυν τῶν ε ζ η, μετρεῖ ἕκαστον τῶν α β γ, καὶ τὰς ἐν τῶ δ, μονάδας. ἄρα ἐν τῶ αὐτῶ λόγῳ εἰσὶν οἱ ε ζ η, τοῖς α β γ. Λέγω δὲ, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι, εἰ γὰρ μὴ, ἔστωσαν ἐν τῶ αὐτῶ λόγῳ τοῖς α β γ, οἱ θ κ λ, ἐλάσσονες τῶν ε ζ η. καὶ ἐπεὶ ἕκαστος τῶν θ κ λ, ἕκαστον τῶν α β γ, ἰσάκις μεζεῖ, ὁσάκις ὁ θ, τὸν α, μεζεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῶ μ, ὁ μ, ἄρα τὸν θ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ δ, τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν. ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ μ, πρὸς τὸν δ. ἀλλ' ὁ ε, μείζων ἐστὶ τοῦ θ, καὶ ὁ μ, ἄρα μείζων τοῦ δ. μεζεῖ δὲ ὁ μ, τοὺς α β γ, ἄρα ὁ μ, μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέζον τῶν α β γ, ὑπόκειται δὲ ὁ δ, τὸ μέγιστον αὐτῶν

Εucl. lib. 7. Fig. 20.

τῶν κοινὸν μέτρον, ὁ μ, ἄρα ἴσος τῷ δ. ἔστι δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον. οἱ ε ζ η, ἄρα ἐλάχιστοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Λς': Πρόβλημα.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, δύρεῖν ὃν ἐλάχιστον μερῶσιν ἀριθμόν.

Δύο ἤδη ἀριθμῶν δοθέντων τῶν α, β, ὃν ἐλάχιστον μερῶσιν ἀριθμὸν, δεῖ δύρεῖν. Οἱ δὴ α β, ἢ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. Ἔστωσαν πρότερον πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. πολλαπλασιάσαντες τοίνυν οἱ α β, ἀλλήλους τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ποιήσουσι καὶ τιὼ ις': καὶ ἔστω ὅπος ὁ γ. ὃν κατὰ τὸ πόρισμα τῆς αὐτῆς ις': ἑκάτερος τῶν α β, μερεῖ. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστος. εἰ γὰρ μὴ, μερείτωσαν οἱ α, β, ἐλάττονα τὸ γ, τὸν δ. καὶ ὁσάκις ὁ α, τὸν δ, μερεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ε, ὁσάκις δὲ ὁ β, τὸν αὐτὸν δ, μερεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ζ. ἐπεὶ τοίνυν ὁ α, τὸν γ, μερεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ β, μονάδας, τὸν δὲ δ, κατὰ τὰς ἐν τῷ ε, ὁ ε, ἄρα ἐλάττων ἐστὶ τοῦ β, ὅτι καὶ ὁ δ, ἐλάττων ὑπεδέθη τοῦ γ. ὡσαύτως καὶ ὁ ζ, ἐλάττων ἐστὶ τοῦ α. Ἐπεὶ οὖν ὁ α, τὸν β, ε, πολλαπλασιάσας τὸν γ, δ, πεποίηκεν, ἔσαι διὰ τῆς ιζ': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ β, πρὸς τὸν ε. ὡσαύτως, ἐπεὶ ὁ β, τὸν α, ζ, πολλαπλασιάσας τὸν γ, δ, πεποίηκεν. ἔσαι διὰ τῆς αὐτῆς ιζ': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ α, πρὸς τὸν ζ. ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτω καὶ ὁ β, πρὸς τὸν ε, ἄρα ὡς ὁ β, πρὸς τὸν ε, ὁ α, πρὸς τὸν ζ, καὶ διὰ τῆς ιγ': ὡς ὁ β, πρὸς τὸν α, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. ἄρα οἱ β, α, πρῶτοι ὄντες ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς ε ζ, ἐλάττοσιν αὐτῶν, ὅπερ ἄτοπον, καὶ τιὼ κγ': ὁ γ, ἄρα ἐλάχιστός ἐστι, καὶ μερεῖται ὑπὸ τῶν α, β. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Euclid. lib. 7. Fig. 21.

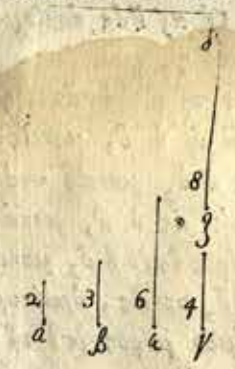
Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ α, β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. καὶ εἰλήφθωσαν οἱ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ζ ε. ἄρα καὶ τιὼ ιθ': ὁ ὑπὸ τῶν α ε, καὶ ὁ ζ β. ἴσος ἐστὶν, ἔστω ὅπος ὁ γ. οἱ α β, ἄρα καὶ τὸ πόρισμα τῆς ις': μερεῖ τὸν γ. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστος. εἰ γὰρ μὴ, μερείτωσαν οἱ α β, ἐλάττονα τοῦ γ, τὸν δ. καὶ ὁσάκις ὁ α, τὸν δ, μερεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ η, ὁσάκις δὲ τὸν αὐτὸν δ, ὁ β, μερεῖ, τοσοῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ θ. ἐπεὶ τοίνυν ὁ α, τὰς ε, η, πολλαπλασιάσας τὰς γ δ, πεποίηκεν. ἔσαι ἄρα διὰ τῆς ιζ': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν η, ὁ δὲ γ, μεί-

μείζων ἐστὶ τῆ δ, καὶ ὁ ε, ἄρα μείζων ἐστὶ τῆ η. Λυθὶς ἐπεὶ ὁ β, τὰς ζ, θ, πολλαπλασ: τὰς γ, δ, πεποίηκε, διὰ τῆς αὐτῆς ἄρα ιζ΄: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὕπως ἔσαι ὁ ζ, πρὸς τὸν θ, καὶ ἑπομένως ὁ θ, ἐλάττων τῆ ζ. ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἰδοὺ καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν η, ἄρα καὶ ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν η, ὁ ζ, πρὸς τὸν θ. καὶ διὰ τῆς ιγ΄: ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὁ η, πρὸς τὸν θ. ἄρα οἱ εζ, ἐλάχιστοι ὄντες τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τοῖς ηθ, ἐλάττοσιν αὐτῶν, ὅπερ ἄτοπον. ἄρα ὁ γ, ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν α, β, μετρεῖται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ΛΖ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα μετρῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος, τὸν αὐτὸν μετρήσει.

Οἱ α β, ἤδη ἀριθμοὶ μετρείτωσαν τὸν οἱονδήποτε ἀριθμὸν γ δ, ἐλάχιστον δὲ τὸν ε. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ ε, τὸν γ δ, μετρήσει, εἰ γὰρ μή, μετρείτω ὁ ε, ἐκ τῶν γ δ, τὸν δ ζ, καὶ λειπέτω ἑαυτῶ ἐλάττονα τὸν γ ζ. Ἐπεὶ οὖν οἱ α, β, τὸν ε, μετροῦσι, καὶ ὁ ε, τὸν δ ζ, οἱ α, β, ἄρα τὸν δ ζ, μετροῦσι, μετροῦσι δὲ ἔτι καὶ τὸν γ δ, μετήσουσι πάντως καὶ τὸν γ ζ, ἐλάττονα τῆ ε. ὅπερ ἄτοπον, ὁ ε, ἄρα τὸν γ δ, μετρεῖ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. lib. 7. Fig. 22.

Πρότασις ΛΗ΄: Πρόβλημα.

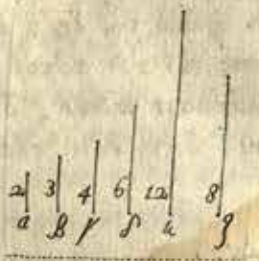
Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ἤδη ἑξῆς ἀριθμοὶ οἱ α β γ, δεῖ δὲ ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμὸν εὑρεῖν. Εὑρεθήτω διὰ τῆς λς΄: ὁ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς παρὰ τῶν α β, καὶ ἔστω ὁ δ. τὸν δ, ἄρα ἤτοι μετρεῖ ὁ γ, ἢ οὔ. μετρείτω πρότερον, οἱ α, β, γ, ἄρα μετροῦσι τὸν δ. Λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστος. εἰ γὰρ δυνατὸν μετρεῖτωσαν οἱ α, β, γ, ἐλάττονα τῆ δ, ἀριθμὸν τὸν ε. Ἐπεὶ οὖν οἱ α, β, μετροῦσι τὸν ε, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος, τετέσιν ὁ δ, μετρήσει τὸν αὐτὸν ε, καὶ τὸ ἐλάσσονα, ὅ δὲ δ, μείζων ἐστὶ τῆ ε, ὅπερ ἄτοπον. ἄρα ὁ δ, ἐστὶν ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν α, β, γ, μετρούμενος. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Μὴ μετρείτω δὴ ὁ γ, τὸν δ. καὶ εἰλήφθω διὰ τῆς λς΄: ὁ ὑπὸ τῶν β γ, ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, καὶ ἔστω ὁ ε. Ἐπεὶ τοίνυν οἱ α, β, τὸν δ, μετροῦσι,

καὶ ὁ δ, τὸν ε, μετρεῖ καὶ τὸν αὑτοῦ. οἱ α β, ἄρα μετροῦσι καὶ τὸν ε, μετρεῖ δὲ αὐτὸν καὶ ὁ γ, οἱ α, β, γ, ἄρα τὸν ε, μετροῦσι. Λέγω δή, ὅτι καὶ ἐλάχιστος. εἰ γὰρ δυνατὸν μετρέιτωσαν οἱ α β χ, ἐλάττονα τὸ ε, ἀριθμὸν τὸν ζ. Ἐπεὶ οὖν οἱ α β, τὸν ζ, μετροῦσι, καὶ ὁ ὑπ' αὐτῶν ἄρα ἐλάχιστος μετρούμενος, μετρεῖ ὁ δ, τὸν αὐτὸν ζ, μετρήσει, καὶ τὸν ἀρωτέρω. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ γ, τὸν αὐτὸν ζ, μετρεῖ, μετρήσει καὶ τὸν ζ, καὶ ὁ ὑπὸ τῶν β γ, ἐλάχιστος μετρούμενος, μετρεῖ ὁ ε, ὁμοίζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἀδύνατον. ὁ ε, ἄρα ἐλάχιστος ὢν, ὑπὸ τῶν α β γ, μετρεῖται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 7. Fig. 23.



Πρότασις ΛΘ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετρῆται, ὁ μετρούμενος, ὁμώνυμον μέρος ἔξει τῷ μετροῦντι.

Ὁ α, ἤδη ἀριθμὸς ὑπὸ τοῦ β, ἀριθμοῦ μετρείσθω καὶ τὰς ἐν τῷ γ, μονάδας. Λέγω τὸν γ, μέρος εἶναι τοῦ α, ὁμώνυμον τῷ β. ὁσάκις γὰρ ὁ β, τὸν α, μετρεῖ, τοσαυτάκις μετρεῖ καὶ ἡ δ, μονὰς τὸν γ, καὶ τὸ β': πόσιμα τῆς ις': ἄρα ὡς ἡ δ, μονὰς πρὸς τὸν γ, ὁ β, πρὸς τὸν α, καὶ κατὰ τοὺς ις': ἀλλ' ὡς ἡ δ, μονὰς πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν α, ὁ οὖν μέρος ἐστὶν ἡ δ, μονὰς τοῦ β, τὸ αὐτὸ ἔσται, καὶ ὁ γ, τοῦ α. ἀλλ' ἡ δ, μονὰς, ὁμώνυμον μέρος ἐστὶ τοῦ β, καὶ ὁ γ, ἄρα τοῦ α, ὁμώνυμον μέρος ἐστὶ τοῦ β, καὶ τὸν γ': ὅρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Μ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς μέρος ἔχῃ ὁποιονοῦν, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει.

Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α, μέρος ὁποιονοῦν ἐχέτω τὸν β, ὁμώνυμος δὲ ἀριθμὸς τῷ β, ἔστω ὁ γ. Λέγω δὴ τὸν γ, μετρεῖν τὸν α. Ἐπεὶ γὰρ ὁ β, μέρος ἐστὶ τοῦ α, καὶ ὁ γ, ὁμώνυμος τῷ β, ἄρα ὁ μέρος ἐστὶν ὁ β, τοῦ α, τὸ αὐτὸ ἔσται καὶ ἡ δ, μονὰς τοῦ γ. ἔσται δὴ ὡς ἡ δ, πρὸς τὸν γ, ὁ β, πρὸς τὸν α, καὶ κατὰ τοὺς ις': ὡς ἡ δ, μονὰς πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν α, ὁ γ, ἄρα μετρεῖ τὸν α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις ΜΑ΄. Πρόβλημα.

Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν, ἔξει τὰ δοθέντα μέρη.

Euclid. lib. 7. Fig. 24.

Ἔστωσαν ἤδη δοθέντα μέρη τὰ α β γ, καὶ τάξει ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ οἱ δ ε ζ. Εὑρεθήτω καὶ τῶν λη΄ ὁ ἐλάχιστος μεμετρημένος ὑπὸ τῶν δ ε ζ, καὶ ἔστω ὁ η, ὁ ἡ ἄρα μεμετρημένος ὑπὸ τῶν δ ε ζ, οἵτινές εἰσιν ὁμώνυμα μέρη ἐστὶ τὰ α β γ, ἔχει πάντως τὰ δοθέντα μέρη. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστος, εἰ γὰρ μή. ἔστι τις ἐλάττων τοῦ η, ἔχων τὰ δοθέντα α β γ, μέρη, καὶ ἔστω ὁ θ. Ἐπεὶ τοίνυν ὁ θ, τὰ α β γ, μέρη ἔχει, τοῖς δὲ α β γ, ὁμώνυμοι ἀριθμοί εἰσιν οἱ δ ε ζ. ἄρα ὁ θ, ὑπὸ τῶν δ ε ζ, μετρηθήσεται, ἐλάσσων δὲ τοῦ η, ὅπερ ἄτοπον, ὁ η, ἄρα ἐστὶν ἐλάχιστος, ἔχων τὰ δοθέντα μέρη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Τέλος τῆς Ἑβδόμης τοῦ τῆς Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΟΓΔΟΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Πρότασις Α'. Θεώρημα.

Ε'αν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἀριθμοὶ ἤδη οἱ α β γ δ, ἔστωσαν ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν α δ, ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Λέγω τοὺς α β γ δ, ἐλαχίστους εἶναι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. εἰ γὰρ μή, ἔστωσαν οἱ ε ζ η θ, ἐλάσσονες τῶν α β γ δ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ αὐτοῖς. καὶ διὰ τῆς ιδ': ἄρα τὸ ζ': ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν θ. καὶ διὰ τῆς κά: τὸ αὐτό, μετρήσει ὁ α, τὸν ε, καὶ ὁ δ, τὸν θ, οἱ μείζονες τοὺς ἐλάσσονας, ὅπερ ἄτοπον. Ε'αν ἄρα ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 8. Fig. 1.

Πρότασις Β'. Πρόβλημα.

Ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἐξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἐπιτάξῃτις, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ.

Ἔστω ἤδη δοθεὶς λόγος ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ὁ τῶν α, πρὸς τὸν β, καθ' ὃν δεῖ εὑρεῖν ἐξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους ἀριθμοὺς, ὅσους ἄν τις ἐπιτάξῃ, Ἐπιτετάχθωσαν δὴ πρῶτον τρεῖς. καὶ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω, τὸν δὲ β, πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω. ὡσαύτως, καὶ ὁ β, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας, τὸν ε, ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ α, τοὺς α β, πολλαπλασιάσας τοὺς γ δ, πεποίηκε, καὶ τὸν ιζ: τὸ ζ': ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ἐστὶν ὁ γ, πρὸς τὸν τὸν δ. Λοιπὸς ἐπεὶ οἱ α β, τὸν β, πολλαπλασιάσαντες τοὺς δ ε, πεποιήκασιν, ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ τὸν ιή: τὸ ζ': ὡς δὲ, ὁ α,

ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔστι καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα καὶ τὸν ιά: τῶν ε: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ δ, πρὸς τὸν ε, οἱ τρεῖς ἄρα ἀριθμοὶ γδε, ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τῶ α, λόγῳ πρὸς τὸν β. Λέγω, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. οἱ γὰρ αβ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄντες, καὶ ἑαυτοὺς πολλαπλασιάσαντες τοὺς γε, πεποιήκασιν, ἄρα καὶ τὸν κϑ: τῶν ζ: οἱ γε, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐὰν δὲ τέσσαρες ἐπιπαχθῶσι, πολλαπλασιάσας ὁ α, τοὺς γδ, ποιείτω τοὺς ζηϑ, ὁ δὲ β, τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν κ, ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ α, τοὺς γδ, πολλαπλασιάσας τοὺς ζη, πεποίηκε, καὶ τὸν ιζ: ἄρα τῶν ζ: ἔστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ο ζ, πρὸς τὸν η, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς β, ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ ζ, πρὸς τὸν η. Αὖθις ἐπεὶ ὁ α, τοὺς δε, πολλαπλασιάσας τὰς ηϑ, πεποίηκεν, ἔστι διὰ τῆς αὐτῆς, ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ η, πρὸς τὸν ϑ, ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ἐστὶ καὶ ὁ η, πρὸς τὸν ϑ. ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, δέδεικται καὶ ὁ ζ, πρὸς τὸν η, ἄρα καὶ ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ η, πρὸς τὸν ϑ. ἐπεὶ δὲ καὶ οἱ αβ, τὸν ε, πολλαπλασιάσαντες τὰς ϑκ, πεποιήκασιν. ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ ϑ, πρὸς τὸν κ, καὶ τὸν ιή: τῶν ζ: οἱ ζ, η, ϑκ, ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τῶ α, πρὸς τὸν β, λόγῳ. ὅτι δὲ καὶ πρῶτοι, δείκνυται, διὰ τῆς κϑ: τῶν ζ: οἱ γὰρ αβ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τοὺς γε, πρώτως πρὸς ἀλλήλους πολλαπλασιάσαντες, τοὺς ζκ, πεποιήκασιν. Ἐὰν δὲ πέντε ἐπιπαχθῶσι, πολλαπλασιαϑήσονται οἱ εὑρεθέντες τέσσαρες ἐπὶ τὸν α, ὁ δὲ τέταρτος καὶ ἐπὶ τὸν β, καὶ ὅπως ἐφεξῆς ἀεὶ τῶν ἐχόντων ἐφ' ἑκάτερον πολλαπλασιαζομένων ἔσται τὸ ἐπιπαχθέν.

Euclid. Lib. 8. Fig. 2.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς ὦσιν, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετράγωνοί εἰσιν. ἐὰν δὲ τέσσαρες, κύβοι.

Β': Ἔτι ἐὰν ἀριθμὸς ὁσουσδηποτοῦν ἐξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας, οἱ γινόμενοι ἐξῆς ἀνάλογον ἔσονται, καϑ' ὃν, ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ πολλαπλασιασϑέντες, λόγον.

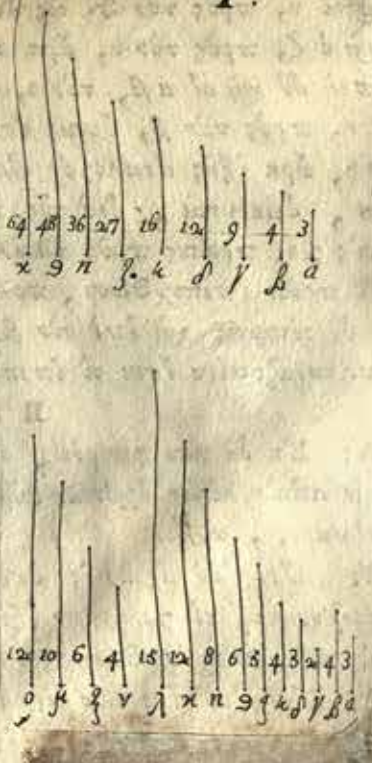
Γ'. Ἔτι ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιείτω τινὰ, καὶ ἔτι ἄλλους, ποιήσουσι τῶν εἰς ἐλαχίστους ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ.

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τὴν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἔστωσαν ἤδη πρῶτον ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τὴν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ α β, καὶ τὸν κ δ· ἄρα τὸ ζ· οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἔστωσαν β'· τρεῖς ἐν τῷ τὸ α, λόγῳ πρὸς τὸν β, ὡς οἱ γ δ. Λέγω τοὺς ἄκρους αὐτῶν γ ε, πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, ἑαυτοὺς πολλαπλασιάσαντες, καὶ τὸν ἀνωτέρω, τοὺς γ ε, πεποιήκασιν, οἱ γ ε, ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ καὶ τὸν κ θ· τὸ ζ· ἔστωσαν δὴ καὶ τέσσαρες ὡς οἱ ζ η θ κ· ἐπεὶ οὖν καὶ τὸν ἀνωτέρω οἱ α β, τοὺς γ ε, πολλαπλασιάσαντες τοὺς ζ κ, πεποιήκασιν, οἱ ζ κ, καὶ τὸν κ θ· πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Τῷ αὐτῷ λόγῳ δείκνυται, κἂν πέντε ὦσιν, ἢ καὶ πλείονες, τοὺς ἄκρους αὐτῶν πρώτους πρὸς ἀλλήλους εἶναι, ἀεὶ γὰρ οἱ τῶν προκειμένων ἄκροι ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἄκρων τῶν προηγουμένων ἐπὶ τοὺς δύο πρώτους γίνονται.

Euth. Lib. 8. Fig. 3.

Γ'.

Πρότασις Δ'. Πρόβλημα.

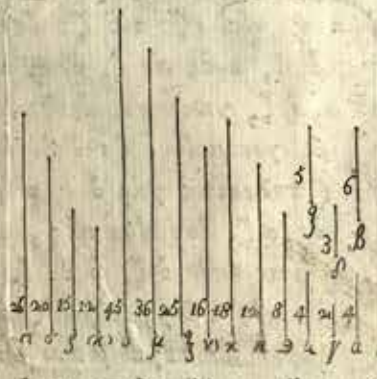
Λόγῳ δοθέντι ὁποσωοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἐλαχίστους, ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις.

Ἔστωσαν ἤδη ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς λόγοι ὁ τὸ α, πρὸς τὸν β, ὁ τὸ γ, πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ τὸ ε, πρὸς τὸν ζ. Εὑρεθήτω δὴ καὶ τὸν λ ς'· τὸ ζ'· ὑπὸ τῶν β γ, ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, καὶ ἔστω ὁ η. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ β, τὸν η, μετρεῖ, τοσαυτάκις μετρείτω καὶ ὁ α, τὸν θ, ὁσάκις δὲ ὁ γ, τὸν η, μετρεῖ, τοσαυτάκις μετρείτω καὶ ὁ δ, τὸν κ. τὸν δὲ κ, ἤτοι μετρεῖ ὁ ε, ἢ οὔ. μετρείτω πρότερον. καὶ ὁσάκις ὁ ε, τὸν κ, μετρεῖ, τοσαυτάκις μετρείτω καὶ ὁ ζ, τὸν λ. Λέγω τοὺς θ η, κ λ, ἑξῆς ἀνάλογον εἶναι ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β, ἰσάκις μετροῦσι τοὺς θ η, καὶ τὸν ιέ· ἄρα τὸ ε· ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ θ, πρὸς τὸν η. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ η, πρὸς τὸν κ, καὶ ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὁ κ, πρὸς τὸν λ. Λέγω, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μή, ἔστωσαν ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν θ η κ λ, οἱ ν ξ μ ο. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ ν, πρὸς ξ, οἱ δὲ α β, ἐλάχιστοί εἰσιν, ἄρα καὶ τὸν

κ α·

κά: τῶ ζ΄: ὁ μὲν α, τὸν ν, μετρεῖ, ὁ δὲ β, τὸν ξ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὁ γ, τὸν ξ, μετρεῖ, ἐπεὶ ὑποτίθεται ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ξ, πρὸς τὸν μ. καὶ τὸν λζ΄: ἄρα τῶ ζ΄: καὶ ὁ ὑπὸ τῶν βγ, μετρούμενος, δηλονότι ὁ η, μετρήσει τὸν ξ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἀδύνατον. οἱ Θηκλ, ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι.

Eucl. lib. 8. Fig. 4.



Μὴ μεζείπω δὴ ὁ ε, τὸν κ. εἰλήφθω διὰ τῆς λς΄: τῶ ζ΄: ὁ ὑπὸ τῶν εκ, ἐλάχιστος μετρούμενος, καὶ ἔστω ὁ μ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ κ, τὸν αὐτὸν μ, μεζεῖ, τοσαυπάκις μεζείπω καὶ ἕκάτερος τῶν Θη, ἑκάτερον τῶν νξ, ὁσάκις δὲ ὁ ε, τὸν μ, μετρεῖ, μετρείπω καὶ ὁ ζ, τὸν ο, οἱ Θη, πυὺς νξ, μετρῆσιν ἰσάκις, ἔστιν ὡς ὁ Θ, πρὸς τὸν η, ὁ ν, πρὸς τὸν ξ, ὡς δὲ ὁ Θ, πρὸς τὸν η, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὕπως ὁ ν, πρὸς τὸν ξ. διὰ τὰ αὐτὰ ἔσαι καὶ ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ξ, πρὸς τὸν μ. Λύυθις ἐπεὶ ὁ ε, τὸν μ, καὶ ὁ ζ, τὸν ο, ἰσάκις μετρεῖ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὁ μ, πρὸς τὸν ο, οἱ νξμο, ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μὴ, ἔσωσαν ἑξῆς ἀνάλογον ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν νξμο, οἱ πρστ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ σ, πρὸς τὸν β, ὁ π, πρὸς τὸν ρ, οἱ δὲ αβ, ἐλάχιστοί εἰσιν, ἄρα καὶ τὸν ῥηθεῖσαν κά: ὁ β, τὸν ρ, μετρεῖ, διὰ τῆς αὐτῆς δὲ καὶ ὁ γ, τὸν ρ, μετρεῖ· καὶ ἑπομένως καὶ τὸν λζ΄: τῶ ζ΄: μετρεῖ τὸν ρ, καὶ ὁ ὑπὸ τῶν βγ, ἐλάχιστος μετρούμενος, τυτέστιν ὁ η. ἔστι δὲ ὡς ὁ η, πρὸς τὸν κ, ὕπως ὁ ρ, πρὸς τὸν σ, καὶ καὶ τὸν ιγ΄: τῶ ζ΄: καὶ ὡς ὁ η, πρὸς τὸν ρ, ὁ κ, πρὸς τὸν σ, ὁ δὲ η, τὸν ρ, μετρεῖ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ κ, τὸν σ, μεζεῖ δὲ καὶ ὁ ε, τὸν σ, οἱ εκ, ἄρα τὸν σ, μετρῆσι. καὶ ἑπομένως διὰ τῆς λζ΄: τῶ ζ΄: καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν εκ, μετρούμενος, μετρεῖ τὸν σ, ὕπος δέ ἐστιν ὁ μ, ὁ μ, ἄρα μετρεῖ τὸν σ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἀδύνατον. οἱ νξμο, ἄρα ἐλάχιστοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Λῆμμα εἰς ἀπόδειξιν τῆς ἑπομένης ε: προτάσεως.

Ε'αν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἔτε ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔτε ἐν διαφόροις, ὁ πρῶτος πρὸς τὸν ἔσχατον, λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων.

Ε'σωσαν ἤδη πρῶτον τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ α, β, γ, ἑξῆς ἀνάλογον ἐν λόγοις ὁποιοις. Λέγω τὸν α, πρὸς τὸν γ, λόγον ἔχειν τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων, τυτέστι τὸ α, πρὸς τὸν β, καὶ τὸ β, πρὸς τὸν γ. Ε'στω γὰρ τῶ μὲν α, πρὸς τὸν β, λόγε πηλικότης ὁ δ, τῶ δὲ β, πρὸς τὸν γ, ὁ ε. καὶ ὁ δ, τὸν ε, πολλα-

πλασιάσας τὸν ζ, ποιείτω· καὶ τὸν ε· ἄρα ἄρον τῶν ς′· ὁ ζ, ἐστὶν ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν λόγων, τῶν ἐν τοῖς α β γ. Ἐπεὶ δὲ ὁ δ, τὸν μὲν α, πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκεν, (πηλικότης γὰρ ὁ δ, τοῦ α, πρὸς τὸν β,) τὸν δὲ ε, τὸν ζ, ἄρα καὶ τὸν ὑπὸ τῶν ι ζ′: τοῦ ζ′: ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν ζ, καὶ καὶ τὸν ὑπὸ τῶν ι θ′: τῶν αὐτῶν, ὁ ἐκ τῶν α, καὶ ζ, γινόμενος ἀριθμός, ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν ε, καὶ β, γινομένῳ. ἐπεὶ δὲ ὁ ἐκ τῶν ε, καὶ β, ἐστὶν ὁ γ, (πηλικότης γὰρ ὁ ε, τοῦ β, πρὸς τὸν γ,) ἄρα ὁ ἐκ τῶν α ζ, ἴσος ἐστὶ τῷ γ, μεταξὺ ἄρα τῶν α, καὶ γ, πηλικότης ἐστὶν ὁ ζ, ὁ δὲ ζ, ἐστὶν ὁ συγκείμενος ἐκ τῶν ἐν τοῖς α β γ, λόγων, ὁ α, ἄρα πρὸς τὸν γ, ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων.

Eucl. lib. 8. Fig. 5.

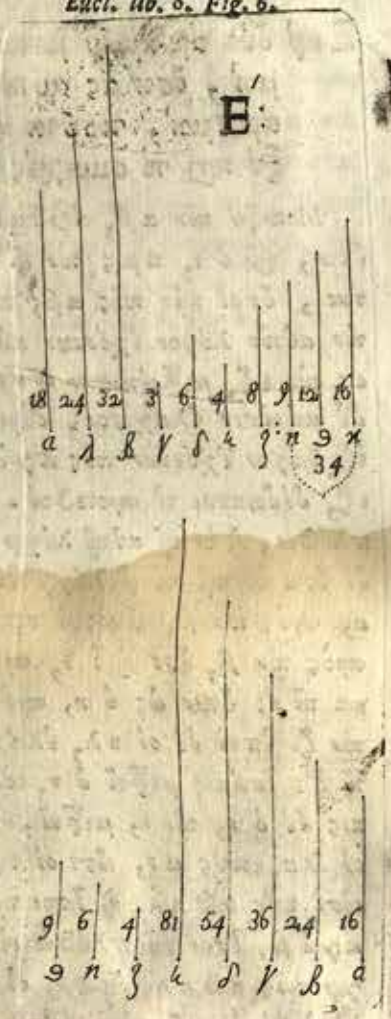
Ἔστωσαν ἤδη τέσσαρες οἱ α β γ δ, ὧν πηλικότης τῶν λόγων ἔστωσαν οἱ ε ζ η, καὶ ὁ ε, τὸν ζ, πολλαπλασιάσας, τὸν θ, ποιείτω, ὁ δὲ η, τὸν θ, ὡσαύτως πολλαπλασιάσας τὸν κ, ποιείτω. Λέγω τὸν α, πρὸς τὸν δ, ἔχειν λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων, τῶν ἐν τοῖς α β γ δ, ὅστις ἐστὶν ὁ κ, καὶ τὸν ε· ὅρον τῶν ς′: τῶν γὰρ β, παρειλήφαμεν, ἔσονται ξῆς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ α γ δ, ἐν λόγοις ἀνομοίοις, πηλικότητες δὲ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων οἱ η θ, ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς λόγων ὁ κ, καὶ τῷ ἀνωτέρω ἀποδείξιν, ὁ α, πρὸς τὸν δ, ἔχει τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τῶν ἐν τοῖς α β γ δ, λόγων. ὡσαύτως δειχθήσεται, κἂν πέντε ὑποτεθῶσι, τῶν β′: καὶ γ′: παρειλήφαμεν· καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς ὡσαύτως.

Πρότασις Ε′: Θεώρημα.

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι, τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἔστωσαν ἤδη ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ α β, πλευραὶ δὲ τῶν μὲν α, οἱ γ δ, τῶν δὲ β, οἱ ε ζ. Λέγω τὸν α, πρὸς τὸν β, ἔχειν λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν. οἵτινές εἰσιν ὁ τῶν γ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὁ τῶν δ, πρὸς τὸν ζ. Γενέσθω δὴ ὁ λ, ἐκ τῶν πολλαπλασιασμῶν τῶν ε, ἐπὶ τὸν δ. Ἐπεὶ οὖν ὁ δ, τοὺς γ ε, πολλαπλασιάσας τοὺς α λ, πεποίηκεν. ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν λ, καὶ τὸν ὑπὸ τῶν ι ζ′: τῶν ζ′: Αὖθις διὰ τῆς αὐτῆς, ἐπεὶ ὁ ε, τοὺς δ ζ, πολλαπλασιάσας τοὺς λ β, πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ λ, πρὸς τὸν β, οἱ

β, οἱ α λ β, ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τοῖς τῶν πλευρῶν λόγοις, τουτέστι τοῦ γ, πρὸς τὸν ε, καὶ τὸ δ, πρὸς τὸν ζ. καὶ ἐπὶ τὸ ἀνωτέρω λῆμμα, ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔχει λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν ἐν τοῖς α λ β, λόγων, ἔστι δὲ εἰσιν, οἱ τῶν πλευρῶν λόγοι, ὁ τοῦ α, λόγος ἄρα πρὸς τὸν β, σύγκειται ἐκ τῶν λόγων τῶν πλευρῶν. Οἱ ἐπίπεδοι ἄρα, ἐπὶ τὰ ἑξῆς.

Euclid. lib. 8. Fig. 6.

Πρότασις ς΄. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρεῖ, οὐδὲ ἄλλος οὐδείς οὐδένα μετρήσει.

Οἱ α, β, γ, δ, ε, ἀριθμοὶ ἔστωσαν ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ ὁ α, τὸν β, μὴ μετρείτω. Λέγω δή, ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδείς οὐδένα μετρήσει. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, οὐ μετρεῖ, οὐδεὶς τῶν α β γ δ, τὸν ἑξῆς μετρήσει, ἐν τῇ αὐτῇ γὰρ εἰσι λόγῳ. ὅτι δὲ οὐδείς τε οὐδένα μετρεῖ, δείκνυμι, παρ: χαρ: ὅτι ὁ α, οὐδὲ τὸν γ, μετρεῖ. Εὑρήσθησαν ἤδη διὰ τῆς λέ: τοῦ ζ΄: οἱ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α β γ, καὶ ἔστωσαν οἱ ζ η θ. Ἐπεὶ οὖν ὁ α, τὸν β, οὐ μετρεῖ, οὐδὲ ὁ ζ, τὸν η, (ἐν τῇ αὐτῇ γὰρ λόγῳ εἰσὶ) ὥστε ὁ ζ, μονὰς οὐκ ἔστιν, ἡ γὰρ μονὰς πάντας μετρεῖ. ἐπεὶ δὲ οἱ α β γ, ἴσοι τῷ πλήθει εἰσὶ, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ τοῖς ζ η θ, ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ι δ΄: τοῦ ζ΄: οὕτω δὲ ἴσον ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἰσὶ, τουτέστιν ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν θ, ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ δὲ ζ, τὸν θ, οὐ μετρεῖ, ἐστὶ τῶν κδ΄: τοῦ ζ΄: οὐδὲ ὁ α, ἄρα τὸν γ, μετρεῖ. ὡσαύτως δειχθήσεται, ὅτι οὐδ' ἄλλος τις ἄλλον τινὰ μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

a 3
β 6
12
γ 24

Πρότασις Ζ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρεῖ, καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει.

Ἔστωσαν ἤδη ἑξῆς ἀνάλογον οἱ α β γ δ, ὁ δὲ α, τὸν δ, μετρείτω. Λέγω, ὅτι καὶ τὸν β, μετρεῖ. εἰ γὰρ μὴ ὁ α, τὸν β, μετρεῖ, οὐδ' ἄλλος τις οὐδένα μετρήσει, κατὰ τὸ ἀνωτέρω, ἀλλὰ μὴν τετὶ ἀδυνάτον, ὑπετέθη γὰρ ὁ α, τὸν δ, μετρεῖν, ἄρα ὁ α, καὶ τὸν β, μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Η΄: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ καὶ τοῦ συνεχοῦς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ καὶ τοῦ συνεχοῦς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς μεταξὺ καὶ τοῦ συνεχοῦς ἐμπεσοῦνται.

Μεταξὺ τῶν α β, ἀριθμῶν πιπτέτωσαν οἱ γ δ, καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ἔστω, καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. Λέγω δὴ μεταξὺ τῶν ε ζ, τοσοῦτοι ἀριθμοὶ ἐμπεσοῦνται, ὅσοι καὶ τοῖς α β, πεπτώκασιν. εἰ μὲν γὰρ οἱ α γ δ β, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, ἐπεὶ καὶ τοῦ κα: τοῦ ζ΄: οἱ α β, ἰσάκις μέξουσι τοὺς ε ζ, μεξείποσιν ἰσάκις, ἔτι καὶ οἱ γ δ, τοὺς μν, καὶ ἔσαι τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ μή εἰσιν ἐλάχιστοι, εὑρεθήτωσαν διὰ τῆς λέ: τοῦ ζ΄: οἱ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α γ δ β, καὶ ἔστωσαν οἱ η θ κ λ. εἰ ἄρα οἱ η λ, ἴσοι εἰσὶ τοῖς ε ζ, δέδεικται τὸ προτεθέν. εἰ δὲ ἐλάσσονες, ἐπεὶ οἱ α γ δ β, καὶ η θ κ λ, ἴσοι τῷ πλήθει, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τοῦ ι δ΄: τοῦ ζ΄: καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ η, πρὸς τὸν λ, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔστι καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν ζ· καὶ τοῦ ι ά: ἄρα τοῦ έ: ἔστιν ὡς ὁ η, πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. ἐπεὶ δὲ οἱ η λ, ἐλάχιστοί εἰσι, καὶ τοῦ κά: τοῦ ζ΄: ἰσάκις μέξει ὁ η, τὸν ε, καὶ ὁ λ, τὸν ζ, ὁσάκις δὲ ὁ η, τὸν ε, μέξει, τοσαυτάκις μεξήτωσαν καὶ οἱ θ κ, τοὺς μν, ὥστε οἱ ε μν ζ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς η θ κ λ, καὶ ἴσοι τῷ πλήθει. ἀλλὰ καὶ οἱ α γ δ β, ἴσοι τῷ πλήθει εἰσὶν καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς η θ κ λ, ἄρα καὶ οἱ ε μν ζ, ἴσοι τῷ πλήθει εἰσὶ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς α γ δ β, ὅσοι ἄρα μεταξὺ τῶν α β, πεπτώκασιν ἑξῆς ἀνάλογον, τοσοῦτοι καὶ μεταξὺ τῶν ε ζ, πεπτώκασιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

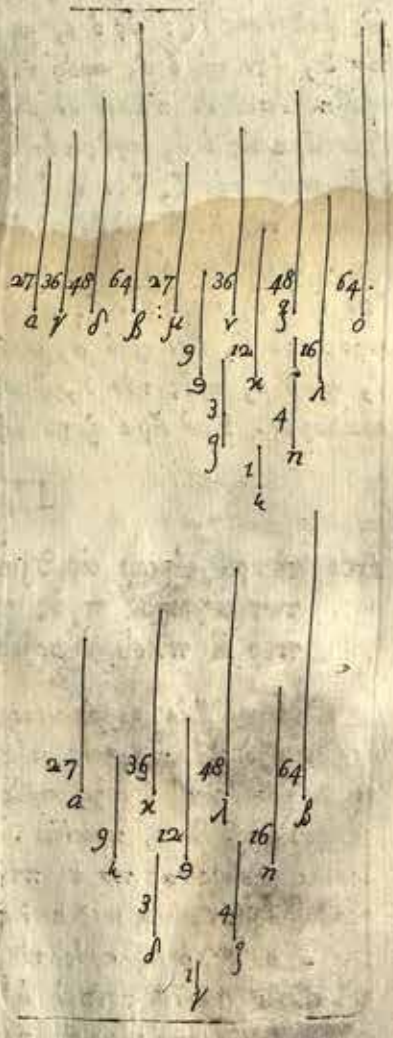
Euclid. Lib. 8. Fig. 2.

Πρότασις Θ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ καὶ τοῦ συνεχοῦς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ καὶ τοῦ συνεχοῦς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρῳ αὐτῶν καὶ μονάδος ἑξῆς μεταξὺ καὶ τοῦ συνεχοῦς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Μεταξὺ γὰρ τῶν α β, πιπτέτωσαν οἱ γ δ, ἑξῆς ἀνάλογον. Λέγω ὅτι καὶ μεταξὺ τοῦ α, καὶ τῆς μονάδος, καὶ τοῦ β, καὶ τῆς μονάδος, τοσοῦτοι πεσοῦνται, ὅσοι μεταξὺ

πλευρὰ τὴν αβ, πίπτωσιν. Ἔστω γὰρ ἡ ε, μονὰς· καὶ πρῶτον μὲν διὰ τῆς λέ: τὸ ζ': λέγω δὴ ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς αγδβ, καὶ ἴσωσιν ἑαυτοὺς οἱ ζη. δεύτερον δὲ, ξεῖς διὰ τῆς β': τὸ παρόντος, ὡς οἱ θκλ. καὶ ὅπως ἐφεξῆς, μέχρις ἂν ἴσοι τῷ ἀριθμῷ γένωνται τοῖς αγδβ, καὶ ἴσωσιν ἑαυτοὺς οἱ μνξο. Ἐπεὶ οὖν οἱ αγδβ, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς κατὰ τὸν κγ': τὸ ζ': τόσοις δὲ ἴσοι τῷ πλήθει εἰσὶν οἱ μνξο, ἄρα ἕκαστος τῶν μνξο, ἴσός ἐστιν ἑκάστῳ τῶν αγδβ, οἱ μο, ἄρα ἴσοί εἰσι τοῖς αβ. Ἐπεὶ δὲ ὁ ζ, κατὰ τὸν β': τὸν παρόντος ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν θ, πεποίηκε, τὸν δὲ θ, ὡσαύτως πολλαπλασιάσας τὸν μ, πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα κατὰ τὸν ιζ': τὸ ζ': ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν θ, ὅπως ὁ θ, πρὸς τὸν μ, ἔσι δὲ διὰ τὸ β': ποριστὸν τῆς ις': τὸ αὐτὸ ζ': καὶ ἡ ε, μονὰς πρὸς τὸν ζ, ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν θ, ἄρα μεταξὺ τῆς ε, μονάδος, καὶ τοῦ μ, ἀριθμοῦ, τοσοῦτοι ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον πεπτώκασιν, ὅσοι μεταξὺ τῶν αβ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὅτι τοσοῦτοι πίπτουσι καὶ μεταξὺ τῆς ε, μονάδος καὶ ο. οἱ δὲ μ, καὶ ο, ἴσοί εἰσι τοῖς αβ. Ἐὰν ἄρα δύο ἀριθμοὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euclid. lib. 8. Fig. 8.

Πρότασις Ι': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ἡ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοὶ, ὅσοι ἑκατέρῳ αὐτῶν καὶ μονάδος ἑξῆς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς, ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

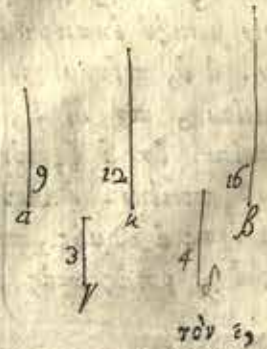
Ἔστωσαν ἤδη δύο ἀριθμοὶ οἱ αβ, καὶ μεταξὺ μὲν τοῦ α, καὶ μονάδος γ, πιπτέτωσαν ἑξῆς ἀνάλογον οἱ δε, μεταξὺ δὲ τοῦ β, καὶ γ, μονάδος, οἱ ζη. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ μεταξὺ τῶν αβ, τοσοῦτοι πεσοῦνται, ὅσοι μεταξὺ ἑκατέρου τῶν αβ, καὶ μονάδος πεπτώκασιν. ὁ δὲ, τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὸν θ, ποιείτω, τὸν δὲ θ, ὡσαύτως πολλαπλασ: τὸν κ, ποιείτω. ἔτι ὁ ζ, τὸν αὐτὸν θ, πολλαπλασιάσας τὸν λ, ποιείτω. δείκνυται, τοὺς μεταξὺ τῶν αβ, ἐμπεσόντας ἀριθμοὺς, τουτέστι τοὺς κλ, ἑξῆς ἀνάλογον εἶναι τοῖς αβ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ γ, μονὰς πρὸς τὸν δ, ὅπως ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ὁ δ, ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιά-

σιάσας τὸν ε, πεποίηκε, καὶ τὸ β': πόλισμα τῆς ις': τῆ ζ'. διὰ τὰ αὐτὰ ἔτι, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ γ, μονὰς πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν α, ὁ δ, ἄρα τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα δείκνυται, ὅτι καὶ ὁ ζ, ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν η, πεποίηκε, τὸν δὲ η, ὡσαύτως πολλαπλασ: τὸν β, πεποίηκεν. ἐπεὶ δὲ ὁ δ, ἑαυτὸν τε καὶ τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὰς ε θ, πεποίηκεν. ἔσαι ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν θ, καὶ τλω ιζ': τοῦ ζ': διὰ τῆς αὐτῆς ἔτι, ἐπεὶ καὶ ὁ ζ, ἑαυτὸν τε καὶ τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὰς θ η, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ θ, πρὸς τὸν η, ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, λῶ καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν θ, ἄρα ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν θ, οὕτως ἐστὶν ὁ θ, πρὸς τὸν η. Αὖθις ἐπεὶ ὁ δ, τὰς ε θ, πολλαπλασιάσας τὰς α κ, πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα διὰ τῆς ῥηθείσης ιζ': ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν κ, ὡς δὲ ὁ ε, πρὸς τὸν θ, ἔστι καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν κ. ἐπεὶ δὲ πάλιν οἱ δ ζ, τὸν θ, πολλαπλασιάσαντες τὰς κ λ, πεποιήκασιν ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ κ, πρὸς τὸν λ, καὶ τλω ιή: τῆ ζ': ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν κ, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν κ, οὕτως ἐστὶν ὁ κ, πρὸς τὸν λ. Ἐπεὶ δὲ τελευταῖον ὁ ζ, τὰς θ η, πολλαπλασιάσας τὰς λ β, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ θ, πρὸς τὸν η, ὁ λ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ θ, πρὸς τὸν η, ἔστι καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἄρα καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ὁ λ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν κ, καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν λ, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν κ, καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν λ, καὶ ὁ λ, πρὸς τὸν β, οἱ α, κ, λ, β, ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΑ'. Θεώρημα.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Ἐστωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ α β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν οἱ γ δ. Λέγω, ὅτι μεταξὺ τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν, ὁ δὲ α, πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ὁ γ, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ γ, ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν, ὡς πλευρὰ τὸ α, τὸν δὲ δ, ὡσαύτως πολλαπλασιάσας τὸν ε, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν δ, καὶ τὸν ιζ': τῆ ζ': ἐπεὶ δ' αὖθις οἱ γ δ, τὸν δ, πολλαπλασιάσαντες τὰς ε β, πεποιήκασιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἐδείχθη καὶ ὁ α, πρὸς τὸν ε, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς

Euclid. Lib. 8. Fig. 9.

τὸν ε,

τὸν ε, ἔτως ὁ ε, πρὸς τὸν β. ὁ ε, ἄρα μέσος ἀνάλογός ἐστι τῶν αβ· ἐπεὶ δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἥπερ ὁ α, πρὸς τὸν ε, καὶ τὸν ιθ': ὅρον τὸ ε: ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν ε, ἔστι καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα ὁ α, πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου φανερὸν, ὅτι ὃν λόγον ἔχει ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς τετραγώνου πρὸς τὴν τοῦ ἑτέρου, τὸν αὐτὸν ἔχει καὶ ὁ πρῶτος τετράγωνος πρὸς τὸν μέσον ἀνάλογον, καὶ ὁ μέσος ἀνάλογος πρὸς τὸν β': τετράγωνον.

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Δύο κύβων ἀριθμῶν, δύο μέσοι ἀνάλογοί εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Μεταξὺ δὴ τῶν δύο κύβων αβ, δύο λέγω ἐξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὺς ἐμπίπτειν. Ἔστω πλευρὰ τοῦ μὲν α, ὁ γ, τοῦ δὲ β, ὁ δ. καὶ ὁ γ, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν ε, ποιείτω, τὸν δὲ δ, ὡσαύτως πολλαπλ: τὸν ζ, ποιείτω. καὶ ὁ δ, ἔτι ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν η, ποιείτω. Αὗθις ἑκάτερος τῶν γδ, τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τοὺς θκ, ποιείτωσαν. ἐπεὶ οὖν ὁ γ, ἑαυτόν τε καὶ τὸν δ, πολλαπλασιάσας τοὺς εζ, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα καὶ τὸν ιζ': τοῦ ζ': ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ. Διὰ τῆς αὐτῆς δείκνυται, ὅτι ἔστι καὶ ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν θ, τοὺς γὰρ εζ, ὁ γ, πολλαπλασιάσας τοὺς αθ, πεποίηκεν. ὡς δὲ ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ἐδείχθη καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν θ. Αὗθις ἐπεὶ οἱ γδ, τὸν ζ, πολλαπλασιάσαντες τοὺς θκ, πεποιήκασιν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ θ, πρὸς τὸν κ, καὶ τὸν ιη: τοῦ ζ': ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, δέδεικται καὶ ὁ α, πρὸς τὸν θ. καὶ τὸν ια': ἄρα τοῦ ε: ὡς ὁ α, πρὸς τὸν θ, οὕτως ὁ θ, πρὸς τὸν κ. Πάλιν ἐπεὶ ὁ δ, τοὺς ζη, πολλαπλασιάσας τοὺς κβ, πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν η, ὁ κ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ ζ, πρὸς τὸν η, ἔστι καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ γὰρ δ, τὸν γ, καὶ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τοὺς ζη, πεποίηκεν. ἄρα καὶ τὸν ια: τοῦ ε: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, οὕτως ὁ κ, πρὸς τὸν β. ἐδείχθησαν δὲ ἐν τῇ αὐτῇ λόγῳ εἶναι καὶ οἱ α θ κ, ἄρα μεταξὺ τῶν δύο κύβων αβ, δύο ἐξῆς ἀνάλογον ἀριθμοί εἰσιν, ὅπερ ἦν τὸ α: Ἐπεὶ δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ πρὸς τὸν θ, καὶ τὸν ια: ὅρον τὸ ε: ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν θ, ἔστι καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, πλευρὰ

Eucl. Lib. 8. Fig. 10.

πρὸς

πρὸς πλευρὰν, ἄρα ὁ α, πρὸς τὸν β, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι μεταξὺ δύο κύβων δύο, μέσων ἀναλόγων πιπτόντων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τῷ πλευρῶν.

Πρότασις ΙΓ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν, ἀνάλογον ἔσονται, καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γινομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται. καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Τῶν ἤδη α β γ, ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμῶν πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν, ποιείτω τοὺς δ ε ζ, πολλαπλασιάσαντες δὲ καὶ τοὺς δ ε ζ, ποιείτωσαν τοὺς η θ κ. Λέγω τοὺς τε δ ε ζ, καὶ τοὺς η θ κ, ἑξῆς ἀνάλογον εἶναι. Ἐπεὶ οὖν ἕκαστος τῶν α β γ, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τοὺς, δ ε ζ, πεποίηκεν. οἱ δὲ δ ε ζ, τετράγωνοί εἰσι, καὶ μεταξὺ τῶν τε δ ε, καὶ ε ζ, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστι καὶ τὸν ι ά: τὰ παρόντος, ἔστωσαν δὲ οὗτοι οἱ λ μ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν λ, οὕτως ὁ λ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν μ, οὕτω μ, πρὸς τὸν ζ. ἐπεὶ δὲ οἱ δ λ ε, πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν ἔχει ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ τὸ πόρισμα τοῦ ι ά, τοῦ παρόντος, καὶ οἱ ε μ ζ, ὃν ἔχει ὁ β, πρὸς τὸν γ, ὁ δὲ τοῦ α, πρὸς τὸν β, καὶ τοῦ β, πρὸς τὸν γ, ὁ αὐτός ἐστιν. ἄρα οἱ δ λ ε, ε μ ζ, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἴσοι τὸ πλῆθος. ὥστε καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται, τουτέστιν ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, καὶ τὸν ι δ': τοῦ ζ': διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὅτι καὶ οἱ η θ κ, ἑξῆς ἀνάλογον ἔσονται. ἐπεὶ κύβοι εἰσὶ, καὶ μεταξὺ αὐτῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσι, καὶ τὸν ἀνωτέρω, ἔχοντες τὸν λόγον τῶν πλευρῶν, καὶ τὸ πόρισμα τοῦ ἀνωτέρω. *Eucl. Lib. 8. Fig. 11.*

Πρότασις ΙΔ': Θεώρημα.

Ἐὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν αὐτοῦ πλευρὰν μετρήσει, καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Τετράγωνος ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, μετρείτω τὸν β, τετράγωνον. Λέγω, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ α, δηλ: ὁ γ, μετρήσει τὴν πλευρὰν τοῦ β, δηλ: τὸν δ, καὶ γὰρ

τὸν

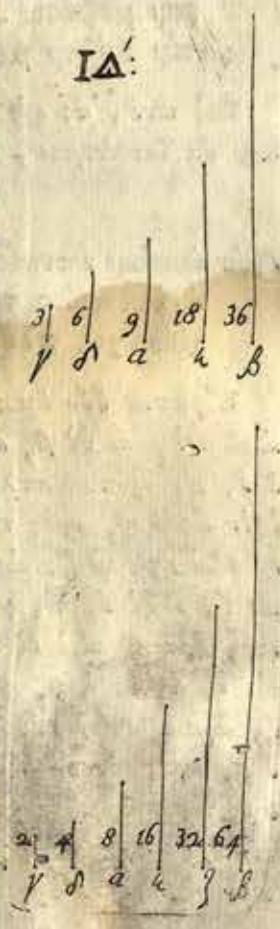
τῷ ι ά: τῷ παρόντος, εἰς μέσος ἀνάλογός ἐστι μεταξὺ τῶν α, β. ἔστω ὕτος ὁ ε, οἱ α ε β, ἄρα καὶ τὸ πόρισμα τῆς αὐτῆς, ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους τὸν λόγον τῶν πλευρῶν. ἐπεὶ δὲ ὁ α, τὸν β, μείζει, μείζησει παντὸς καὶ τὸν ε, καὶ τῷ ζ': τῷ παρόντος. ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν ε, ὕτως ἐστὶ καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ γ, ἄρα τὸν δ, μείζει. ἐπεὶ καὶ ὁ α, τὸν ε, μείζει. μείζητω δὴ ὁ γ, τὸν δ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ α, τὸν β, μείζει. ἐπεὶ γὰρ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ι ά: οἱ α ε β, ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τῷ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ δὲ γ, τὸν δ, μείζει, μείζει ἄρα καὶ ὁ α, τὸν ε, καὶ καὶ τῷ ζ': τῷ παρόντος, μείζει ἔτι καὶ τὸν β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 8. Fig. 11.

Πρότασις ΙΕ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβου ἀριθμοῦ μερῆ, καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ πλευρᾶ μερήσει, καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τοῦ πλευρᾶ μερῆ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μερήσει.

Ο' α, κύβος ἀριθμὸς, ἧς πλευρὰ ὁ γ, μείζητω τὸν β, κύβον ἀριθμὸν, ἧς πλευρὰ ὁ δ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ γ, τὸν δ, μείζει. εἰλήφθωσαν καὶ τοῦ ι β': τῷ παρόντος οἱ δύο μέσοι ἀνάλογον ὄντες ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν α β, καὶ ἔστωσαν ὕτοι οἱ ε ζ. δῆλον ὃν καὶ τὸ πόρισμ: τῆς αὐτῆς ι β': ὅτι οἱ α ε ζ β, ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τῷ γ, πρὸς τὸν δ. Ἐπεὶ δὲ ὁ α, τὸν β, μείζει, μείζησει παντὸς καὶ τὸν ε, καὶ τῷ ζ': τῷ παρόντος, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν ε, ὕτως ἐστὶν ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ δὲ α, τὸν ε, μείζει, μείζησει παντὸς καὶ ὁ γ, τὸν δ. ὅπερ ἐστὶ τὸ πρῶτον. Μείζητω δὴ ὁ γ, τὸν δ. Λέγω καὶ τὸν α, μείζειν τὸν β. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ οἱ α ε ζ β, ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τῆς γ, πρὸς τὸν δ, λόγῳ, ἄρα ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν ε, ὁ δὲ γ, τὸν δ, μείζει, μείζησει παντὸς καὶ ὁ α, τὸν ε, μείζων δὲ ὁ α, τὸν ε, μείζησει ἔτι καὶ τὸν β, καὶ τῷ ζ': τῷ παρόντος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΙΔ'.

Πρότασις Ις': Θεώρημα.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμοῦ μὴ μερῆ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τοῦ πλευρᾶ μερήσει. καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τοῦ πλευρᾶ μὴ μερῆ, οὐδὲ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μερήσει.

Δείκνυται πάλιν ὁμοίως, εἰ γὰρ τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον μὴ μείζητος, ὑποτεθῆ δὲ ἡ πλευρὰ τοῦ πλευρᾶ μείζειν, συμβήσεται διὰ τῆς ι δ': τῷ παρόν-

τος, καὶ τὸν τετράγωνον ἀριθμὸν μείζονα, τὸν τετράγωνον ἀριθμὸν, ὃν οὐκ ἐμέτρει. καὶ πάλιν, εἰ τῆς πλευρᾶς τοῦ πλευρὰν μὴ μετρούσης, δώδεκα τὸν τετράγωνον μείζονα τὸν τετράγωνον, συμβήσεται διὰ τῆς αὐτῆς, καὶ τοῦ πλευρὰν μείζονα τὴν πλευρὰν, οὗ οὐκ ἐμέτρει. ὅπερ ἀδύνατον.

Πρότασις ΙΖ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβου ἀριθμοῦ μὴ μέρος, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τοῦ πλευρᾶς μέρος ἔσται. καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τοῦ πλευρᾶς μὴ μέρος ᾖ, οὐδ' ὁ κύβος τοῦ κύβου μέρος ἔσται.

Καὶ φανερὸν, ὡς καὶ τὸ ἀνώτερον, δείκνυται διὰ τῆς ι ε΄: ἓξ χαίειν τὸν λόγον περὶ τούτου οὐκ ἐκτείνομεν, ἵνα μὴ ταυτολογεῖν δόξομεν.

Πρότασις ΙΗ΄. Θεώρημα.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τοῦ ὁμολόγου πλευράν.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ αβ, καὶ τοῦ μὲν α, πλευρὰ οἱ γδ, ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ β, οἱ εζ. Λέγω, ὅτι μεταξὺ τῶν αβ, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν. ὁ δ, τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν η, ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν καὶ τὸν κά: ὅρον τοῦ ζ΄: ἐστὶν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα καὶ τοῦ ιγ΄: τοῦ ζ΄: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶν ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ὁ δὲ δ, τοὺς γε, πολλαπλασιάσας τοὺς αη, πεποίηκεν, ἄρα καὶ τοῦ ιζ΄: τοῦ ζ΄: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ε, ὁ α, πρὸς τὸν η, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἄρα καὶ τοῦ ιά: τοῦ ε΄: καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν η. Αὖθις ἐπεὶ ὁ ε, τοὺς δζ, πολλαπλασιάσας τοὺς ηβ, πεποίηκεν, ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ η, πρὸς τὸν β. ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἐδείχθη καὶ ὁ α, πρὸς τὸν η. ἄρα καὶ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν η, οὕτως ἐστὶν ὁ η, πρὸς τὸν β, καὶ τοῦ ιά: τοῦ ε΄: ἄρα μεταξὺ τῶν αβ, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ὁ η. Λέγω δή, ὅτι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ, δηλ: ὁ γ, πρὸς τὴν ὁμόλογον, δηλ: τὸν ε, ἥ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. καὶ γὰρ τὸν ι: ὅρον τοῦ ε΄: ὁ α, πρὸς τὸν β, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶν, ἥπερ πρὸς τὸν η, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν η, οὕτως ἐστὶν ὁ γ, πρὸς τὸν ε, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἄρα ὁ α, πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ὁ γ, πρὸς τὸν ε, ἥ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ. Δύο ἄρα ὁμοίων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. lib. 8. Fig. 13.

ΠΟ-

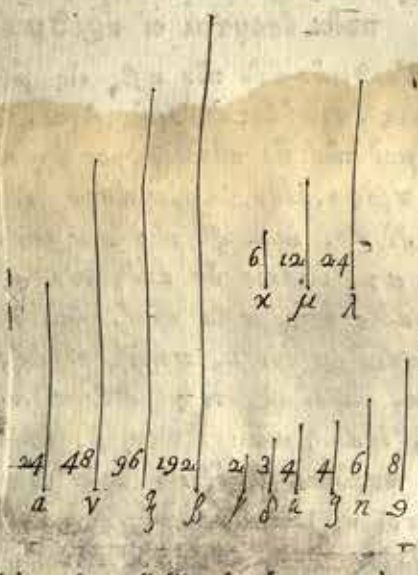
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ μετὰ τοῦ μέσου αὐτῶν ἀνάλογόν εἰσιν ἀνάλογον, ἐν τῷ λόγῳ τῷ ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν.

Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

Δύο ὁμοίων στερεῶν, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ στερεὸς τρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Εucl. Lib. 8. Fig. 14.



Ἐστωσαν ἤδη ὅμοιοι στερεοὶ οἱ αβ, γδ, ἀριθμοὶ δὲ οἱ ε ζ η θ. Λέγω δὴ, ὅτι μεταξὺ τῶν αβ, δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ. καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν θ. ὁ γ, γὰρ τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν κ, ποιείτω, ὁ δὲ ζ, τὸν η, ὡσαύτως πολλαπλασιάσας τὸν λ, ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν οἱ αβ, ὅμοιοί εἰσιν, ἄρα καὶ τὸν κά: ὅρον τοῦ ζ: ἔστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ζ, πρὸς τὸν η, καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ὁ η, πρὸς τὸν θ, καὶ ἐπομένως διὰ τοῦ αὐτοῦ, οἱ κ λ, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. καὶ καὶ τοῦ ἀνωτέρω, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἐν αὐτοῖς. ἔστω δὴ ἔπος ὁ μ, ὃν οἱ ε θ, πολλαπλασιάσαντες τοὺς ν ξ, ποιείτωσαν. οἱ κ μ λ, ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τοῦ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ τοῦ δ, πρὸς τὸν η. καὶ τὸ πόρισμα τῆς ἀνωτέρω. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ ζ, πρὸς τὸν η. ἄρα καὶ ἐναλλὰξ καὶ τοῦ ι γ: τοῦ ζ: ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ὁ δ, πρὸς τὸν η. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν η, ὁ ε, πρὸς τὸν θ, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ἐδείχθη καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν μ, καὶ ὁ μ, πρὸς τὸν λ. ἄρα οἱ κ μ λ, ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ λόγῳ τοῦ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ε, πρὸς τὸν θ. ἐπεὶ δὲ ὁ ε, τὸν ὑπὸ τῶν γ δ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν, ὑπὸ δὲ τῶν γ δ, ὁ κ, γέγονεν, ὁ ε, ἄρα τὸν κ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν. Ἐπεὶ δὲ καὶ τὸν μ, πολλαπλασιάσας τὸν ν, πεποίηκεν, ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν μ, ὁ α, πρὸς τὸν ν, καὶ τοῦ ι ζ: τοῦ ζ: ὡς δὲ ὁ κ, πρὸς τὸν μ, ἔστι καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ. ἄρα καὶ ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ὁ α, πρὸς τὸν ν. καὶ δὲ τοῦ ι η: τοῦ αὐτοῦ, ἐπεὶ οἱ ε θ, τὸν μ, πολλαπλασιάσαντες τοὺς ν ξ, πεποιήκασιν. ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν θ, ὁ ν, πρὸς τὸν ξ, ὡς δὲ ὁ ε, πρὸς

τὸν Θ, δέδεικται καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ὁ α, πρὸς τὸν ν, ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ν, ὁ ν, πρὸς τὸν ξ. ἔτι ἐπεὶ ὁ Θ, τὸν μλ, πολλαπλασιάσας τὸν ξ β, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ μ, πρὸς τὸν λ, ὁ ξ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ μ, πρὸς τὸν λ, ἔστι καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν μ, καὶ ὡς ὁ κ, πρὸς τὸν μ, ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, ἐδείχθη καὶ ὁ α, πρὸς τὸν ν, καὶ ὁ ν, πρὸς τὸν ξ, ἄρα οἱ α ν ξ β, ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον. ἐπεὶ δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔχει ξιπλασίονα λόγον, ἤπερ πρὸς τὸν ν, καὶ τὸν ια: ὅρον τὸν ε: ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν ν, ἐδείχθη καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν Θ. ἄρα ὁ α, πρὸς τὸν β, ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν η, καὶ ὁ ε, πρὸς τὸν Θ. Δύο ὁμοίων ἄρα στερεῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Κ′: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ ἀριθμός, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται οἱ ἀριθμοί.

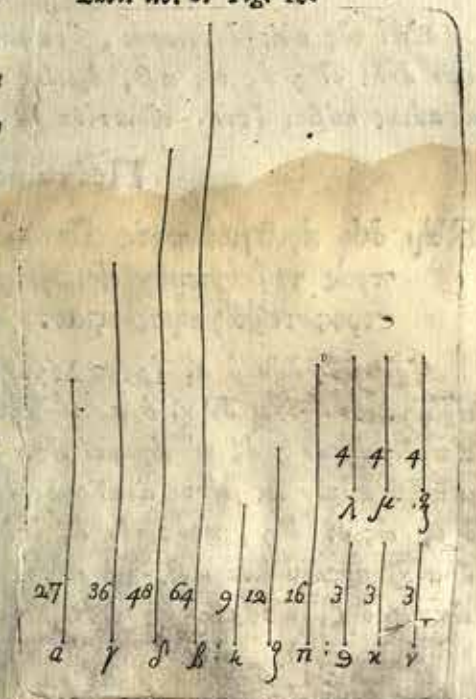
Ἀριθμῶν ἤδη τῶν α β, εἰς μέσος ἀνάλογος ἐμπιπτέτω ὁ γ, λέγω τοὺς α β, ὁμοίους ἐπιπέδους ἀριθμοὺς εἶναι. Εὑρεθήτωσαν διὰ τῆς λε: τῶν ζ′: οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α γ β, καὶ ἔστωσαν οἱ δ ε, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ δ, πρὸς ε, ὁ α, πρὸς τὸν γ, καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν β, οἱ δὲ δ ε, ἄρα καὶ τιῶ κά: τῶ ζ′: ἰσάκις μετροῦσι τοὺς α γ, ὁσάκις ἂν ὁ δ, τὸν α, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῇ ζ. ὥστε ὁ δ, τὸν ζ, πολλαπλασιάζων τὸν α, ποιεῖ, οἱ δ ζ, ἄρα πλευραί εἰσι τῶ α, καὶ οἱ ε ζ, τῶ γ. διὰ τὰ αὐτὰ πάλιν ἐπεὶ οἱ δ ε, ἰσάκις μετροῦσι τοὺς γ β, ὁσάκις μετρεῖ ὁ ε, τὸν β, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῇ η, ὁ ε, ἄρα τὸν η, πολλαπλασιάζων, τὸν β, ποιεῖ, ὥστε οἱ ε η, πλευραί εἰσι τῶ β, ἐδείχθησαν δὲ καὶ οἱ δ ζ, τῶ α, οἱ α β, ἄρα ἐπίπεδοί εἰσι. Λέγω δή, ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ ζ η, τὸν ε, πολλαπλασιάσαντες τοὺς γ β, πεποιήκασιν, ἄρα καὶ τιῶ ιή: τῶ ζ′: ὡς ὁ ζ, πρὸς τὸν η, ὁ γ, πρὸς τὸν β, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν β, ἔστι καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ἄρα καὶ ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ε, ὁ ζ, πρὸς τὸν η· καὶ ἐναλλάξ, καὶ τιῶ ιγ′: τοῦ ζ′: ὡς ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ὁ ε, πρὸς τὸν η, καὶ τὸν κά: ὅρον ἄρα τοῦ αὐτῶ ζ′: οἱ α β, εἰσὶν ὅμοιοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 8. Fig. 15.

Πρότασις ΚΑ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν α β, δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ, οἱ γ δ. Λέγω τὸν α β, ὁμοίους στερεοὺς εἶναι. εἰλήφθωσαν γὰρ διὰ τῆς λέ: τοῦ ζ': ξεῆς ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α γ δ β, οἱ ε ζ η, ὥστε διὰ τῆς ἀνωτέρω οἱ ε ζ η, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. ἔστωσαν ἓν τὸ μὲν ε, πλευραὶ αἱ θ κ, τὸ δὲ η, οἱ λ μ. ἐπεὶ δὲ οἱ α γ δ, καὶ ε ζ η, ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον. ἄρα καὶ δι' ἴσου ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν η, καὶ τέλει ι δ': τοῦ ζ': οἱ δὲ ε η, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ καὶ τέλει κ δ': τοῦ αὐτοῦ, καὶ διὰ τῆς κ γ': τοῦ ζ': ἐλάχιστοι, ἄρα οἱ ε η, ἰσάκις μετροῦσι τοὺς α δ, καὶ τέλει κ ά: τοῦ ζ': ὁσάκις δὲ ὁ ε, τὸν α, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ν, ὁ ν, ἄρα τὸν ε, πολλαπλασιάζων τὸν α, ποιεῖ. ὁ δὲ ε, ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν θ κ, ὁ ν, ἄρα τὸν ἐκ τῶν θ κ, πολλαπλασιάζων τὸν α, ποιεῖ. ὥστε τὸ α, πλευραί εἰσιν οἱ θ κ ν, ὁ α, ἄρα στερεός ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ πάλιν, ἐπεὶ οἱ ε η, ἰσάκις μετροῦσι τοὺς γ β, ὁσάκις ὁ η, τὸν β, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ξ. ὥστε ὁ ξ, τὸν η, πολλαπλασιάζων τὸν β, ποιεῖ. ὁ δὲ η, ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν λ μ, ἄρα οἱ λ μ ξ, εἰσὶ πλευραὶ τοῦ β, καὶ ὁ β, τοίνυν στερεός ἐστι. Λέγω δή, ὅτι οἱ α β, καὶ ὅμοιοί εἰσιν. ἐπεὶ ἓν ὁ ε, μετρεῖ τὸν μὲν α, καὶ τὰς ἐν τῷ ν, μονάδας, τὸν δὲ γ, καὶ τὰς ἐν τῷ ξ, οἱ ν ξ, ἄρα τὸν ε, πολλαπλασιάσαντες τοὺς α γ, πεποιήκασιν. ὥστε ὡς ὁ ν, πρὸς τὸν ξ, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν γ, καὶ τέλει ι ή: τοῦ ζ'. τουτέστιν ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, ὡς δὲ ὁ ε, πρὸς τὸν ζ, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ θ, πρὸς τὸν λ, καὶ ὁ κ, πρὸς τὸν μ, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς ιά. τοῦ παρόντος. ἄρα οἱ θ κ ν, πλευραὶ τοῦ α, ἀνάλογοί εἰσι τοῖς λ μ ξ, πλευραῖς τοῦ β, οἱ α β, ἄρα καὶ τὸν κά. ὅρον τοῦ ζ'. ὅμοιοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 8. Fig. 16.

Πρό-

Πρότασις ΚΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ τρίτος τετράγωνος ἔσται.

Ἐπὶ τῆς κ'. προτάσεως τῶν παρόντος, ἐπεὶ οἱ α γ β, ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ α β, ἀριθμοὶ, ὅμοιοι ἐδείχθησαν εἶναι, εἰ ἄν ὁ α, τετράγωνος ὑποπεσῇ, καὶ ὁ β, πάντως τετράγωνος ἔσται. εἰ γὰρ μή, οὐκ ἔσονται ὅμοιοι.

Πρότασις ΚΓ'. Θεώρημα.

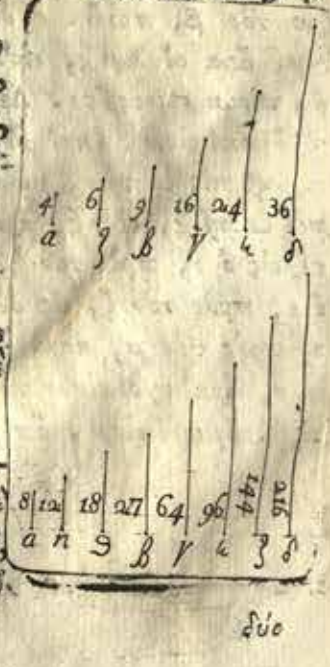
Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται.

Ἐπὶ τῆς κ δ'. δέδεικται, ὅτι μεταξὺ τῶν α β, ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσι δηλ. οἱ γ δ, τοῖς α β, ὁμοίους εἶναι, εἰ ἄν ὁ α, κύβος ὑποπεσῇ, καὶ ὁ β, ὡσαύτως κύβος ἔσται. τοὐναντίον δὲ οὐκ ἔσονται ὅμοιοι.

Πρότασις ΚΔ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται.

Ἀριθμοὶ γὰρ οἱ α, β, ἐχέτω λόγον πρὸς τὸν β, ὃν ὁ γ, τετράγωνος πρὸς τὸν δ, τετράγωνον. ἔστω δὲ καὶ ὁ α, τετράγωνος. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ β, τετράγωνός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ γ δ, τετράγωνοί εἰσιν, ἄρα καὶ ὅμοιοι, καὶ κγ τλω ι ή: τῶν παρόντος, μεταξὺ αὐτῶν εἷς μέσος ἀνάλογος ἐμπίπτει, καθάπερ ὁ ε, ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἐστὶ καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογος ἐμπίπτει, ὥσπερ ὁ ζ, ὥστε οἱ α ζ β, ἀνάλογόν εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ὁ α, τετράγωνός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ β, τετράγωνός ἐστι, καὶ τλω κ: τῶν παρόντος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 8. Fig. 17.

Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

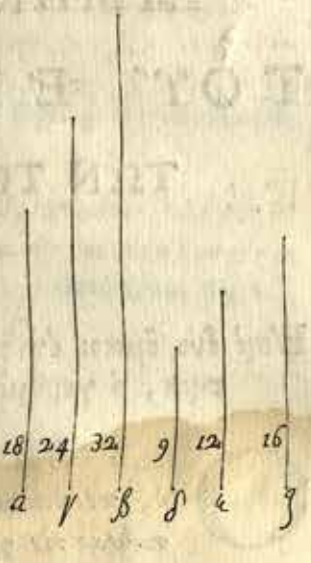
Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται.

Οἱ α, β, ἀριθμοὶ ἐχέτω πρὸς τὸν β, ἀριθμὸν λόγον, ὃν ἔχει ὁ γ, κύβος, πρὸς τὸν δ, κύβον. ἔστω δὲ καὶ ὁ α, κύβος. Λέγω καὶ τὸν β, κύβον εἶναι, οἱ γ δ, γὰρ κύβοι ἀριθμοὶ ὅμοιοι, στερεοί εἰσι, καὶ μεταξὺ αὐτῶν

δύο

δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσι, καὶ τῷ ιϑ': τῷ παρόντος, ὥσπερ οἱ εζ. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ὁ α, πρὸς τὸν β, μεταξὺ ἄρα καὶ τῶν αβ, δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν, ὡς οἱ ηϑ, ἄρα οἱ αηϑβ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. ὁ δὲ α, κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ β, καὶ τῷ κγ': τῷ παρόντος, κύβος ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. lib. 8. Fig. 18.



Πρότασις Κς': Θεώρημα.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριϑμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριϑμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριϑμόν.

Τοὺς α, β, ἤδη ὁμοίους ἀριϑμοὺς, λέγω, λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριϑμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριϑμόν, μεταξὺ γὰρ τῶν αβ, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ἀριϑμὸς, καὶ τῷ ιη: τῷ παρόντος, ἔστω ὁ γ. καὶ ἀριϑμείσϑωσαν διὰ τῆς λε: τῷ ζ': οἱ ἐλάχιστοι ἀριϑμοὶ τῷ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς αγβ, καὶ ἔστωσαν ἔστι οἱ δεζ, οἱ δζ, ἄρα καὶ τὸ ά: πόρισμα τῆς β': τῷ παρόντος, εἰσὶ τετράγωνοι, ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν ζ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ τῷ ιζ': τῷ ζ': ἄρα οἱ αβ, λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριϑμὸς, πρὸς τετράγωνον ἀριϑμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Κζ': Θεώρημα.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριϑμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριϑμὸς πρὸς κύβον ἀριϑμόν.

Τοὺς αβ, ἤδη ὁμοίους στερεοὺς λέγω, καὶ πᾶς ἑξῆς. καὶ γὰρ τῷ ιϑ': τῷ παρόντος μεταξὺ αὐτῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριϑμοὶ, ὡς οἱ γδ. διὰ δὲ τῆς λε: τῷ ζ': ἀριϑείσϑων τῶν ἐλαχίστων ἀριϑμῶν τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς αγδβ, (οἵτινες ἔσωσαν οἱ εζηϑ,) οἱ εϑ, κύβοι εἰσὶ καὶ τὸ ά: πόρισμα τῆς β': τῷ παρόντος. ὡς δὲ ὁ ε, πρὸς τὸν ϑ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ τὸν ιβ': τῷ ζ': ἄρα οἱ αβ, λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριϑμὸς, πρὸς κύβον ἀριϑμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

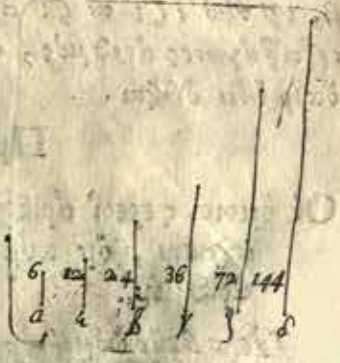
Τέλος τοῦ Ογδόου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΕΝΝΑΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Πρότασις Α'. Θεώρημα.

Ε'αμ' δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνος ἔσται.

Ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἤδη ἀριθμοὶ οἱ α β, πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τὸν δ, ποιείτωσαν, ὃν λέγω τετράγωνον εἶναι. ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω, ὁ γ, τοίνυν τετράγωνός ἐστι καὶ τὸν ι η: ὅρον τῶν ζ': καὶ ἐπεὶ ὁ α, ἑαυτὸν καὶ τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ δ, πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ, καὶ τιμὴ ι ζ': τῶν ζ': ἐπεὶ δὲ οἱ α β, ὅμοιοί εἰσι, καὶ τιμὴ ι η: ἄρα τῶν η: εἷς μέσος ἀνάλογος πέπων ἐστίν. Ε'πεὶ δὲ ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ἔστι καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν γ δ, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν. ἔστω δὲ ὁ ζ, οἱ γ ζ δ, ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. ἐπεὶ δὲ ὁ γ, τετράγωνός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ δ, τετράγωνος ἔσται. καὶ τιμὴ κ β': τῶν η: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 1.

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ε'αμ' δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον· ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν.

Ε'πὶ τῶν ἀνωτέρω παραδείγματος οἱ α β, ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τὸν δ, ποιείτωσαν τετράγωνον ἀριθμόν. Λέγω τοὺς α, β, ὁμοίους εἶναι ἐπιπέδους. ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω. καὶ ὁ γ, ἄρα τετράγωνός ἐστι, καὶ τὸν ι η: ὅρον τῶν ζ': ἐπεὶ δὲ ὁ αὐτὸς α, καὶ τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκεν. ἄρα κατὰ τιμὴν ι ζ': τῶν ζ': ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν δ.

τὸν δ. ἐπεὶ δὲ οἱ γ, καὶ δ, πεξάγωνοί εἰσιν, ἄρα καὶ ὅμοιοι. καὶ τῶν ιή: τῶ ή: εἷς μέσος ἀνάλογος πάπων ἐστὶν, ὥσπερ ὁ ζ. ὡς δὲ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἕτι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν α β, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν, ἔστω δὲ ὁ ε. καὶ τῶν κ': ἄρα τῶ ή: οἱ α β, ὅμοιοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

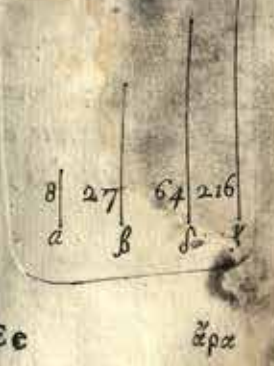
Κύβος ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, ποιείτω. Λέγω δὴ τὸν β, κύβον εἶναι. Ἔστω γὰρ ὁ γ, ἡ τῶ α, πλευρὰ, καὶ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω. δῆλον τοίνυν ὡς ὁ γ, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν. ἐπεὶ δὲ ὁ γ, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκε, καὶ τὸ β': ἄρα πόρισμα τῆς ιε': τῶ ζ': ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, οὕτως ὁ αὐτὸς γ, πρὸς τὸν δ. Αὖθις ἐπεὶ ὁ γ, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκε, διὰ τῶ αὐτῶ ἄρα πορίσματος, ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν α, ὡς δὲ ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, δέδεικται καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἄρα καὶ τῶν ιά: τῶ ε: ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν γ, ὁ γ, πρὸς τὸν δ, καὶ ὁ δ, πρὸς τὸν α, μεταξὺ ἄρα μονάδος καὶ α, δύο μέσοι ἐξῆς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, οἱ γ δ. Πάλιν ἐπεὶ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκεν, ἄρα κατὰ τὸ προῤῥηθὲν πόρισμα, ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ἐστὶν ὁ α, πρὸς τὸν β, μεταξὺ δὲ μονάδος καὶ α, δύο ἐξῆς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, ἄρα καὶ μεταξὺ τῶν α, καὶ β, δύο ἐμπεσοῦνται ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἐμπιπτέτωσαν οἱ ε ζ. ἐπεὶ δὲ ὁ α, κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ β, κύβος ἐστὶ, καὶ τῶν κ γ': τῶ ή: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 2.

Πρότασις Δ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, κύβον ἀριθμὸν τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ γ, κύβος ἐστίν. ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω, ὁ δ, ἄρα κύβος ἐστὶ, καὶ τῶν ἀνωτέρω. ἐπεὶ δὲ ὁ α, ἑαυτὸν καὶ τὸν β, πολλαπλασιάσας, τοὺς δ γ, πεποίηκεν. ἔστιν



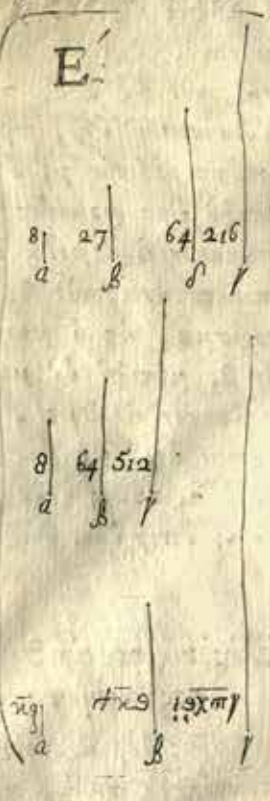
ἄρα καὶ τῶν ι ζ′: τῶν ζ′: ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν γ, τὴν δὲ α β, δύο μέσοι ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ τῶν ι θ′: τῶν η′: ἄρα καὶ μεταξὺ τὴν δ γ, δύο μέσοι ἐξῆς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν. οἱ δ γ, ἄρα ὅμοιοι στερεοί εἰσι καὶ τῶν κα: τῶν η′: ἐπεὶ δὲ ὁ δ, κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ γ, κύβος ὁμοίως ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ε′: Θεώρημα.

Ε'αν κύβος ἀριθμὸς, ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύβος ἔσται.

Ε'πὶ τοῦ αὐτέρω σχήματος ὁ α, κύβος ἀριθμὸς τὸν β, ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας, τὸν γ, κύβον ποιείτω. Λέγω καὶ τὸν β, κύβον εἶναι. ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν δ, ποιείτω. ὃς κύβος ἐστὶ καὶ τῶν γ′: τῶν παρόντος. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ γ, κύβος ἐστὶν, ἄρα οἱ δ γ, ὅμοιοι στερεοί εἰσι. καὶ καὶ τῶν ι θ′: τῶν η′: δύο μέσοι ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν αὐτοῖς. ὡς δὲ ὁ δ, πρὸς τὸν γ, ἕτως καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ τῶν ι ζ′: τῶν ζ′: (ὁ γὰρ α, ἑαυτὸν καὶ τὸν β, πολλαπλασιάσας τοὺς δ γ, πεποίηκεν.) ἄρα καὶ μεταξὺ τὴν α β, δύο μέσοι ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ α, κύβος ἐστὶ, καὶ ὁ β, ἄρα κύβος ἔσται, καὶ τῶν κ γ′: τῶν η′: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 3.



Πρότασις ς′: Θεώρημα.

Ε'αν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται.

Α'ριθμὸς ἤδη ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, κύβον ποιείτω. Λέγω δὴ καὶ τὸν α, κύβον εἶναι. ὁ γὰρ α, τὸν β, πολλαπλασ: τὸν γ, ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασ: τὸν β, πεποίηκε, τὸν δὲ β, ὡσαύτως πολλαπλασ: τὸν γ, πεποίηκεν, ὁ γ, πάντως κύβος ἐστὶ, καὶ τῶν ι θ′: ὅρον τὸ ζ′: ἔστι δὲ καὶ ὁ β, κύβος, ὅμοιοι ἄρα εἰσὶ στερεοὶ οἱ β γ, καὶ δύο μὲν τὴν μέσοι ἀνάλογόν εἰσι, καὶ τῶν ι θ′: τῶν η′: ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν γ, ἕτως καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ τῶν ι ζ′: τῶν ζ′: ὁ γὰρ α, ἑαυτόν τε καὶ τὸν β, πολλαπλασ: τοὺς β, γ, πεποίηκεν, ἄρα καὶ τὴν α β, δύο μέσοι ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, ὁ δὲ β, κύβος, ἄρα καὶ ὁ α, ὡσαύτως κύβος ἐστὶ, καὶ τῶν κ γ′: τῶν η′: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις Ζ΄: Θεώρημα.

Ε΄αμ σωρὸς ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς ἔσται.

Σωρὸς ἤδη ἀριθμὸς ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, ποιείτω, ὃν λέγω στερεὸν εἶναι. ὁ γὰρ β, τὸν α, πολλαπλασ: τὸν γ, ποιείτω· καὶ ἐπεὶ ὁ α, σωρός ἐστιν, ἄρα ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετρεῖται, καπὰ τὸν ιγ΄: ὅρον τὸν ζ΄: μετρείσθω ὑπὸ τοῦ δ, καὶ ὁσάκις ὁ δ, τὸν αὐτὸν α, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ε, ὁ δ, ἄρα τὸν ε, πολλαπλ: τὸν α, πεποίηκεν· ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ β, τὸν α, πολλαπλασ: τὸν γ, πεποίηκεν, ὁ γ, ἄρα ὑπὸ ἴσων ἀριθμῶν, τοῦ δ ε β, ἀλλήλοις πολλαπλασιασθέντων, γέγονε· καπὰ τὸν ιζ΄: τοίνυν ὅρον τὸν ζ΄: στερεός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 9. Fig. 4.

Πρότασις Η΄: Θεώρημα.

Ε΄αμ ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος κύβος, καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες· ὁ δὲ ἕβδομος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος, καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες.

Ἀριθμῶν ἤδη τῶν α β γ δ ε ζ, ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὄντων· λέγω τὸν μὲν β, τρίτον ἀπὸ μονάδος τετράγωνον εἶναι, καὶ πάντας τοὺς ἕνα διαλείποντας, ὥσπερ οἱ δ, ζ. τὸν δὲ γ, κύβον, καὶ πάντας τοὺς δύο διαλείποντας, ὥσπερ ὁ ζ, καὶ οἱ ὅμοιοι, τὸν ζ΄: δὲ ζ, κύβον ἅμα καὶ τετράγωνον εἶναι, καὶ πάντας ἔτι τοὺς πέντε διαλείποντας. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ α, ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκε, καὶ τὸ β πόρισμα τοῦ ς΄: τὸν ζ΄: ὁ β, ἄρα τετράγωνός ἐστιν, οἱ δὲ β γ δ, ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ὁ β, τετράγωνός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ δ, τετράγωνός ἐστι, καὶ τὸν κβ΄: τὸν η΄: διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὁ ζ, τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἑξῆς ἕνα διαλείποντες. Αὖθις ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν γ, καπὰ τὸ εἰρημένον πόρισμα, ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκεν, ὁ δὲ β, τετράγωνος δέδεικται, καὶ πλευρὰ αὐτοῦ ὁ α, ὁ γ, ἄρα κύβος ἐστίν. ἐπεὶ δὲ οἱ γ δ ε ζ, ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ γ, κύβος ἐστίν, ἄρα καὶ τὸν κγ΄: τὸν η΄: καὶ ὁ ζ, κύβος ἐστίν· ἐδείχθη δὲ

Euclid. Lib. 9. Fig. 5.

καὶ τετράγωνος. καί ἐστιν ἕβδομος ἀπὸ μονάδος, ὁ ζ, ἄρα κύβος ἅμα καὶ τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δείξομεν καὶ τοὺς ἐξῆς δύο διαλείποντας, κύβους εἶναι πάντας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται, καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾖ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἔστωσαν ἤδη ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ α β γ δ ε ζ, ὧν ὁ α, πρῶτος, τετράγωνος. Λέγω καὶ τοὺς λοιποὺς τετραγώνους εἶναι. ὅτι μὲν οὖν ὁ β, καὶ πάντες οἱ ἕνα διαλείποντες τετράγωνοί εἰσι, δέδεικται διὰ τῆς ἀνωτέρω. ἐπεὶ δὲ οἱ α β γ, ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ α, τετράγωνος, καὶ ὁ γ, ἄρα τετράγωνός ἐστι, καὶ τὴν κβ': τὴν ἡ': ὡσαύτως διὰ τῆς αὐτῆς, ἐπεὶ οἱ β γ δ, ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ὁ β, τετράγωνος, ἄρα καὶ ὁ δ, τετράγωνός ἐστιν, οὕτω καὶ ἐπὶ τοὺς λοιπούς. Ἔστω δὴ ὁ α, κύβος. Λέγω καὶ τοὺς ἐξῆς πάντας κύβους εἶναι. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ αὐτὸς α, πρὸς τὸν β, ὁ α, ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκε, καὶ τὸ β': πόρισμα τῆς ιε': τὸ ζ': καὶ ἐπεὶ ὁ α, κύβος ἐστί, καὶ ὁ β, πάλιν ὡσαύτως κύβος ἐστί, καὶ τὸν γ': τὸ παρόντος. ὅτι δὲ καὶ ὁ γ, καὶ πάντες οἱ δύο διαλείποντες κύβοι εἰσί, δέδεικται διὰ τῆς ἀνωτέρω, ἄρα οἱ α β γ, ἐξῆς ἀριθμοί, κύβοι εἰσίν. ὧν προαποδεδειγμένων, ὅπως ἐπὶ τῆς ἀποδείξεως ἐπὶ τὴν ἐφεξῆς ἀρχόμεθα. ἐπεὶ δὲ οἱ α β γ δ, ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ α, κύβος, καὶ ὁ δ, πάντως κύβος ἐστὶ καὶ τὸν κγ': τὸ ἡ': ὁμοίως δείξομεν καὶ τὸν ε, κύβον εἶναι, ἀπὸ τοῦ β, ἀρχόμενοι, ὅπερ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. lib. 9. Fig. 6.

4096	θ	262124
1024	ε	32768
256	δ	4096
64	γ	512
16	β	64
4	α	8
1		

μονὰς.

Τετράγωνοι

Κύβοι

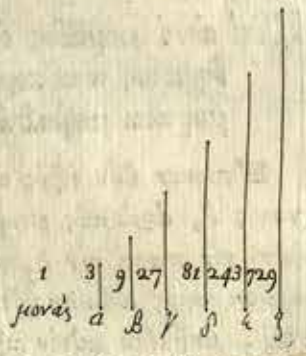
Πρότασις Ι'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων πάντων, καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾖ, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων.

Ἔστωσαν ἤδη ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ α β γ δ ε ζ, καὶ ὁ μὲν τὴν μο-

μονάδα α, μὴ ἔσω τετράγωνος. Λέγω ὅτι καὶ ἄλλον τετράγωνον εἶναι, χωρὶς τοῦ τετράτου, καὶ τὰ ἑξῆς· εἰ γὰρ μή, ἔσω ὁ γ, τετράγωνος, ἔστι δὲ καὶ ὁ β, τετράγ: καὶ τὸν ἀ: τοῦ παρόντος, οἱ β γ, ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν, ὡς δὲ ὁ β, πρὸς τὸν γ, ἔστι καὶ ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ οἱ α β, ἄρα ὅμοιοί εἰσιν, ὁ δὲ β, τετράγωνός ἐστιν, ἄρα καὶ ὁ α, τετράγωνος, ὅπερ ἄτοπον. ὑπετέθη γὰρ μὴ τοιοῦτος, ἔστ' ὁ γ, ἄρα τετράγωνός ἐστιν. Αὔξις ἐπεὶ μεταξὺ τῶν γ ε, εἷς μέσος ἀνάλογός ἐστιν ὁ δ, οἱ γ ε, ἄρα ὅμοιοί εἰσι, καὶ τὸν κ: τοῦ ἀ: ὁ δὲ γ, οὐκ ἔστι τετράγωνος, ἄρα οὐδ' ὁ ε, τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δείξομεν καὶ περὶ τῶν λοιπῶν. Μὴ ἔστω δὴ οὐδὲ κύβος ὁ α. Λέγω μὴ δὲ ἄλλον τινὰ κύβον εἶναι, χωρὶς τοῦ πρώτου ἀπὸ μονάδος, καὶ τῶν δύο διαλειπόντων. εἰ γὰρ μή, ἔσω ὁ β, κύβος· ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ αὐτὸς α, πρὸς τὸν β, ἄρα ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκε, καὶ τὸ β': πόρισμα τοῦ ιε': τοῦ ζ': ὁ δὲ β, κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ α, καὶ τὸν ε': τοῦ παρόντος, κύβος ἐστὶν, ὅπερ οὐχ ὑποτίθεται, ἄρα οὐδ' ὁ β, κύβος ἐστίν. ἐπεὶ δὲ μεταξὺ τῶν α δ, δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν οἱ β γ, ἄρα καὶ τὸν κ α: τοῦ ἡ: οἱ α δ, ὅμοιοί εἰσιν, ὁ δὲ α, μὴ κύβος ἐστὶν, ἄρα καὶ ὁ δ, μὴ κύβος ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Εucl. Lib. 9. Fig. 7.



Πρότασις ΙΑ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος τῆς α, ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ β γ δ ε. Λέγω τὸν ἐλάττονα β, μετρεῖν τὸν μείζονα αὐτῶν γ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ α, μονὰς πρὸς τὸν β, ὁ β, πρὸς τὸν γ, ἄρα ἰσάκις ἡ α, μονὰς τὸν β, μετρεῖ, καὶ ὁ β, τὸν γ, ἡ δὲ μονὰς τὸν β, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ β, μονάδας, καὶ ὁ β, ἄρα τὸν γ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ τὸν γ, τὸν δ, μετρεῖν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν δ, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν β, μετρεῖ, καὶ ὁ γ, τὸν δ. ἡ δὲ μονὰς τὸν β, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἄρα καὶ ὁ γ, τὸν δ, μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ β, μονάδας. ὅπερ καὶ ἐπὶ τῶν ἑφεξῆς. ὥστε πάντες οἱ μετὰ τὸν β, ἀριθμὸν, μετροῦσιν ἕκαστος τὸν μεθ' ἑαυτὸν κατὰ τὰς ἐν τῷ β, μονάδας. ὁ β, ἄρα τῶν μετρουμένων πάντων ἀριθμῶν δυάνυ-

Εucl. lib. 9. Fig. 8.

μον

μον μέρος ἐστὶ τοῦ μεῖζονος τοῦ γ: ὅρον τὸ ζ: καὶ δὲ τὸν λθ: τὸ αὐτὸ, ὁ β, ἀριθμὸς πάντας τοὺς μεθ' ἑαυτὸν μετρεῖ, καὶ τὸν ὁμώνυμον αὐτῷ ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὑφ' ὅσων αὐτῶν ὁ ἔσχατος πρώτων ἀριθμῶν μετρεῖται, ὑπὸ τούτων καὶ ὁ παρὰ τὴν μονάδα μετρηθήσεται.

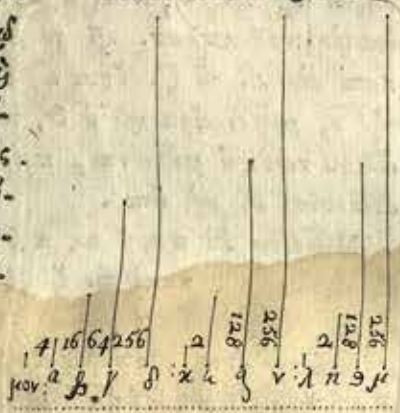
Ἔστωσαν ἤδη ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὶ ἀπὸ τῆς λ, μονάδος οἱ α β γ δ, καὶ ὁ ἔσχατος δ, ἀριθμὸς μετρείσθω ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ, παρ: χάρ: τοῦ ε. Λέγω δὴ καὶ τὸν παρὰ τὴν λ, μονάδα α, ὑπὸ τοῦτο μετρεῖσθαι. εἰ γὰρ μή, οἱ α ε, ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, καὶ τὸν ιβ': ὅρον τοῦ ζ: ἐπεὶ δὲ ὁ ε, τὸν δ, μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν ζ, ὥστε ὁ ε, τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκεν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ α, μετρεῖ τὸν δ, κατὰ τὸν ὁμώνυμον αὐτῷ ἀριθμόν, ὡς διὰ τοῦ ἀνωτέρω δῆλον· ὁμώνυμος δὲ τῷ β, ἐστὶν ὁ γ, κατὰ τὸν αὐτὸν. ἄρα καὶ ὁ α, τὸν γ, πολλαπλασ: τὸν δ, πεποίηκε· κατὰ τὸν ιθ': ἄρα τοῦ ζ: ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν α, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ γ, πρὸς τὸν ζ· κατὰ δὲ τὸν κδ': ἐπεὶ οἱ α ε, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, μετρεῖ ὁ ε, τὸν γ, μετρείτω δὴ κατὰ τὸν η, ὥστε ὁ ε, τὸν η, πολλαπλασ: τὸν γ, πεποίηκεν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασ: τὸν αὐτὸν γ, πεποίηκε, (μετρείτω γὰρ ὁ α, τὸν γ, κατὰ τὸν β, ὁμώνυμον αὐτῷ ἀριθμὸν, ὡς δέδεικται διὰ τοῦ ἀνωτέρω.) ἄρα κατὰ τὴν ιθ': τοῦ ζ: ἔστιν ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν α, ὁ β, πρὸς τὸν η, κατὰ δὲ τὴν κα': τὸ αὐτὸ, ὁ ε, τὸν β, μετρεῖ, μετρείτω δὴ κατὰ τὸν θ, ὥστε ὁ ε, τὸν θ, πολλαπλασ: τὸν β, πεποίηκεν. ἀλλὰ καὶ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλ: β, πεποίηκε, κατὰ τὸ β': πόρισμ: τῆς ις': τοῦ ζ': ἄρα κατὰ τὴν λ[illegible] τοῦ ζ': ἔστιν ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν α, ὁ α, πρὸς τὸν β, κατὰ δὲ τὴν κα: τὸ αὐ[illegible], μετρεῖ ὁ ε, τὸν α, καὶ ὁ α, τὸν β, οἱ δὲ α ε, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, οἱ δὲ πρῶτοι μονάδι μόνῃ μετροῦνται, ἄτοπον ἄρα μετρεῖσθαι ὑπὸ τοῦ ε, τὸν α, οἱ ε α, ἄρα οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀλλὰ σύνθετοι· κατὰ τὴν λγ': ἄρα τοῦ ζ': ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετροῦνται, ἐπεὶ δὲ ὁ ε, πρῶτός ἐστι, καὶ παρ' ἃ δεῖ μετρεῖται, ἢ ἑαυτὸ, ἄρα ὁ ε, τοὺς ε α, μετρεῖ, μετρεῖ δὲ ὁ ε, καὶ τὸν δ, ὑφ' ὅτινος ἄρα ἀριθμοῦ ὁ ἔσχατος δ, μετρεῖται, ὑπ' αὐτοῦ καὶ ὁ παρὰ τὴν λ, μονάδα α, μετρηθήσεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶ ταῦτα μὲν κατὰ τὸν Εὐκλείδην. δείκνυται δὲ καὶ ἄπω.

Euclid. lib. 9. Fig. 9.

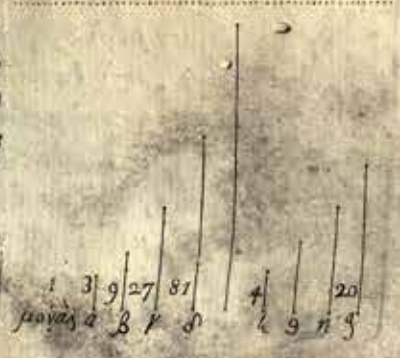
1	4	16	64	256	2	8	32	128
λ	α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η

Μετρείτω δὴ τὸν δ, ἀριθμὸν πρῶτος ἀριθμὸς ὁ ε, κατὰ τὸν ζ. Λέγω, ὅτι μετρεῖ

μεῖ ἔτι ὁ ε, τὸν α· εἰ γὰρ μή, ἐπεὶ ὁ α, σωίθετός ἐστι, μετρήσει αὐτόν τις ἀ: ἀριθμὸς, κατὰ τὴν λγ': τὰ ζ: καὶ ἔστω ὅπος ὁ η· μεῖζων δὲ ὁ η, τὸν α, μετρήσει πάντως καὶ τὸν δ, τὸν μεῖζόμενον ὑπὸ τοῦ α, κατὰ τὴν ιά: τὰ παρόντος. μεῖζείτω δὴ ὁ η, τὸν δ, κατὰ τὸν θ, ἀριθμὸν· ὥστε ὁ η, τὸν θ, πολλαπλασιάζων, τὸν μ, ἴσον ἄρα τῷ δ, ποιεῖ, ἔσαι ἄρα ὡς ἡμονὰς λ, πρὸς τὸν η, ὁ θ, πρὸς τὸν μ, ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ ε, τὸν ζ, πολλαπλασ: τὸν ν, πεποίηκεν, ἴσον τῷ δ, ἔσαι διὰ τὰ αὐτὰ πορίσ: τῆς ις': τὰ ζ': ὡς ἡ μονὰς κ, πρὸς τὸν ε, ὁ ζ, πρὸς τὸν ν, ἐπεὶ δὲ ἐστὶν ὡς ἡ κ, μονὰς πρὸς τὸν ν, ἕτως ἡ λ, μονὰς πρὸς τὸν μ, ἄρα εἰσὶ τέσσαρες ἀριθμοὶ, οἱ κ ε ζ ν, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος, οἱ λ η θ μ, δὶ ἴσε λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· διὰ τὰ πορίσματος γοῦν τῆς ιδ': τὰ ζ': καὶ συν δύο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κ, μονὰς πρὸς τὸν ε, ἕτως ἡ λ, μονὰς πρὸς τὸν η, ὅσας ἄρα μονάδας περιέχει ὁ ε, τοσαύτας καὶ ὁ η, ἴσος ἄρα ὁ ε, τῷ η, ὁ δὲ η, τὸν α, μετρεῖ, μετρεῖ πάντως καὶ ὁ ε, τὸν αὐτὸν α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

euel. lib. 9. Fig. 10.

Πρότασις ΙΓ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογοι ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ἢ, ὁ μέγιστος ὑπ' ἄδεμιᾶς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

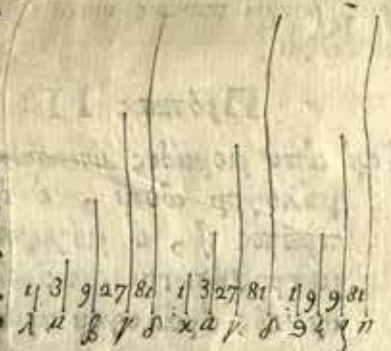


Ἔστωσαν ἤδη ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὶ, οἱ α β γ δ, ὧν ὁ α, πρῶτος. Λέγω τὸν δ, ἕτερον ὑπ' ἄδεμιᾶς ἄλλου μεῖζεῖσθαι, ἢ τῶν α β γ. εἰ γὰρ μή, μεῖζείσθω ὑπὸ τοῦ ε, κατὰ τὸν ζ. δείκνυται ἀ: τὸν μὲν ε, μὴ ἀ: εἶναι, καὶ ὑπὸ μόνου τοῦ α, μετρεῖσθαι. τὸν δὲ ζ, μήτε πρῶτον, μήτε τινὰ τῶν α β γ. εἰ γὰρ ὁ ε, πρῶτός ἐστι, μετρήσει πάντως κατὰ τὸν ἀνωτέρω τὸν α, πρῶτον ὄντα, ὅπερ ἄτοπον. ἄρα σύνθετος, καὶ ὑπὸ μόνου τοῦ α, πρώτου μεῖζηθήσεται. εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μεῖζηθήσεται, πάντως ὑπ' ἐκείνου καὶ ὁ δ, ἔτι δὲ καὶ ὁ α, πρῶτος ὤν, ὅπερ ἄτοπον. ὡσαύτως καὶ ὁ ζ, σύνθετός ἐστι. Λέγω δὲ, ὅτι ὁ ζ, οὐδενὸς τῶν α β γ, ἐστίν· εἰ γὰρ ὁ ζ, εἷς τῶν α β γ, μεῖζεῖ τὸν δ, κατὰ τὸν ε, ἀλλὰ διὰ τὰ ιά: τὰ παρόντος, δέδεικται, ὅτι ἐν τῇ τοιαύτῃ ἀναλογίᾳ ὁ ἐλάττων μεῖζεῖ τὸν μείζονα, κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς· ἄρα ὁ ζ, οὐκ ἔστιν τις τῶν α β γ· ἐπεὶ δὲ ὁ ε, τὸν δ, μεῖζεῖ κατὰ τὸν ζ, ὁ ε, ἄρα τὸν ζ, πολλαπλασ: τὸν δ, πεποίηκεν. ἀλλὰ καὶ ὁ α, τὸν γ,

πολ-

πολλαπλασ: τὸν δ, πεποίηκεν, ἄρα κατὰ τὴν ι θ': τὰ ζ': ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ε, ὁ ζ, πρὸς τὸν γ, * ὁ δὲ α, τὸν ε, μετρεῖ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ζ, τὸν γ. μετρείτω δὴ ὁ ζ, τὸν γ, καὶ τὸν η, ὁ δὲ η, δειχθήσεται (ὡς καὶ οἱ ε ζ,) μήτε πρῶτος εἶναι, μήτε τις τῶν α β, καὶ ὑπὸ μόνου τοῦ α, πρώτου μετρεῖσθαι. ἐπεὶ οὖν ὁ ζ, μετρεῖ τὸν γ, καὶ τὸν η, ὁ ζ, ἄρα τὸν η, πολλαπλ. τὸν γ, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα καὶ τὴν ι θ': τοῦ εἰρημένου βιβλίου, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν ζ, ὁ η, πρὸς τὸν β, ὁ δὲ α, τὸν ζ, μετρεῖ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ η, τὸν β. μετρείτω δὴ αὐτὸν καὶ τὸν θ. ὡς ἀνωτέρω δὴ δείξομεν, ὅτι ὁ θ, οὐκ ἔστιν ὁ αὐτὸς τῷ α, ἐπεὶ δὲ ὁ η, τὸν β, μετρεῖ καὶ τὸν θ, ὁ η, ἄρα τὸν θ, πολλαπλασ: τὸν β, πεποίηκεν. ἀλλὰ καὶ ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασ. καὶ τὸ β'. πόρισμα τῆς ι σ'. τοῦ ζ'. τὸν β, πεποίηκεν. ἄρα κατὰ τὴν κ'. τοῦ ζ'. ἔστιν ὡς ὁ θ, πρὸς τὸν α, ὁ α, πρὸς τὸν η, μετρεῖ δὲ ὁ α, τὸν η, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ θ, τὸν α, πρῶτον ὄντα, ὅπερ ἄτοπον. ὁ δ, ἄρα ὑπ' ἄλλου τινὸς ἀ μετρεῖται, πάρεξ τῶν α β γ, καὶ παῦτα μὲν κατὰ τὸν Εὐκλείδην. δείκνυται δὲ καὶ ἕπω.

Eucl. Lib. 9. Fig. 11.

Μετρείτω δὴ παρὰ τὰς α β γ, ἀριθμὸς ὁ ε, τὸν δ, ἀριθμὸν, κατὰ τὸν ζ. Λέγω τὸν ε, μὴ πρῶτον εἶναι, εἰ γὰρ ἔσαι μετρῶν τὸν δ, μετρήσει καὶ τὸν α, πρῶτον ὄντα, ὅπερ ἄτοπον. σύνθετος ἄρα ἐστὶν ὁ ε, * μετρεῖται δὲ ὑπὸ μόνα τοῦ α, πρώτα ἀριθμοῦ. εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρηθῇ, μετρηθήσεται παύτως καὶ ὁ δ, ὑπ' ἐκείνα, καὶ ἑπομένως καὶ ὁ α, κατὰ τὴν ι β'. τοῦ παρόντος, πρῶτος ὤν, ὅπερ ἄτοπον. ἐπεὶ δὲ ὁ ε, οὐκ ἔστιν ὁ αὐτὸς, οὐδενὶ τῶν α γ, μετρεῖται δὲ παρὰ τὰ α, μείζων ἄρα ἐστὶ τοῦ α. Ἐπεὶ δ' αὖθις ὁ ε, τὸν δ, μετρεῖ καὶ τὸν ζ, τὸν ζ, ἄρα πολλαπλασιάζων ὁ ε, τὸν δ, ποιήσει, ποιείτω γοῦν τὸν η, ἴσον τῷ δ. κατὰ τὸ β'. πόρισμα, ἄρα τῆς ι σ'. τοῦ ζ'. ἔστιν ὡς ἡ θ, μονὰς πρὸς τὸν ε, ὁ ζ, πρὸς τὸν η, οὕτως τὸν δ. διὰ τὰ αὐτὰ ἔτι, ἐπεὶ ὁ α, τὸν γ, πολλαπλασιάσας, κατὰ τὴν ι α. τοῦ παρόντος, τὸν η, πεποίηκεν. ἔστι παύτως ὡς ἡ κ, μονὰς πρὸς τὸν α, ὁ γ, πρὸς τὸν δ. ἐπεὶ δὲ ὁ η, τὸν ε, ζ, ἔστι τῷ δ, δι' ἴσα ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ κ, μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ἡ θ, μονὰς πρὸς τὸν η, κατὰ τὸ πόρισμα ἄρα τῆς ι δ'. τοῦ ζ'. οἱ κ α γ δ, καὶ θ ε ζ η, ἀριθμοὶ σωὶ δύο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται, ἄρα ὡς ἡ κ, μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ θ, μονὰς πρὸς τὸν ε, ὅσας ἄρα μόναδας ὁ α, περιέχει, τοσαύτας καὶ ὁ ε, οἱ α ε, ἄρα ἴσοι, δέδεικται δὲ ὁ ε, καὶ μείζων τοῦ α, ἄτοπον ἄρα. ὁ μετρεῖται ἄρα ὁ δ, ὑπ' ἄλλα τινὸς, πάρεξ τῶν α β γ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις ΙΔ΄. Θεώρημα.

Ε΄αν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Ε΄στω ἤδη ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὑπὸ τῶν β γ δ, πρώτων, ὁ α, ὃν ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου λέγω, πάρεξ τῶν β γ δ, μετρεῖσθαι. Μετρείσθω γὰρ εἰ δυνατόν, ὑπὸ τοῦ ε, πρώτου, μὴ ὄντος τοῦ αὐτοῦ οὐδενὶ, τῶν β γ δ. ὁσάκις δὲ ε, τὸν α, μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ ζ, δε, ἄρα τὸν ζ, πολλαπλασιάσας τὸν α, ποιήσει, ὃ δὲ α, μετρεῖται ὑπὸ τῶν β γ δ, πρώτων, ἄρα καὶ τὸν λβ΄: τοῦ ζ΄: οἱ β γ δ, καί τινα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσουσι, τὸν δὲ ε, ὃ μετρήσουσι, πρῶτος γὰρ, ἄρα τὸν ζ, μετρήσουσιν οἱ β γ δ, ἐλάττονα ὄντα τοῦ α, ὅπερ ἄτοπον. ὁ γὰρ α, ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενός ἐστιν, ἄρα ὁ α, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. lib. 9. Fig. 12.

Πρότασις ΙΕ΄. Θεώρημα.

Ε΄αν ὦσιν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὁσοιδηποτοῦν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, δύο ὁποσοιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν.

Ε΄στωσαν ἤδη ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ α β γ. Λέγω, ὅτι δύο τινῶν ὁποσωνοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσι, δηλονότι οἱ μὲν α β, πρὸς τὸν γ, οἱ δὲ β γ, πρὸς τὸν α, καὶ οἱ α γ, πρὸς τὸν β. Εὐρεθήτωσαν γὰρ διὰ τῶν λέ: τοῦ ζ΄: ἡ β΄: τοῦ η΄: δύο ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς α β γ, οἱ δε, εζ. ἐπεὶ ὁ δ ε, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν α, πεποίηκεν. ὁ δὲ εζ, τὸν γ, καὶ ὁ δε, τὸν εζ, πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκε, καὶ τὸ γ΄: πόρισμα τῆς β΄: τοῦ η΄: οἱ δε, ρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἄρα καὶ τὸν λ΄: τοῦ ζ΄: καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον πρῶτος ἐστιν, ἄρα ὁ δζ, πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν εζ, ἔστι δὲ καὶ ὁ δε, πρὸς τὸν εζ, πρῶτος. ἄρα δύο ἀριθμοὶ οἱ δζ, δε, πρὸς τὸν εζ, πρῶτοί εἰσι. καὶ τῶν κε΄: ἄρα τοῦ ζ΄: καὶ ὁ ἐκ τῆς δζ, δε, πρὸς τὸν εζ, πρῶτός ἐστι, καὶ ἑπομένως ὁ ἐκ τῆς δζ, δε, πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ εζ, πρῶτός ἐστι καὶ τῶν κζ΄: τοῦ ζ΄: ὁ δὲ ἐκ τῆς δζ, δε, ὁ ἀπὸ τοῦ δε, μετὰ τοῦ ἐκ τῆς δε, εζ. (τὸ αὐτὸ γὰρ γίγνεται πολλαπλασιαθῆναι τὸν δε, πρὸς ἑαυτὸν χωρὶς, καὶ τὸν εζ, πρὸς τὸν δε, εἶτα συναφθῆναι, ἢ συναφθῆναι πρῶτον τὸν δε, τῇ εζ, εἶτα τὸ συμπερασμένον πρὸς τὸν δε, πολλαπλασιαθῆναι) ἄρα ὁ

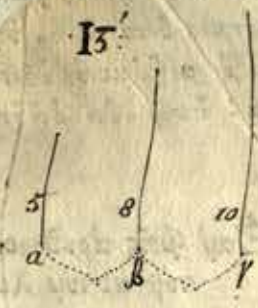
ἐκ τῶ δε, μὴ τῶ ἐκ τῆς δε, εζ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῶ εζ, πρῶτός ἐστιν, ὁ δὲ ἀπὸ τῶ δε, ἐστὶν ὁ α, καὶ ὁ ἐκ τῶν δε, εζ, ὁ β, ὁ δὲ ἀπὸ τῶ εζ, ὁ γ, οἱ αβ, ἄρα ὁμῶ πρὸς τὸν γ, πρῶτοί εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, καὶ τὼς βγ, πρώτως εἶναι, πρὸς τὸν α. λείπεται δὴ δεῖξαι καὶ τὼς αγ, πρὸς τὸν β, πρώτως εἶναι.

Πρότασις Ις′: Θεώρημα.

Ε'αμ' δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλας ὦσιμ, ὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸμ δεύτερομ, ὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλομ τιμά.

Ε'σωσαν ἤδη δύο πρῶτοι πρὸς ἀλλήλας ἀριθμοὶ, οἱ αβ. Λέγω, ὅτι ὐκ ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὕπως ὁ β, πρὸς ἄλλον τινά. Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς τὸν γ. Ε'πεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὕπως ὁ β, πρὸς τὸν γ, οἱ δὲ αβ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ἄρα καὶ τὸν κά: τὸ ζ′: μετρεῖ ὁ α, τὸν β, καὶ εἰσὶ πρῶτοι, ὅπερ ἄτοπον. ἐαν ἄρα δύο ἀριθμοὶ, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euclid. lib. 9. Fig. 13.



Πρότασις Ιζ′: Θεώρημα.

Ε'αμ' ὦσιμ ὁσοιδηποτοῦμ ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀμάλογομ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶμ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλας ὦσιμ, ὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸμ δεύτερομ, ὕτως ὁ ἔσχατος πρὸς ἄλλομ τιμά.

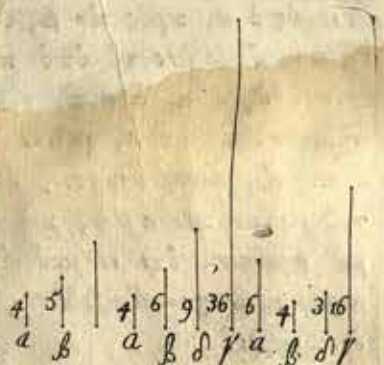
Τῶν ἤδη αβγδ, ἀριθμῶν ἑξῆς ἀμάλογον ὄντων, ἔστωσαν οἱ ἄκροι αὐτῶν αδ, πρῶτοι. Λέγω, ὅτι ὐκ ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὕπως ὁ δ, πρὸς ἄλλον τινὰ, εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω πρὸς τὸν ε. Ε'πεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ δ, πρὸς τὸν ε, καὶ τὸν ιγ′: ἄρα τὸ ζ′: ἔσται καὶ ἐναλλὰξ, ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, ὕπως ὁ β, πρὸς τὸν ε. καὶ ἐπεὶ οἱ αδ, πρῶτοί εἰσι, καὶ τιμὼ κά: τὸ αὐτῶ, ὁ α, μετρεῖ τὸν β, ὡς δὲ ὁ α, πρὸς τὸν β, ὕπως ἐστὶ, καὶ ὁ β, πρὸς τὸν γ, μετρεῖ δὲ ὁ α, τὸν β, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ β, τὸν γ. καὶ ἑπομένως μετρεῖ καὶ ὁ α, τὸν γ. ἐπεὶ δὲ διὰ τὸ ἀμάλογον εἶναι, μετρεῖ ὁ γ, τὸν δ, τὸν δὲ γ, μετρεῖ ὁ α, μετρεῖ ἄρα ὁ α, τὸν δ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ α, οἱ α δ, ἄρα πρῶτοι ὄντες ὑπὸ τῶ α, μετροῦνται. ὅπερ ἄτοπον. ἐαν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρό-

Πρότασις ΙΗ'. Πρόβλημα.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, ἐπισκέψασθαι εἰ δυνατόν ἐστιν, αὐτοῖς τρίτον ἀναλογον προσευρεῖν.

Τῶν α β, ἤδη δεδειγμένων δοθέντων, δεῖ ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατὸν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν. εἰ μὲν οὖν οἱ α β, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ τῷ ις': τῷ παρόντος, οὐκ ἔσται αὐτοῖς τρίτος ἀνάλογος ἀριθμός. εἰ δὲ μή, πολλαπλασιάσας ὁ β, ἑαυτὸν τὸν γ, ποιείτω, ὁ α, ἄρα ἤτοι μετρεῖ τὸν γ, ἢ οὔ. μετρείτω δὴ πρῶτον κατὰ τὸν δ. ὥστε ὁ α, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκεν. ἀλλὰ καὶ ὁ β, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν αὐτὸν γ, πεποίηκεν, ἄρα κατὰ τὸν κ': τῷ ζ': ἔστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν δ, ὁ δ, ἄρα τρίτος ἀνάλογός ἐστι τοῖς α β. ἀλλὰ μὴ μετρείτω ὁ α, τὸν γ. λέγω ὅτι ἀδυνάτον τρίτον ἀνάλογον τοῖς α β, εὑρεθῆναι. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ὅπος ὁ δ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ β, πρὸς τὸν δ, ἄρα καὶ τὸν κ': τῷ ζ': τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων α δ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ β, μέσου. ἀλλ' ὁ γ, ἐστὶν ἀπὸ τοῦ β, ἄρα καὶ ὁ α, τὸν δ, πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιεῖ. ὁ α, ἄρα τὸν γ, μετρεῖ καὶ τὸν δ, ἀλλὰ δὴ ὑπόκειται καὶ μὴ μετρεῖν, ὅπερ ἄτοπον, ἄρα ὁ δ, οὐκ ἔστι τρίτος ἀνάλογος τοῖς α β. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 14.

Πρότασις ΙΘ'. Πρόβλημα.

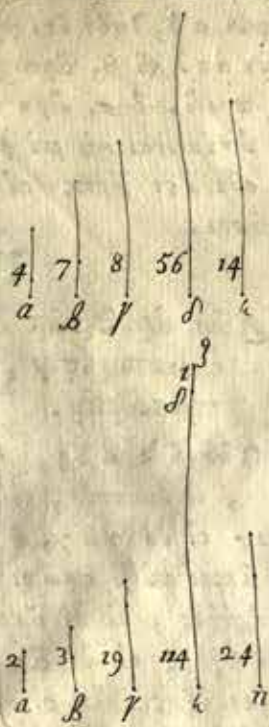
Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, ἐπισκέψασθαι εἰ δυνατόν ἐστιν, αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Τῶν ἤδη α β γ, δεδειγμένων δοθέντων, ἐπισκεπτέον, εἰ δυνατὸν, τέταρτον ἀνάλογον αὐτοῖς εὑρεθῆναι. οἱ δὴ α β γ, ἤτοι καὶ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἢ οὐκ ἀνάλογον μὲν ἐξῆς, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι, ἢ ἀνάλογον μὲν ἐξῆς, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οὐ πρῶτοι, ἢ οὔτε ἀνάλογον ἐξῆς, οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι. ὅτι μὲν οὖν τῶν ἐξῆς ἀναλόγων, ἐὰν οἱ ἄκροι πρῶτοί εἰσιν, ἀδυνάτον τέταρτον ἀνάλογον εὑρεθῆναι, δέδεικται διὰ τῆς ἀνωτέρω. εἰ δὲ μὴ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι, δείκνυται, ὅτε καὶ τισὶν ἀδυνάτον τέταρτον ἀνάλογον εὑρεθῆναι, εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ὅπος ὁ δ. ἔστιν ἄρα ὡς α, πρὸς τὸν β, οὕτως ὁ γ, πρὸς τὸν δ. γεγράφω δὲ καὶ ὡς ὁ β,

πρὸς τὸν γ, ὁ δ, πρὸς τὸν ε. ἐπεὶ οὖν οἱ ἑξῆς ἀριθμοὶ α β γ, καὶ γ δ ε, σωὶ δύο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν, ἄρα καὶ τὸν α δ: τὸν ζ: καὶ οἱ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ α, πρὸς τὸν γ, ὁ γ, πρὸς τὸν ε, οἱ δὲ α γ, πρῶτοί εἰσιν. ἄρα καὶ τὸν α: τὸν ζ: ὁ α, μετρεῖ τὸν γ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν, οἱ α γ, ἄρα πρῶτοι ὄντες, ὑπὸ τοῦ α, ἀριθμοῦ μετροῦνται. ὅπερ ἄτοπον.

Ἀλλὰ γε δὴ ἔστωσαν οἱ α β γ, ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν α γ, μὴ πρῶτοι, καὶ πολλαπλασιάσας ὁ β, τὸν γ, τὸν δ, ποιείτω. Λέγω, ὅτι εἰ μὲν ὁ α, τὸν δ, μετρεῖ, δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον αὐτοῖς εὑρεθῆναι. μετρείτω γὰρ ὁ α, τὸν δ, κατὰ τὸν ε, ὥστε ὁ α, τὸν ε, πολλαπλασ: τὸν δ, πεποίηκεν. ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ β, τὸν γ, πολλαπλασ: τὸν δ, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα κατὰ τὸν α δ: τὸν ζ: ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν ε, ὁ ε, ἄρα τέταρτός ἐστιν ἀνάλογος. εἰ δὲ ὁ α, τὸν δ, οὐ μετρεῖ, δυνατὸν τέταρτον ἀνάλογον εὑρεθῆναι, εἰ γὰρ μὴ, ἔστω ὁ ε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ α, πρὸς τὸν β, ὁ γ, πρὸς τὸν ε, ἄρα κατὰ τὸν ῥηθεῖσαν πρότ: ὁ ὑπὸ τῶν α ε, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν β γ, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν β γ, ἐστὶν ὁ δ, ὁ α, ἄρα τὸν ε, πολλαπλασιάσας τὸν δ, πεποίηκεν. ὥστε ὁ α, μετρεῖ τὸν δ, κατὰ τὸν ε, ἀλλὰ δὴ καὶ οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἄτοπον. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὑποτιθεμένων τῶν α β γ, μὴ ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ τῶν α γ, μὴ πρώτων, ὅτι εἰ μὲν ὁ α, μετρεῖ τὸν δ, δυνατὸν τέταρτον ἀνάλογον εὑρεθῆναι, εἰδὲ μὴ, ἀδύνατον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 9. Fig. 15.



Πρότασις Κ': Θεώρημα.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Προτεθείσθωσαν ἥδη πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ α β γ. Λέγω, ὅτι τούτων πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί. Εἰλήφθω γὰρ διὰ τῶν λη: τὸν ζ: ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν α β γ, μετρούμενος, καὶ ἔστω ὑπὸ ὁ δ ε, προκείσθω δὴ τῇ δ ε, καὶ μονὰς ἡ δ ζ, ὁ ἄρα ε ζ, ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ σωύθετος, εἰ μὲν οὖν πρῶτος, ἄρα εὕρηται οἱ α β γ, καὶ ε ζ, πρῶτοι ἀριθμοὶ, πλείονες τῶν α β γ, προτεθέντων. εἰ δὲ ὁ ε ζ, σωύθετός ἐστι, μετρεῖται ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ, καὶ τὸν λ δ: τὸν ζ: μετρείσθω δὴ ὑπὸ τοῦ η, λέγω δὴ τὸν η, μηδενὶ τῶν α β γ, τὸν αὐτὸν εἶναι. εἰ γὰρ μὴ, ἐπεὶ οἱ α β γ, μετροῦσι τὸν ε δ, ἄρα καὶ ὁ η, μετρεῖ τὸν ε δ, μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ε ζ, ἄρα μετρεῖ καὶ τὸν δ ζ, μονάδα, ἀριθμὸς ὢν ὁ η, ὅπερ ἄτοπον.

πτον. ἐκ ἔστιν ἄρα ὁ η, ὁ αὐτὸς σὺν τῶν α β γ, καὶ ἑπομένως εὑρίσκονται οἱ α β γ η, πρῶτοι ἀριθμοὶ, πλείονες τῶν προτεθέντων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΑ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστι.

Συντεθείσθωσαν ἤδη ἄρτιοι ἀριθμοὶ, οἱ α β, β γ, γ δ, δ ε. Λέγω τὸν α ε, ἄρτιον εἶναι. ἕκαστος γὰρ τῶν α β, β γ, γ δ, δ ε, ἥμισυ μέρος ἔχει κατὰ τὸν ς΄: ὅρον τὸ ζ΄: ἄρα καὶ ὁ α ε, ἀριθμὸς ἥμισυ μέρος ἔχει, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν ὅρον, ἄρτιός ἐστι.

Πρότασις ΚΒ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾖ, ὅλος ἄρτιος ἔσται.

Συγκείσθωσαν ἤδη περισσοὶ ἀριθμοὶ, ὧν τὸ πλῆθος ἄρτιον, οἱ α β, β γ, γ δ, δ ε. Λέγω, ὅτι ὁ α ε, συνθετός ἐστιν. Ἐὰν γὰρ ἀφ' ἑκάστου τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν μονὰς ἀφαιρεθῇ, οἱ πάντες ἄρτιοι ἐγκαταλειφθήσονται. ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἀφαιρεθεισῶν μονάδων ἄρτιον. ἄρα ὁ α ε, ὑπ' ἀρτίων ἀριθμῶν σύγκειται, καὶ κατὰ τοῦτο ἀνωτέρω, ἄρτιός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΓ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, καὶ ὅλος περισσὸς ἔσται.

Συγκείσθωσαν ἤδη περισσοὶ ἀριθμοὶ οἱ α β, β γ, γ δ, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ α δ, περισσός ἐστιν. ἀπὸ γὰρ τοῦ γ δ, μονάδος ἀφαιρουμένης, ἐγκαταλείπεται ὁ γ ε, ἄρτιος, ἔστι δὲ καὶ ὁ α γ, καὶ κατὰ τοῦτο ἀνωτέρω ἄρτιος, ὅλος ἄρα ὁ α ε, ἄρτιός ἐστι κατὰ τοῦτο κα΄: τὸ παρόντος, προστιθεμένης δὲ τῆς ε δ, μονάδος, γενήσεται ὁ α δ, περισσός. ὅπερ καὶ τξ΄.

Excl. Lib. 9. Fig. 16.

Πρότασις ΚΔ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Ἀπὸ τοῦ α β, ἤδη ἀρτίου ἀριθμοῦ, ἀφῃρήσθω ὁ γ β, ἄρτιος. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ α γ, ἄρτιός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ γ β, ἄρτιός ἐστιν, ἔχει πάντως ἥμισυ, ἔχει δὲ ἥμισυ καὶ ὁ α β, ὡς ἄρτιος, ἄρα καὶ ὁ α γ, ἔχει ἥμισυ, τὸ γὰρ τοῦ γ β, μέρος τοῦ ἡμίσεως τοῦ α γ, ἥμισύ ἐστι τοῦ α β, ὅλος ἄρα ὁ α γ, ἄρτιός ἐστι, καὶ κατὰ τὸν ς΄: ὅρον τοῦ ζ΄: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

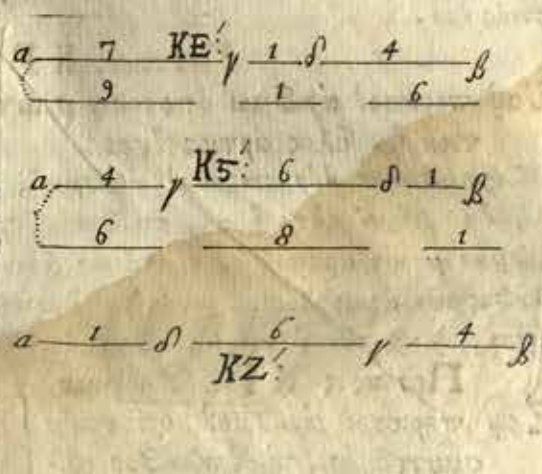
Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου περισσὸς ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Ἀπὸ ἀρτίου γὰρ τοῦ αβ, ἀφῃρήσθω ὁ γβ, περισσός. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ αγ, περισσός ἐστιν. ἀπὸ γὰρ τοῦ γβ, μονάδος τῆς γδ, ἀφαιρεθείσης, ἐγκαταλείπεται, ὁ δβ, ἄρτιος, καὶ κατὰ τὸ ἀνωτέρω, καὶ ὁ αδ, ἄρτιός ἐστιν. ἀφῃρημένης δὲ τῆς γδ, μονάδος ἀπὸ τοῦ αδ, ἀρτίου, ἐγκαταλείπεται ὁ αγ, περισσός. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Eucl. lib. 9. Fig. 17.

Πρότασις ΚϚ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.



Ἀπὸ περισσοῦ γὰρ ἀριθμοῦ τοῦ αβ, ἀφῃρήσθω περισσὸς ὁ γβ. Λέγω, ὅτι ὁ αγ, ἄρτιός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ αβ, καὶ γβ, περισσοί εἰσιν, ἀφῃρημένης τῆς δβ, μονὰς ἐγκαταλείπεται ὁ, τε αδ, καὶ ὁ γδ, ἄρτιος. καὶ ἑπομένως καὶ τὸ κδ': ἄρα τοῦ παρόντος, καὶ ὁ αγ, ἄρτιός ἐστιν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΖ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Ἀπὸ περισσοῦ γὰρ ἀριθμοῦ τοῦ αβ, ἀφῃρήσθω ὁ γβ, ἄρτιος. Λέγω, ὅτι ὁ αγ, περισσός ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ αβ, περισσός ἐστιν, ἀφῃρημένης τῆς αδ, μονάδος, ἐγκαταλείπεται ὁ δβ, ἄρτιος ἀριθμός. Λύθεις ἐπεὶ παρὰ τοῦ δβ, ἀρτίου, ἀφῄρηται ὁ γβ, ἄρτιος, καὶ κατὰ τὸ κδ': τοῦ παρόντος, καὶ ὁ δγ, ἄρτιός ἐστι, προστεθείσης δὲ τῆς αδ, μονάδος, ὁ αγ, ἀριθμὸς, περισσὸς γίνεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΗ'. Θεώρημα.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος ἄρτιος ἔσται.

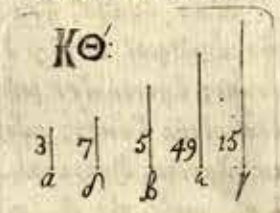
Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, τὸν β, ἄρτιον πολλαπλασιάσας ποιείτω τὸν γ. Λέγω, ὅτι ὁ γ, ἄρτιός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκεν, ὁ γ, ἄρα ἐκ τοσούτων ἀριθμῶν ἴσων τῷ β, σύγκειται, ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ α, ὁ δὲ β, ἄρτιός ἐστι, καὶ ὁ ὑπὸ ἀρτίων συγκείμενος, ὡσαύτως ἄρτιός ἐστι, καὶ κατὰ τὸ κά: ὁ γ, ἄρα ἄρτιός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Eucl. Lib. 9. Fig. 18.

Πρό-

Πρότασις ΚΘ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς περισσοῦ ἀριθμοῦ πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος περισσὸς ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, περισσὸν τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, ποιείτω. Λέγω, ὅτι ὁ γ, περισσός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκεν. ὁ γ, ἄρα ἐκ τοσούτων ἀριθμῶν ἴσων τῷ β, σύγκειται, ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ α, οἱ δὲ α β, ἀριθμοὶ περισσοί εἰσιν, ἄρα ὁ γ, σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν, ὁ δὲ τοιοῦτος περισσός ἐστιν, καὶ τὸν κγ΄: τὸ παρόντος, ἄρα ὁ γ, ἀριθμὸς περισσός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 19.

Πρότασις Λ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, τὸν ἄρτιον β, ἀριθμὸν μετρείτω. Λέγω, ὅτι ὁ α, καὶ τὸν ἥμισυν τοῦ β, μετρήσει. μετρείτω γὰρ ὁ α, τὸν β, καὶ τὸν γ, ὁ δὴ γ, ἄρτιός ἐστιν. εἰ γὰρ μὴ, ἔσται περισσός. ἐπεὶ οὖν ὁ α, τὸν β, μετρεῖ καὶ τὸν γ, ὁ α, παύτως τὸν γ, πολλαπλασ: τὸν β, πεποίηκεν. ὁ β, ἄρα σύγκειται ἐκ ποσάπων ἀριθμῶν ἴσων τῷ γ, ὅσαι μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ α, οἱ δὲ α γ, περισσοί εἰσιν. ἄρα σύγκειται ὁ β, ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν. ὥστε καὶ τὸν κγ΄: τὸ παρόντος, ὁ β, περισσός ἐστιν, ἀλλ' ἄρτιος. ἐπεὶ δὲ ὁ α, τὸν β, μετρεῖ καὶ τὸν ἄρτιον ἀριθμόν. μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν ἥμισυν τοῦ β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΑ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτος ᾖ, καὶ πρὸς τὸν διπλάσιον αὐτοῦ πρῶτος ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ α, πρός τινα ἀριθμὸν τὸν β, πρῶτος ἔστω. Λέγω, ὅτι καὶ πρὸς τὸν διπλάσιον τοῦ β, τετράκι τὸν γ, πρῶτός ἐστιν ὁ α. εἰ γὰρ μὴ, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός, μετρείτω δὴ τὸς α γ, ὁ δ. ἐπεὶ δὲ ὁ α, πρῶτός ἐστιν, ὁ δὲ πρῶτος ὑπ' οὐδενὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται, ἡ ἑαυ-

τῶ. ὁ δ, ἄρα ὁ αὐτός ἐστι τῷ α, ὥστε ὁ γ, σύνθετος ὑπὸ πρώτου ἀριθμοῦ τοῦ δ, μετρεῖται, ἄρα καὶ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ὁ τῶ γ, ἥμισυς, δηλ: ὁ β, ὑπὸ τοῦ δ, μετρεῖται, ὁ δὲ δ, μετρεῖ καὶ τὸν α, οἱ α β, ἄρα εἰσὶ σύνθετοι. ὅπερ ἄτοπον, ὑπετέθησαν γὰρ πρῶτοι. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς. *Euclid. lib. 9. Fig. 20.*

Πρότασις ΛΒ′: Θεώρημα.

Τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον.

Ἀπὸ δυάδος ἤδη τῆς α, διπλασιαθήτωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ β γ δ. Λέγω, ὅτι οἱ β γ δ, ἀριθμοὶ ἀρτιάκις ἄρτιοί εἰσι μόνον. ὅτι μὲν οὖν οἱ β γ δ, ἄρτιοί εἰσι, δῆλον. δίχα γὰρ διαιρεῖται ἕκαστος αὐτῶν, ὡς ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων. ὅτι δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιοι, δείκνυται. Κείσθω μονὰς ἡ ε, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ε, μονὰς πρὸς τὸν α, οὕτως ὁ α, πρὸς τὸν β, καὶ καὶ τὸ β′: πέντε τῆς ιε′: τὰ ζ′: ὁ α, ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν β, πεποίηκεν. ὥστε ὁ β, μετρεῖται ὑπὸ τοῦ α, ἀρτίας καὶ πάσας ἐν αὐτῇ μονάδας, ἐστὶ καὶ τὸν ἄρτιον ἀριθμόν, ὁ δὲ ὑπὸ ἀρτίας ἀριθμοῦ καὶ ἄρτιον μετρούμενος ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστιν, ἄρα ὁ β, ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστιν. Αὖθις ἐπεὶ ὁ β, διπλασιαθεὶς τὸν γ, πεποίηκεν, ὁ α, τὸν β, πολλαπλασιάσας τὸν γ, πεποίηκεν: ὥστε ὁ γ, μετρεῖται ὑπὸ τοῦ α, καὶ τὸν β, οἱ δὲ α β, ἄρτιοί εἰσι. μετρεῖται ἄρα ὁ γ, ὑπὸ ἀρτίας ἀριθμοῦ καὶ ἄρτιον, καὶ ἔστιν ἀρτιάκις ἄρτιος, καὶ τὸν ἡ: ὅρον τοῦ ζ′: ὅτιπερ καὶ ἐπὶ τοῦ ἑξῆς συλλογιστέον. ὅτι δὲ καὶ μόνος δῆλον. εἰ γὰρ ἀφ' ἑπέρου ἀριθμοῦ, τοῦ μὴ ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένου, διπλασιαθῶσιν, οἱ πάντες μέχρι μονάδος διαίρεσιν δεχθήσονται, ἄρα οὐκ ἀρτιάκις ἄρτιοι ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΓ′: Θεώρημα.

Ἐὰν ἀριθμὸς τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόριος.

Ἀριθμὸς ἤδη ὁ α, τὸν ἥμισυν αὐτοῦ ἐχέτω περισσόν. Λέγω, ὅτι ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ τῶ α, ἥμισυς περισσός ἐστιν, ἄρα ὁ α, μετρεῖται ὑπὸ ἀρτίας ἀριθμοῦ καὶ περισσόν. καὶ καὶ τὸν θ′: ὅρον τοῦ ζ′: ἀρτιάκις περισσός ἐστι. Λέγω δὲ, ὅτι καὶ μόνον. εἰ γὰρ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος ὑποτεθῇ, ἄρα ὑπὸ ἀρτίας ἀριθμοῦ μετρηθήσεται κατὰ ἄρτιον. ὥστε καὶ ὁ ἥμισυς αὐτοῦ, ἄρτιος ἔσται, καὶ δίχα διαιρεθήσεται, καὶ τὸν ε′: τοῦ ζ′: ὁ δὲ τῶ α, ἥμισυς περισσὸς ὑπετέθη, ἄρα περισσὸς ἐπὶ δίχα διαιρεθήσεται, ὅπερ ἄτοπον. ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Euclid. Lib. 9. Fig. 21.

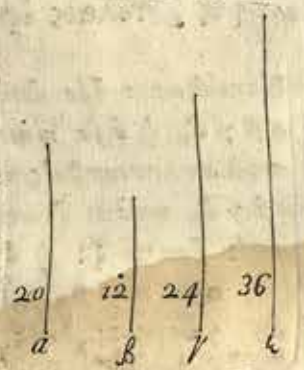
Πρό-

Πρότασις ΛΔ΄: Θεώρημα.

Ε΄αν ἄρτιος ἀριθμὸς, μήτε τῷ ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένῳ ᾖ, μήτε τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσὸν, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Ε΄στω ἤδη τοιοῦτος ὁ α. Λέγω, ὅτι ὁ α, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός. ὅτι μὲν οὖν ἀρτιάκις ἄρτιος, δῆλον, καὶ τὸν ᾱ ὅρον τοῦ ζ΄: ὁ γὰρ τοῦτον ἥμισυς οὐκ ἔστι περισσὸς, ὥστε ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρεῖται καὶ ἄρτιον. Λέγω δὲ, ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. εἰ γὰρ τὸν α, δίχα διέλωμεν, καὶ τοῦτον τὸν ἥμισυν δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶμεν, καταντήσομεν πάντως ἐπί τινα περισσὸν ἀριθμὸν μετροῦντα τὸν α, καὶ ἄρτιον. εἰ γὰρ μή, καταντήσομεν εἰς δυάδα, καὶ ἔσται ὁ α, τῷ ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων, οὗπερ δεῖ οὐχ ὑπόκειται. ὁ α, ἄρα καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν ὁμοίως δεικνυται οἵτε β γ ε, τοιοῦτοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 9. Fig. 22.



Πρότασις ΛΕ΄: Θεώρημα.

Ε΄αν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῇ δὲ ἀπό τε τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἐσχάτου ἴσος τῷ πρώτῳ· ἔσται ὡς ὁ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ὁ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ αὐτοῦ ἅπαντας.

Α΄ριθμοὶ ἤδη ὁσοιδηποτοῦν ἑξῆς ἀνάλογον ἔστωσαν οἱ α, β γ, δ, ε ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπό τε τοῦ β γ, δευτέρου καὶ ἀπὸ τοῦ ε ζ, ἐσχάτου, ἴσος τῷ α, ἑκάτερος τῷ γ η, ζ θ. Λέγω, ὅτι ὡς ὁ β η, ὑπεροχὴ πρὸς τὸν α, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ ε θ, πρὸς τοὺς α, β γ, δ. Κείσθω γὰρ τῷ μὲν β γ, ἴσος ὁ ζ κ, τῷ δὲ δ, ὁ ζ λ. ἐπεὶ οὖν ὁ ζ κ, ἴσός ἐστι τῷ β γ, ἀφῃρέθησαν δὲ ἐκ τούτων ἴσοι οἱ ζ θ, γ η, ἄρα καὶ τὸ γ΄: ἀξίωμα ὁ κ θ, ἴσός ἐστι τῷ β η. ἐπεὶ δὲ οἱ προσκείμενοι ἀριθμοὶ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε ζ, πρὸς τὸν λ ζ, οὕτως ὁ λ ζ, πρὸς τὸν κ ζ, καὶ ὁ κ ζ, πρὸς τὸν θ ζ. καὶ τὸν ι ζ΄: ἄρα τοῦ ε΄: ἔσται καὶ διαιρέσει, ὡς ὁ ε λ, πρὸς τὸν λ ζ, οὕτως ὁ κ λ, πρὸς τὸν κ ζ, καὶ ὁ κ θ, πρὸς τὸν θ ζ. καὶ καὶ τὸν ι β΄: τοῦ αὐτοῦ, ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἔσονται ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους. ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ κ θ, πρὸς τὸν θ ζ, οὕτως οἱ ε λ, λ κ, κ θ, πρὸς τοὺς λ ζ, κ ζ, θ ζ, οἱ δὲ ε λ, λ κ, κ θ, τοῦτ' ε ζ, εἰσὶν ὑπεροχὴ, καὶ οἱ λ ζ, κ ζ,

Eucl. lib. 9. Fig. 23.

ϑζ, ἴσοι τοῖς δ, βγ, α, ἔστι δὲ καὶ ὁ κϑ, τῷ βη, ὁδὲ ϑζ, τῷ α, ἄρα ὡς ὁ βη, πρὸς τὸν α, οὕτως ἐστὶν ὁ εϑ, πρὸς τὰς δ, βγ, α, ἅπαντας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λς'. Θεώρημα.

Ε'αν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα. ὁ γενόμενος, τέλειος ἔσται.

Ε'κκείσθωσαν ὁπόσοιδη ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐνδιπλασίονι ἀναλογίᾳ, οἱ αβγδ, καὶ ὁ εκ τῶν συντεθεὶς ἔστω ὁ ε, πρῶτος· ὁ δὲ ε, ἐπὶ τὸν δ, ἔχατον πολλαπλασιασθεὶς τὸν ζ, ποιείτω. Λέγω τέλειον εἶναι. ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ αβγδ, τοσοῦτοι ἔστωσαν ἀπὸ τῆς ε, ἐνδιπλασίονι λόγῳ οἱ ε, κϑ, λ, μ· καὶ ἐπεὶ τῶν ιδ': ἄρα τῶν ζ': καὶ δ' ἴσου ἔσται ὡς ὁ α, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν μ, καὶ καὶ τῶν ιϑ': τῷ αὐτῷ, ὁ ὑπὸ τῶν δε, γινόμενος, ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν αμ, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν δε, ἐστὶν ὁ ζ, ἄρα καὶ ὁ α, τὸν μ, πολλαπλ: τὸν ζ, πεποίηκεν· ὁ μ, ἄρα μετρεῖ τὸν ζ, καὶ τὰς ἐν τῷ α, μονάδας. ὁ δὲ α, ἐστὶ δυάς, ὁ ζ, ἄρα διπλάσιός ἐστι τοῦ μ, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ μ, λ, κϑ, ε, ἀλλήλων διπλασιεῖς, ἄρα οἱ ε, κϑ, λ, μ, ζ, ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν διπλασίονι ἀναλογίᾳ. ἀφῃρείσθω δὴ ἀπὸ τοῦ κϑ, καὶ κζ, ἑκάτερος τῶν ϑν, ζξ, ἴσοι τῷ ε. διὰ τῆς ἀνωτέρω, ἄρα ὡς ὁ νκ, ὑπεροχὴ τοῦ δευτέρου πρὸς τὸν ε, οὕτως ἐστὶ καὶ ὁ ξη, ὑπεροχὴ τοῦ ἐσχάτου πρὸς ἅπαντας τοὺς ε, κϑ, λ, μ, ὁ δὲ νκ, ἴσος ἐστὶ τῷ ε, ἄρα καὶ ὁ ξη, ἴσος ἐστὶ τοῖς ε, κϑ, λ, μ, ἔστι δὲ ὁ ζξ, ἴσος τῷ ε, καὶ ὁ ε, τοῖς α, β, γ, δ, καὶ μονάδι, ὅλος ἄρα ὁ ζη, ἴσός ἐστι τοῖς μ, λ, κϑ, ε, δ, γ, β, α, καὶ μονάδι, καὶ μετρεῖται ὑπ' αὐτῶν. Λέγω δή, ὅτι ὁ ζη, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, παρεξ τῶν προκειμένων καὶ τῆς μονάδος· εἰ γὰρ δυνατὸν, μετρείτω τὸν ζη, ὁ ο, μηδενὶ τῶν εἰρημένων ὁ αὐτὸς ὤν, καὶ τὰς ἐν τῷ π, μονάδας, ὁ ο, ἄρα τὸν π, πολλαπλασιάσας τὸν ζ, πεποίηκεν. ἀλλὰ καὶ ὁ δ, τὸν ε, πολλαπλ: τὸν αὐτὸν ζ, πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν π, ὁ ο, πρὸς τὸν δ, καπὶ τῶν ιξ': τῶν ζ': ἐπεὶ δὲ οἱ αβγδ, ἀπὸ μονάδος εἰσὶν ἐξῆς ἀνάλογον, καὶ ὁ μετὰ τὴν μονάδα α, πρῶτος, ἄρα καὶ τὸν ιγ': τὸν παρόντος, ὁ δ, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου με-

Eucl. Lib. 9. Fig. 24.

μετρηθήσεται παρὲξ τῶν α, β, γ, ὁ δὲ ο, ἢ κὲ ἔσιν ὁ αὐτὸς ἢδσνὶ τῇ α β γ, ἢ δὲ ὁ ο, ἄρα τὸν δ, μετρήσει, ὡς δὲ ὁ ο, πρὸς τὸν δ, ὕπως ἐσὶν ὁ ε, πρὸς τὸν π, ἢδὲ ὁ ε, ἄρα τὸν π, μετρήσει, κὴ ὁ ε, ἐσὶ πρῶτος, ἄρα οἱ ε π, πρῶτοί εἰσι κὴ πὸν λά: τὰ ζ: κὴ ἑπομένως ἐλάχιστοι κὴ πὸν κδ': τὰ αὐτὰ. ἔσι δὲ ὡς ὁ ε, πρὸς τὸν π, ὁ ο, πρὸς τὸν δ, ἄρα κὴ πὸν κά: τὰ αὐτὰ ζ': ὁσάκις ὁ ε, τὸν ο, μετρεῖ, τοσάκις κὴ ὁ π, τὸν δ, ὁ δὲ δ, ὑπ' ἢδσνὸς ἄλλε μετρεῖται παρὲξ τῆ α β γ, ὁ π, ἄρα ὁ αὐτός ἐσιν ἑνὶ τῇ α β γ· ἔςω δὴ πᾷ β, κὴ ὅσοι εἰσὶν οἱ β γ δ, τοσῦτοι εἰλήφθωσαν ἀπὸ τᾶ ε, οἱ ε, κ Θ, λ, εἰσὶ δὲ οἱ β γ δ, ἐν πᾷ αὐτᾷ λόγῳ τοῖς ε, κ Θ, λ, ἄρα κὴ δι' ἴσε, ὡς ὁ β, πρὸς τὸν δ, ὁ ε, πρὸς τὸν λ, κὴ πὸν ι δ': τὰ ζ': ὁ ἐκ τῶν β λ, ἄρα ἴσός ἐσι πᾷ ἐκ τῶν δ ε, ὁ δὲ ἐκ τῶν δ ε, ἴσός ἐσι πᾷ ἐκ τῶν π ο, ἄρα κὴ ὁ ἐκ τῶν β λ, ἴσός ἐσι πᾷ ἐκ τῶν π ο, ἔσιν ἄρα ὡς ὁ π, πρὸς τὸν β, ὁ λ, πρὸς τὸν ο. ὁ δὲ π, ὁ αὐτός ἐσι πᾷ β, κὴ ὁ λ, ἄρα πᾷ ο, ὁ αὐτός ἐσιν, ὅπερ ἀδύνατον. ἢδσνὶ γὰρ τῇ α, β, γ, δ, ε, κ Θ, λ μ, ὁ ο, ὑπόκειται, ἄρα ὁ ζ, ὑπ' ἢδσνὸς ἄλλε μετρεῖται, παρὲξ τῆ α, β, γ, δ, ε, κ Θ, λ, μ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τᾶ ἐννάτε τῶν τᾶ Εὐκλείδε Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΟΡΩΝ ΤΟΥ ΕΝΔΕΚΑΤΟΥ, ΤΟΥ ΚΑΙ ΠΡΩΤΟΥ ΤΩΝ ΣΤΕΡΕΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Ὅρος Πρῶτος.

Στερεόν ἐστι τὸ μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος ἔχον.

Διαλαβὼν ἐν τοῖς πρότερον βιβλίοις περί τε τῶν ἐν ἐπιπέδῳ ἀρχοειδῶν σχημάτων, καὶ περὶ ἀριθμῶν. καὶ τὰς ἀνήκοντας ἑκάστῳ ὅρους διωρίσατο πῶς τε τῶν προτάσεων θέσεως, ἔχ ἧττον δὲ καὶ ἑρμηνείας πρέπειν. τὴν αὐτὴν δὲ ταύτην πρῆσαι πάλιν ἐθέλων καὶ ἐνταῦθα, ὡς ἀναγκαίαν, πρὸ τῆ ἅψασθαι τῆ προτάσεων, τῆ ὅρων ἤδη αὐτῆ ἄρχεται. καὶ πρῶτον μὲν τί Στερεὸν ἀποδίδωσιν, ὡς περὶ τῆ ἐν τούτῳ σχημάτων τὸν λόγον ποιούμενος. Ἐπεὶ δὲ ἐν ἑκάστῳ τῆ βιβλίων, ἢ περὶ ενὸς μόνου εἴδους τῆ σχημάτων, ἀλλὰ περὶ πολλῶν ἡ σκέψις ἔσται. τοῦτο γε χάριν πρὸ πάντων τῆ βιβλίων τὰς πᾶσιν ἀνήκοντας ὅρους ἐπιχειρεῖ διορίζειν. τίνος δὲ χάριν τὸ στερεὸν νῦν ὁρίζεται, ἢ μᾶλλον δὲ τὸ σῶμα, καίτοι πᾶν στερεὸν, σῶμα καθέστηκεν; ἢ ὅτι τὸ σώματος καθολικωτέρως λαμβανομένε, ὁ τινὶ ὁρίσας, οὐ μόνον τὰ στερεὰ, ἀλλὰ καὶ τὰ ῥοώδη, καὶ αὐτὰ τὰ ὑγρὰ καλούμενα σώματα, ὧν τὰ μὲν καθ' αὑτὰ ἀνεπίδεκτα ὅλως φαίνεται σχημάτων, τὰ δὲ ἑτέρας φύσεως πῶν ὑπὸ στιλπνότητος πέφυκε, τῆ λόγῳ περιεκλύειν δόξειεν. Ἐπεὶ δὲ σκοπὸς αὐτῆ περὶ τῶν δεκτικῶν καθ' αὑτὰ τῶν οἱωνδήποτε σχημάτων διαλαβεῖν, τοῦτο οὗνεκα, ἢ σῶμα, ἀλλά γε στερεὸν ὥρισατο. ἔφη τοίνυν τὸ στερεὸν μῆκος ἔχειν, ἵνα μὴ ἀμερὲς ὑπολιφθῇ. προσέθηκε δὲ καὶ τὸ πλάτος, ὅπως ἂν τῶν γραμμῶν ὑξάρῃ. τὸ δὲ βάθος, ἵνα καὶ τῶν ἐπιφανειῶν διάφορον ἀποδείξῃ, μῆκος μὲν ἔχει τὸ ἐπὶ τὰ ἔμπροσθεν ἢ ὄπισθεν προχωρῶν, πλάτος δὲ τὸ ἐπὶ τὰ δεξιὰ, ἢ ἀριστερὰ ἐκτεινόμενον, καὶ βάθος τὸ ἀπὸ τῶν ἄνω ἐπὶ τὰ κάτω φερόμενον, ὅπερ ἐναντίον τὸ ὕψος ἐστὶ, τὸ ἀπὸ τῶν κάτω ἐπὶ τὰ ἄνω ἀνιόμενον.

Β': Στερεᾶ δὲ πέρατα, ἐπιφάνεια.

Ὥσπερ ἐπιφανείας πέρατα γραμμαὶ λέγονται, ἃ μὴν δὲ σημεῖον. ὅπω καὶ στερεᾶ ἐπιφάνεια, καὶ ἃ γραμμαὶ, πολλῷ δ' ἃ μᾶλλον σημεῖα. καθάπερ γὰρ σημεῖα ῥυέντος γραμμὴν ἀποτελεῖσθαι ἔφημεν, γραμμῆς δὲ ῥυείσης ἐπιφάνειαν, ὅπω τοι εἰπεῖν ἐκ ἀπείκος, καὶ ἐπιφανείας κινηθείσης, σῶμα ἀποτελεῖσθαι. δεῖ δὲ τὴν κίνησιν μὴ ἀφ' οἱοῦδήποτε καὶ πρὸς οἱονδήποτε μέρος γίγνεσθαι ἐννοεῖν. ἀλλ' ἐξ οἱασδήποτε πρὸς οἱονδήποτε γινομένην, τὸ αὐτὸ ἀποτελεῖσθαι.

Γ': Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ ὅσας ἂν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

Οὐ μόνον εὐθεῖα πρὸς εὐθεῖαν ὀρθὴ λέγεται, ἀλλὰ καὶ πρὸς ἐπίπεδον, ἡνίκα τὸ ἴσον τῶν γωνιῶν πανταχόθεν πρῇ. ὥσπερ ἔν τῆς πρὸς εὐθεῖαν ὀρθῆς γνώρισμα τὸ τὰς ἑκατέρωθεν γωνίας ἴσας ποιεῖν. ὅπω καὶ τῆς πρὸς ἐπίπεδον, τὸ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας τὸ αὐτὸ πρεῖν. εἴρηται δὲ τὸ πρὸς πάσας, ἵνα ἐξ οἱασδήποτε μέρους τοῦ ἐπιπέδου ἐξαγόμεναι εὐθεῖαι εἰς ἓν σημεῖον συμπίπτεσθαι ἐννοηθῶσι. τὸ δὲ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὅτι καὶ ἐπὶ τῆς ἐγκλινομένης ἐν ἐπιπέδῳ εὐθείας δυνατὸν πλείους εὐθείας ἀχθῆναι πρὸς ὀρθὰς, μὴ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ.

Δ': Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῆς κοινῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τοῦ ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν.

Ἔστι πάντως γε καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν, ὥσπερ καὶ γραμμὴ πρὸς γραμμήν. Ἐπεὶ καὶ ὑπὸ ἐπιπέδων γωνία στερεὰ περιέχεσθαι λέγεται. ὅπω δὲ γωνία ἀποτελεῖται, ἐκεῖ καὶ ὀρθότης ἐστὶ, καὶ ἔγκλισις. γνώρισμα δὲ τοῦ ὀρθοῦ ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον, ἡ τῶν γραμμῶν ὀρθότης. ἐὰν γὰρ ἐν τῷ ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων γραμμαὶ ἀγόμεναι ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς, ὀρθαὶ πρὸς τὸ λοιπὸν ἐπίπεδον ὦσι, καὶ τὸ ἐπίπεδον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ὀρθὸν λέγεται.

Ε': Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου, ἐπὶ τοῦ ὑπὸ τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος τῆς εὐθείας, εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεζώσης.

Ἐπεὶ τῆς ὀρθότητος ἡ κλίσις ἐναντία. διαξωνώσας ἐν τοῖς ὅροις ἀνωτέρω ὅροις, πότε γραμμὴ καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἑτέραν γραμμὴν, καὶ ἐπίπεδον ὀρθὰ λέγονται,

ται, ἐν τῷ παρόντι περὶ ἐγκλινομένης γραμμῆς τὸν λόγον ποιεῖται. τίνος δὲ χάριν ἃ τῷ ἐγκλινομένῃ γραμμῇ δέδεικται, ἀλλὰ τῇ κλίσιν ταύτης δηλῶσαι σπεύδει; ἢ ὅτι τῶν ἐναντίων αἱ αὐταί εἰσιν ἐπιστῆμαι. καὶ διώρισται γὰρ ὁ τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ, καὶ τῇ ἐγκλινομένῃ ἐπιγνῶναι. ἡ δὲ κλίσις ἀφεστώσεσί, καὶ ἡ αὐτὴ γραμμὴ πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον μᾶλλον, ἢ ἧττον ἐγκλίνειν λέγεται. διὸ καὶ τίς ἡ κλίσις δείκνυται. Ἔστι δὲ κλίσις γραμμῆς πρὸς ἐπίπεδον, γωνία τις περιεχομένη ὑπό τε τῆς ἐφεστώσης, καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀγομένης. δεῖ δὲ τῇ ἀγομένῃ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς ἐφεστώσης, μὴ ὡς ἔτυχεν ἐννοεῖν. ἀλλ' ἐφ' ἃ μέρη ἡ ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς ἐφεστώσης κάθετος πίπτει, ἀγέσθαι, καὶ τὰ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γενόμενα σημεῖα τῆς τε καθέτου καὶ τῆς ἐφεστώσης, ἐπιζευγνύειν.

ς΄: Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῆς πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων, πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ, ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

Καὶ ταῦτα οὐ περὶ τοῦ ἐγκλινομένου ἐπιπέδου διαλαμβάνει. ἀλλά γε τίς ἡ τούτου κλίσις διασαφεῖ, καὶ τοῦτο δ' ὃν ἔφημεν λόγον ἐν τῷ ἀνωτέρω ὅρῳ ποιεῖται. Ἔστι τοίνυν κλίσις τοῦ ἐγκλινομένου ἐπιπέδου πρὸς ἕτερον ἐπίπεδον, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν εὐθειῶν, τῶν ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων οὐσῶν, καὶ πρὸς ὀρθὰς κειμένων τῇ κοινῇ τομῇ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων, πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ. καλεῖται δὲ ἡ τοιαύτη γωνία, κλίσεως γωνία. ὥστε ὁ ἐρωτήσας, καὶ μαθὼν τὴν τοιαύτην γωνίαν πόσων μοιρῶν ἐστιν, οἶδε πάντως τὴν κλίσιν τοῦ ἐπιπέδου.

Ζ΄: Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῆς κλίσεως γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν.

Ὁπλωτικά, φησὶν, ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ἐγκλίνεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ἐὰν αἱ τῶν κλίσεων ἑκατέρας τῶν ἐπιπέδων γωνίαι ἐρωτηθεῖσαι, ἴσαι εὑρεθῶσι, τὰ ἐγκλινόμενα ἐπίπεδα ὁμοίως κεκλίσθαι λέγονται. ἐπεὶ γὰρ ἑκατέρας ἡ τοιαύτη γωνία παρασατικὴ τῆς κλίσεώς ἐστι. καὶ ὡς ἔφθη εἰπὼν, αὖτη ἡ κλίσις, ἐὰν αἱ γωνίαι τὸ ἴσον πρῶσι πρὸς ἀλλήλας, καὶ αἱ κλίσεις ὡσαύτως τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Η΄: Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι, τὰ ἀσύμπτωτα.

Ὥσπερ παράλληλοί γραμμαί εἰσιν, αἱ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, οὐ συμπίπτουσαι· οὕτω καὶ παράλληλα ἐπίπεδά, φησιν, εἶναι, ὅσα παραλλήλως κείμενα, κἂν ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐκβάλλεσθαι ἐννοηθῶσι, μηδέποτε συμπίπτειν, ἅπερ καὶ ἀσύμπτωτα καλεῖ.

Θ΄: Θ΄.

Θ': Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τὸ πλῆθος.

Εἰς δήλωσιν τούτου ζητητέον ἡμῖν πρῶτον, τίνα τῶν ἐπιπέδων ὅμοια λέγεται. Ἐπεὶ δὲ τῶν ἐπιπέδων τὰ μὲν ὡρισμένα εἰσὶν, ὅσα ὑπὸ γραμμῶν, ἢ γραμμῆς περιέχεται, ἃ καὶ σχήματα ἤκουσε· τὰ δὲ ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινόμενα, καὶ ἀόρισα. ὅσα δὲ ἀόρισα ἔτε ἰσότητα δέχεται, ἔτε μὴν ὁμοιότητα, ἀδύνατον γὰρ παραβάλλεσθαι, ἔτε τι κοινὸν ἔχουσι, πλὴν τῆς ἀπειρίας· ἄρα τὰ ὡρισμένα μόνα λεχθῆναι δυνατὸν ὅμοια. τίνα δὲ ταῦτα διὰ τὸ ά: ὅρου τῶν τῆς ς': τῶν ἐπιπέδων βιβλίων δεδήλωκεν Εὐκλείδης· ὅσα τοίνυν τῶν σχημάτων ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχεται, ὅμοια λέγεται. Ἐπεὶ δὲ δυνατὸν καὶ Πεῖσμα, καὶ Κύβος, καὶ ἕκαστον τῶν στερεῶν σχημάτων, τῶν μὴ σφαιρικῶν ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχεσθαι, καὶ ὅμοια λεχθῆναι ἐκ ἔξεστι, διὰ τὸ ἑτεροειδῆ εἶναι, τούτου χάριν καὶ τῶν ἴσων τὸ πλῆθος προσέθηκεν. εἰδέτις ἀπορήσειε, τίνος γε χάριν τὰ σχήματα, ἅπερ τῇ ποσότητι ἀνάγεται, τῷ ὁμοιότητα ἐπιδέχεται, ἥτις παρεπόμενόν ἐστι τῆς ποιότητος; καὶ τὸν Ἀλεξάνδρου ῥητέον, ὅτι τὸ σχῆμα τέταρτον εἶδος τῆς ποιότητος ἀποπληροῖ.

Γ': Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα, ἴσων τῷ πλήθει, καὶ τῷ μεγέθει.

Εἴρηται, ὅτι τῶν στερεῶν σχημάτων, ὅσα ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων καὶ ἴσων τῷ πλήθει περιέχονται, ὅμοιά εἰσιν. ἐὰν οὖν καὶ τῷ μεγέθει ἴσα ὦσι τὰ ἐπίπεδα ὑφ' ὧν περιέχονται, στερεὰ ἐκεῖνα σχήματα, καὶ ἴσα, καὶ ὅμοιά ἐστιν.

ΙΑ': Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων, ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. ἢ καὶ οὕτω, στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων.

Τὰ τῶν γωνιῶν εἴδη δύο, ὥσπερ καὶ τῶν σχημάτων, ἐπίπεδον καὶ στερεόν· καὶ αἱ μὲν τοῦ ἐπιπέδου εἴδους γωνίαι ὑπὸ δύο μόνων γραμμῶν περιέχονται, αἱ δὲ τοῦ στερεοῦ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο. ἀορίστως δὲ εἴρηται ὑπὸ πλειόνων, ὅτι καὶ στερεὰ γωνία ἐν μὲν ταῖς τρίγωνον ἐχούσαις βάσιν πυραμίσιν ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιέχεται, ἐν δὲ ταῖς τετράγωνον ὑπὸ τεσσάρων, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ὁμοίως. αὐξανομένων τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως, αὔξονται καὶ αἱ περιέχουσαι τὴν [illegible] κορυφὴν τῆς πυραμίδος γωνίαι. εἴρηται δὲ τὰς γραμμὰς μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ εἶναι· ὁπηνίκα γὰρ πλείονες εὐθεῖαι ἀλλήλων ἅπτονται, καὶ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ ὦσιν, οὐ στερεὰν γωνίαν ἀποτελοῦσιν, ἀλλὰ πλείους ἐπιπέδους.

ΙΒ': Π[illegible]

ΙΒ'. Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συμβολῆς.

Τὰ ἑξῆς ἄρχεται περὶ τῶν εἰδῶν τῶν στερῶν σχημάτων διαλαβεῖν, ὧν ποικίλων ὄντων, ὥσπερ καὶ τῶν ἐπιπέδων, πρῶτον καὶ ἁπλούστερόν ἐστιν ἡ Πυραμίς. δύναται γὰρ αὕτη ὑπὸ ἐλαχίστου ὑπὸ τεσσάρων μόνον ἐπιπέδων περιέχεσθαι, μηδενὸς τῶν λοιπῶν εἰδῶν τῶν στερεῶν σχημάτων τοῦτο δυναμένου. ἔστι δ' αὕτη ἡ τείχωνον βάσιν ἔχουσα. τὸ οὖν πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεόν, εἴρηται εἰς διαφορὰν τῶν ἐπιπέδων σχημάτων. ἐπιπέδοις δὲ περιεχόμενον, ἵνα μὴ σφαιρικὸν νομισθῇ, καὶ τοῦ κώνου διοίσει. τὸ δὲ ἀφ' ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ τὰ λοιπά, εἰς διαφορὰν τῶν λοιπῶν στερεῶν σχημάτων, ἐπιπέδοις περιεχομένων.

ΙΓ'. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι, καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ, παραλληλόγραμμα.

Δευτέραν τάξιν τῶν στερεῶν σχημάτων τὸ πρίσμα ἔχει. τοῦτο γὰρ μόνον μετὰ τὴν πυραμίδα ὑπὸ πέντε τῷ πλήθει ἐπιπέδων δύναται περιέχεσθαι, τῶν δύο τῶν ἀπεναντίον τριγωνοειδῶν, ἴσων τε καὶ παραλλήλων, τῶν δὲ λοιπῶν ἓξ, παραλληλογράμμων.

ΙΔ'. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιενεχθὲν σχῆμα.

Εἰκότως ἄν τις ἀπορήσειε, τί χάριν περὶ τῶν λοιπῶν σχημάτων διαλαβόντων ἐκ τῶν ὅρων ἑκάστου τὸν ὁρισμὸν ἐθηκάτο αὐτῶν, περὶ δὲ τῆς Σφαίρας ἐκ τῆς καταγραφῆς; πρὸς ὃν ἀπαντητέον, ὅτι τὰ μὲν λοιπὰ τῶν σχημάτων ὑπὸ πλειόνων ἐπιφανειῶν περιεχόμενα, δύναται διὰ τὸ ἀριθμὸν, ὑφ' ὧν περιέχεται ἐπιφανειῶν, καὶ ὡς συγατικῆς διαφορᾶς λαμβανομένου τοῦ σχήματος, γένους ὄντος, παρίστασθαι, ἡ δέ γε σφαῖρα ὑπὸ μιᾶς μόνης περιεχομένη, ὥσπερ καὶ ὁ κύκλος ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς, διὰ τοῦτο ἐκ τῆς καταγραφῆς ὁρίζεται. Ἔστι δὲ Σφαῖρα σχῆμα στερεὸν ὑπὸ κυρτῆς ἐπιφανείας περιεχόμενον. γίνεται δὲ πυνίκα τῆς διαμέτρου τοῦ ἡμικυκλίου μενούσης, περιφερόμενον τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι.

ΙΕ'. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν, ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

Ις'. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ, τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

ΙΖ'. Διά-

ΙΖ΄: Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν, εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ΙΗ΄: Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. καὶ μενοῦσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ, τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος. ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

ΙΘ΄: Ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν, ἡμένουσα, περὶ ἣν τὸ τρίγωνον γράφεται.

Κ΄: Βάσις δὲ, ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης γραφόμενος.

ΚΑ΄: Κύλινδρος δὲ, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

ΚΒ΄: Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον γράφεται.

ΚΓ΄: Βάσεις δὲ, οἱ κύκλοι, οἱ ἀπὸ τῶν ἀπεναντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

ΚΔ΄: Ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἵ τε ἄξονες, καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν.

ΚΙ΄: Κύβος, ἐστὶ σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

Κς΄: Ὀκτάεδρον, ἐστὶ σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

ΚΖ΄: Δωδεκάεδρον, ἐστὶ σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων, καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

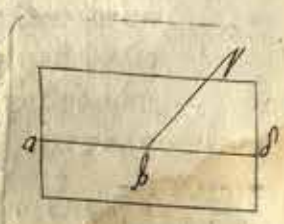
ΚΗ΄: Εἰκοσάεδρον, ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων, ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Πρότασις Α': Θεώρημα.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέντοι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τῆς αγ, εὐθείας μέρος μὲν τὸ αβ, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ τὸ βγ, ἐν τῷ μετεώρῳ. Ἐξαγομένης οὖν τῆς αβ, ἐπὶ τὸ δ, ἔσται ἡ αδ, συνεχὴς εὐθεῖα, ὑπεκειτο δὲ καὶ ἡ αγ, εὐθεῖα εἶναι. δύο ἄρα εὐθεῖαι αγ, αδ, κοινὸν τμῆμα τὸ αβ, ἔχουσιν, ὅπερ ἄτοπον, καὶ τὸ ιγ': ἀξίωμα. Εὐθείας ἄρα γραμμῆς καὶ τὰ ἑξῆς.

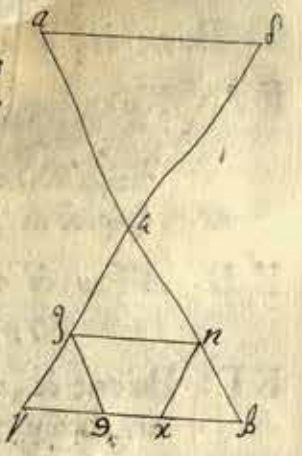
Eucl. lib. 11. Fig. 1'



Πρότασις Β': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Δύο γὰρ εὐθείας τὰς αβ, γδ, τεμνομένας κατὰ τὸ ε, ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι λέγω ἐπιπέδῳ. εἰ γὰρ ἡμὲν αβ, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἢ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ γδ, ἐν μετεώρῳ, ἢ τέμνουσιν ἀλλήλας. εἰ δὲ ἥτε αβ, καὶ τὸ τῆς γδ, μέρος τὸ γε, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ὦσιν ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ εδ, ἐν μετεώρῳ, ἔσται εὐθείας τῆς γδ, μέρος μὲν ἐν τῷ μετεώρῳ, μέρος δὲ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπ: ὅπερ ἄτοπον, κ τ τῶν ἀνωτέρω. Λέγω ἔτι καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἐπιπέδῳ. Ληφθήτωσαν γὰρ ἐπὶ τῶν αβ, γδ, τυχόντα σημεῖα τὰ ζη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζη, γβ, ζθ, ηκ· εἰ οὖν τὸ εγβ, τρίγωνα μέρος μὲν τὸ γζθ, ἢ βηκ, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἢ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν μετεώρῳ, ἔσται ἑκατέρας τῶν γε, γβ, εὐθειῶν μέρος μὲν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ ἐν τῷ μετεώρῳ. ὡσαύτως κἂν τὸ εζη, μέρος τε εγβ, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἢ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν μετεώρῳ. ἔσται καὶ ἑκατέρας τῶν εγ, εβ, μέρος μὲν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ ἐν τῷ μετεώρῳ, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.



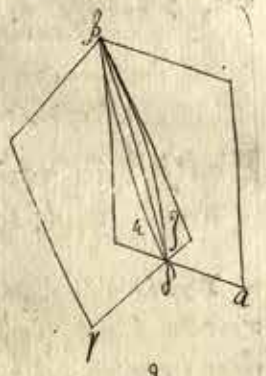
Προ-

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ε'αὶ δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ δ'ιχᾶ ἐ'ςι.

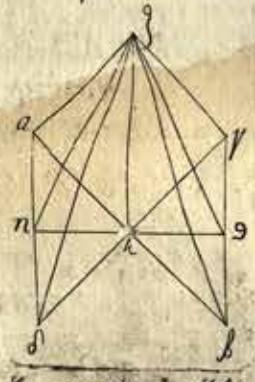
Eucl. Lib. 11. Fig. 2.

Τῶν γὰρ δὴ αβ, βγ, ἐπιπέδων τεμνόντων ἄλληλα, λέγω τὴν βδ, βάσιν κοινὴν τομὴν, δ'ιχᾶ εἶναι. εἰ γὰρ μὴ ἐπιζδ'χθωσαν ἀπὸ τοῦ δ, ἐπὶ τὸ β, ἐν μὲν τῷ αβ, ἐπιπέδῳ δ'ιχᾶ ἡ δε β, ἐν δὲ τῷ γβ, ἡ δζ β, αἱ ποίνυν βε δ, βζ δ, δ'ιχαὶ τὰ αὐτὰ πέρατα ἕξουσι, τὰ β δ, καὶ χωρίον περιέξουσι, ὅπερ ἄτοπον, κατὰ τὸ ιβ': ἀξίωμα. ὡσαύτως δειχθήσεται, κἂν ἄλλης δ'ιχᾶ ἐπὶ τῆς βδ, ἐπιζδχθῇ. Ε'αὶ ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.



Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Ε'αὶ δ'ιχᾶ δύο δ'ιχαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπιςαθῇ, καὶ πρὸς δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔςαι.



Δύο γὰρ δ'ιχαις ταῖς αβ, γδ, τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ ε, ἔςω πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τοῦ ε, δ'ιχᾶ ἡ εζ. Λέγω, ὅτι ἡ εζ, καὶ τῷ διὰ τῶν αβ, γδ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐ'ςι. τῶν γὰρ εα, εδ, εγ, εβ, ἴσων γινομένων, ἐπιζδ'χθωσαν αἱ αδ, γβ, δ'ιχαι, καὶ διὰ τοῦ ε, διήχθω τις δ'ιχᾶ, ὡς ἔτυχεν, ἡ θη. ἀπὸ δὲ τοῦ ζ, σημείου ἐπιζδ'χθωσαν αἱ ζα, ζη, ζδ, ζγ, ζθ. ζβ. ἐπεὶ ποίνυν αἱ δύο αε, εδ, δ'ιχαι ἴσαί εἰσι δυσὶ ταῖς γε, εβ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αεδ, τῇ ἀπὸ γεβ, ἴση, καὶ βάσις ἄρα ἡ αδ, βάσις τῇ γβ, ἴση ἐ'ςὶ, καὶ τὸν δ': τοῦ ά: τῆς ἐπιπέδων. ὥ'ςε καὶ ἡ ὑπὸ εαη, γωνία ἴση ἐ'ςὶ τῇ ὑπὸ εβθ. πάλιν ἐπεὶ τῆς εαη, βεθ, τεγώνων αἱ δύο γωνίαι, αἱ ὑπὸ αεη, εαη, ἴσαί εἰσι δυσὶ ταῖς ὑπὸ θεβ, εβθ, καὶ ἔτι ἡ πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίας δ'ιχᾶ ἡ αε, τῇ εβ, ἴση, καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς εἰσιν ἴσαι, καὶ τὸν ς': τοῦ ά: ἴση ἄρα ἡ μὲν αη, τῇ βθ, ἡ δὲ εε, τῇ εθ. καὶ ἐπεὶ αἱ αε, εβ, ἴσαί εἰσι, κοινὴ δὲ ἡ ζε, καὶ αἱ ὑπὸ ζεα, ζεβ, γωνίαι ὡσαύτως ἴσαι (ὀρθαὶ γὰρ) ἄρα καὶ ἡ ζα, ἴση ἐ'ςὶ τῇ ζβ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, ὅτι, αἱ ζγ, ζδ, ἴσαί εἰσιν. Λύθεις ἐπεὶ ἡ ζα, ἴση δέδεικται τῇ ζβ, ἡ δὲ αδ, τῇ βγ, καὶ ἡ ζγ, τῇ ζδ, ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ζαδ, γωνία ἴση ἐ'ςὶ τῇ ὑπὸ ζβγ, καὶ τὸν η': τοῦ ά: ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ αη, ἴση τῇ βθ, δύο δὴ αἱ ζα, αη, ἴσαί εἰσι δυσὶ ταῖς ζβ, βθ, ἔ'ςι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζαη, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ζβθ, καὶ ἡ ζη, ἄρα βάσις ἴση ἐ'ςὶ τῇ ζθ. καὶ ἐπεὶ πάλιν δέδεικται ἡ ηε, ἴση τῇ εθ, ἡ δὲ εζ, κοινὴ, καὶ ἡ ζη, ἴση τῇ ζθ, ἄρα καὶ ἡ ὑ-

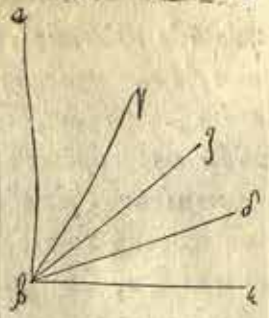
πὸ ζεη, γωνία ἴση ἐσὶ τῇ ὑπὸ ζεϑ, (ὀρϑὴ γὰρ ἑκατέρα τῶν ζεη, ζεϑ,) ὡσαύτως δειχϑήσεται ἡ ζε, ὀρϑὴ εἶναι, καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐϑείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ὥσε καὶ τὸν γ': ὅρον τῶ παρόντος ἡ ζε, εὐϑεῖα ὀρϑή ἐσι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, τοῦτο τὸ δέ ἐσι τὸ διὰ τῶν αβ, γδ. Ἐὰν ἄρα εὐϑεῖα κ.τ.λ. ἐξῆς.

Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ἐὰν εὐϑεῖα τρισὶν εὐϑείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρϑὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπιζαϑῇ, αἱ τρεῖς εὐϑεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Τρισὶν ἤδη εὐϑείαις ταῖς βγ, βδ, βε, ἁπτομέναις ἀλλήλων κατὰ τὸ β, ἐφεστάτω ἡ αβ, ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ β, ἀφῆς. Λέγω τὰς βγ, βδ, βε, ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἐπιπέδῳ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστωσαν αἱ μεν βδ, βε, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ· ἡ δὲ βγ, ἐν τῷ μετεώρῳ· καὶ ἐκβεβλήϑω τὸ διὰ τῶν αβ, βγ, ἐπίπεδον, ὅπερ ποιεῖ τὸ ὑποκειμένε κοινὴν τομὴν ποιήσει. ποιείτω τὴν βζ, αἱ ἤδη βε, βδ, βζ, εὐϑεῖαι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ εἰσὶν ἐπιπέδῳ, ἁπτόμεναι ἀλλήλων κατὰ τὸ β. ἐπεὶ δὲ ἡ αβ, ὀρϑή ἐσι πρὸς ἑκατέραν τῶν βε, βδ, ὀρϑὴ πάντως ἔσαι κατὰ τῶ διὰ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδῳ, τουτέσι τῷ ὑποκειμένῳ, κατὰ τὴν ἀνωτέρω, καὶ ἔτι πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐϑείας, κατὰ τὸν γ': ὅρον τῶ παρόντος. ἐν δὲ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἐσὶν ἡ βζ, καὶ ἅπτεται τῆς αβ, ἄρα ἡ αβ, πρὸς ὀρϑάς ἐσι, καὶ πρὸς τὴν βζ, ἥν δὲ πρὸς ὀρϑὰς καὶ πρὸς τὴν βγ, ἡ ὑπὸ αβγ, ἄρα γωνία ἴση ἐσὶ τῇ ὑπὸ αβζ, ὅπερ ἄτοπον. Ἐὰν ἄρα εὐϑεῖα, καὶ τὰ ἑξῆς.

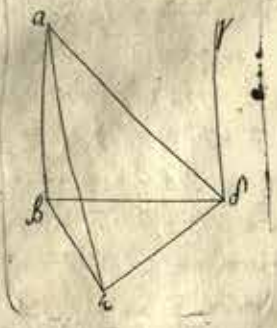
Euclid. lib. 11. Fig. 3.



Πρότασις ς': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐϑεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρϑὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐϑεῖαι.

Εὐϑεῖαι ἤδη αἱ αβ, γδ, πρὸς ὀρϑὰς ἔστωσαν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. Λέγω, ὅτι καὶ παράλληλοί εἰσι. Συμβαλλέϑωσαν γὰρ τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ β, καὶ δ, σημεῖα, καὶ ἐξαχϑήτω τὸ διὰ τῶν αβ, γδ, ἐπίπεδον, ὅπερ ποιεῖ τὸ ὑποκειμένε κοινὴν τομὴν ποιήσει εὐϑεῖαν, ποιείτω δὴ τὴν βδ. ἐπεὶ ἓν ἑκατέρα τῶν αβ, γδ, πρὸς ὀρϑάς ἐσι τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρϑὰς ἔτι ἔσαι καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐϑείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ. ἅπτεται δὲ ἑκατέρας τέτων ἡ βδ, οὖσα ἐν τῷ ὑπο-



ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ α β δ, γ δ β, γωνιῶν ὀρθή ἐστιν. ὅταν δὲ εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. αἱ α β, γ δ, ἄρα παράλληλοί εἰσι, καὶ τὴν κ ή: τοῦ ά: Ε'αν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

Α'ΛΛΩΣ ΚΑΤ' ΕΥ'ΚΛΕΙΔΗΝ.

Τῶν δὴ α β, γ δ, εὐθειῶν συμβαλλουσῶν κατὰ τὸ β δ, σημεῖα, ἐπεζεύχθω ἡ β δ, καὶ ἐπὶ τῆς β δ, πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ τοῦ δ, σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ἤχθω ἡ δ ε, καὶ γενομένης τῆς δ ε, ἴσης τῇ α β, ἐπεζεύχθωσαν αἱ β ε, α ε, α δ. ἐπεὶ οὖν ἡ α β, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἔτι καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν β δ, β ε, εὐθειῶν, καὶ τὴν γ': ὅρον τοῦ παρόντος. ὡσαύτως καὶ ἡ γ δ, πρὸς ἑκατέραν τῶν δ β, δ ε. ἀλλ' ἐπεὶ ἡ δ ε, ἴση ἐστὶ τῇ α β, κοινὴ δὲ ἡ β δ, καὶ ἡ ὑπὸ α β δ, γωνία τῇ ὑπὸ β δ ε, ἴση, (ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα) καὶ βάσις ἄρα ἡ α δ, βάσει τῇ β ε, ἴση ἐστί, καὶ τὴν δ': τοῦ ά: τῶν ἐπιπέδων. Αὖθις ἐπεὶ ἡμὲν α β, ἴση ἐστὶ τῇ δ ε, ἡ δὲ β ε, τῇ α δ, καὶ βάσις ἡ α ε, κοινή, αἱ ἄρα ὑπὸ α β ε, ε δ α, γωνίαι ἴσαι εἰσιν, ἡ δὲ ὑπὸ α β ε, ὀρθὴ ἐδείχθη, καὶ ἡ ὑπὸ α δ ε, ἄρα ὀρθή ἐστιν. ἡ δ ε, ἄρα πρὸς τὴν δ α, ὀρθή ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν δ β, δ γ, ἡ ε δ, ἄρα ταῖς τρισὶν δ β, δ α, δ γ, ὀρθή ἐστι, καὶ καὶ τὴν ἀνωτέρω, αὗται αἱ ἓξῆς εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ. ὥστε καὶ ἡ α β, ἐν τῷ αὐτῷ ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ καὶ αἱ δ β, δ α, καὶ τὴν β': τοῦ παρόντος. αἱ α β, β δ, δ γ, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ α β δ, γ δ β, ὀρθή, αἱ α β, γ δ, ἄρα παράλληλοί εἰσι, καὶ τὴν κ ή: τοῦ ά: τῶν ἐπιπέδων. ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς. *Eucl. Lib. 11. Fig. 4.*

Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Ε'αν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Ε'πὶ δύο ἤδη εὐθειῶν παραλλήλων τῶν α β, γ δ, ληφθήτωσαν τυχόντα σημεῖα τὰ ε, ζ. Λέγω ὅτι διὰ τῶν ε, ζ, εὐθεῖαν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἶναι. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ἐν μετεώρῳ, ὡς ἡ ε η ζ: καὶ διήχθω τὸ διὰ τῆς ε η ζ, ἐπίπεδον, ὅπερ μὴ τὸ διὰ τῶν α β, γ δ, ἐπιπέδου κοινὴν τομὴν ποιήσει. ποιείτω δὴ τὴν ε ζ, ἡ ε ζ, ἄρα καὶ ἡ ε η ζ, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέχουσιν, ὅπερ ἀδύνατον, καὶ τὸ ι β': ἀξίωμα. Ε'αν ἄρα καὶ τὰ ἑξῆς.

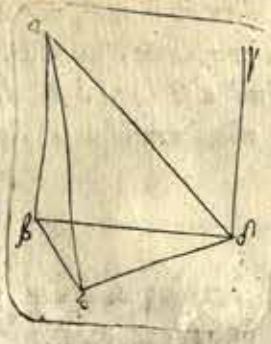
Πρό-

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἑπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθάς ἦ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι.

Δύο γὰρ εὐθειῶν παραλλήλων τῶν αβ, γδ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν αβ, πρὸς ὀρθὰς ἔστω τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. Λέγω καὶ τὴν λοιπὴν γδ, ὀρθὴν εἶναι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῶν αὐτῶν αβ, γδ, εὐθειῶν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ β, καὶ δ, σημεῖα. Ἐπεζεύχθω ἡ βδ, καὶ συμπληρούσθω τὸ χῆμα, καπὰ τὴν καπασκευὴν τῆς ς': τῆ παρόντος. αἱ ἓξῆς ἄρα εὐθεῖαι αβ, βδ, γδ, ἐν τῷ αὐτῷ εἰσιν ἐπιπέδῳ, κατὰ τὴν αὐτέρω. ἤχθω τῇ βδ, πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ δε. καὶ κείσθω τῇ αβ, ἴση ἡ δε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βε, αε, αδ. καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ αβ, καὶ κατὰ τὴν ὑ': τῆ ὁ: ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ αβδ, αβε, γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς αβ, γδ, εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ βδ, αἱ ἄρα ὑπὸ αβδ, γδβ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαί εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ αβδ. ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ γδβ, ἡ γδ, ἄρα πρὸς τὴν βδ, ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ δε, κοινὴ δὲ ἡ βδ, δύο δὴ αἱ αβ, βδ, δυσὶ ταῖς εδ, δβ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδβ, ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ βάσις ἄρα ἡ αδ, βάσει τῇ βε, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αβ, τῇ δε, ἡ δὲ βε, τῇ αδ, δύο δὴ αἱ αβ, βε, δυσὶ ταῖς εδ, δα, ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ αε, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβε, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδα, ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ αβε, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ εδα, καὶ ἡ εδ, ἄρα πρὸς τὴν αδ, ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὴν βδ, ὀρθὴ, ἡ δε, ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν βδ, δα, ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι. καὶ τὸν γ': ὅρον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν αδ, δβ, ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ εδ, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν βδ, δα, ἐπιπέδῳ, ἐστὶν ἡ δγ, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν βδ, δα, ἐπιπέδῳ εἰσὶ καὶ αἱ αβ, βδ, ἐν ᾧ δὲ ἡ αβ, βδ, ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ δγ, ἡ εδ, ἄρα τῇ δγ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ὥστε καὶ ἡ γδ, τῇ δε, πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ γδ, καὶ τῇ βδ, ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς δε, δβ, ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ δ, τομῆς, πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν. ὥστε καὶ ἡ γδ, καὶ τῷ διὰ τῶν δε, δβ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, τὸ δὲ διὰ τῶν δε, δβ, ἐπίπεδον, τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν, καὶ ἡ γδ, ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 11. Fig. 5.



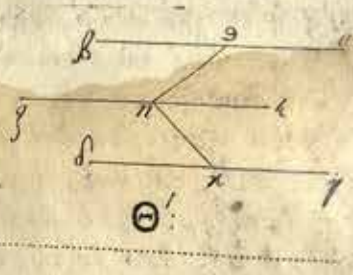
Πρό-

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν α β, γ δ, παράλληλος τῇ ε ζ, μὴ οὖσα αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ α β, τῇ γ δ. Ἐπιζευχθω γὰρ ἐπὶ τῆς ε ζ, σημεῖον τυχὸν τὸ η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ ε ζ, ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν ε ζ, α β, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ θ η, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ζ ε, γ δ, τῇ ε ζ, πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ η κ. καὶ ἐπεὶ ἡ ε ζ, πρὸς ἑκατέραν τῶν η θ, η κ, ὀρθή ἐστιν, ἡ ε ζ, ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν η θ, η κ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστι. καὶ ἔστιν ἡ ε ζ, τῇ α β, παράλληλος, καὶ ἡ α β, ἄρα τῷ διὰ τῶν θ, η, κ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστι καὶ τὴν αὐτὴν, ἑκατέρα ἄρα τῶν α β, γ δ, τῷ διὰ τῶν θ, η, κ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι καὶ τὴν ς': παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ α β, τῇ γ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

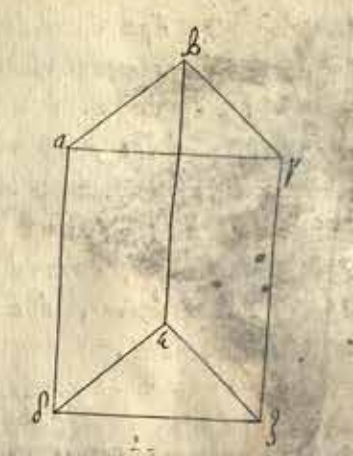
Eucl. Lib. 11. Fig. 6.



Πρότασις Ι': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἅπτωνται ἀλλήλων περὶ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ὧσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἅπτονται ἀλλήλων αἱ α β, β γ, περὶ δύο εὐθείας τὰς δ ε, ε ζ, ἁπτομένας ἀλλήλων ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. Λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ α β γ, γωνία τῇ ὑπὸ δ ε ζ. Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ β α, β γ, ε δ, ε ζ, ἴσαι ἀλλήλαις. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, γ ζ, β ε, α γ, δ ζ. καὶ ἐπεὶ ἡ β α, τῇ ε δ, ἴση ἐστὶ, καὶ παράλληλος, καὶ ἡ α δ, ἄρα τῇ β ε, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ γ ζ, τῇ β ε, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἑκατέρα ἄρα τῶν α δ, γ ζ, τῇ β ε, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ α δ, τῇ γ ζ, καὶ ἴση, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ α γ, δ ζ, καὶ ἡ α γ, ἄρα τῇ δ ζ, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ α β, β γ, δυσὶ ταῖς δ ε, ε ζ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ α γ, βάσει τῇ δ ζ, ἴση, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ α β γ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δ ε ζ, ἐστὶν ἴση. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



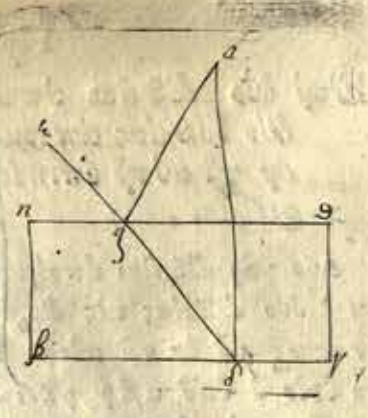
Πρό-

Πρότασις ΙΑ'. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον. Δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ α, σημείου, ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα, ὡς ἔτυχεν, ἡ βγ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἐπὶ τὴν βγ, κάθετος ἡ αδ. εἰ μὲν οὖν ἡ αδ, κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ δ, σημείου τῇ βγ, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ δε· καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὴν δε, κάθετος ἡ αζ, καὶ διὰ τοῦ ζ, σημείου, τῇ βγ, παράλληλος ἤχθω ἡ ηθ. καὶ ἐπεὶ ἡ βγ, ἑκατέρα τῶν δα, δε, πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ βγ, ἄρα καὶ τὸ διὰ τῶν αδ, δε, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καὶ ἔστιν αὐτῷ παράλληλος ἡ ηθ. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται, καὶ τὴν ἡ: τὸ παρ: καὶ ἡ ηθ, ἄρα τοῦ διὰ τῶν αδ, δε, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν εδ, δα, ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ηθ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ αζ, οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν εδ, δα, ἐπιπέδῳ, ἡ ηθ, ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ζα, ὥστε καὶ ἡ ζα, ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ηθ, ἔστι δὲ ἡ αζ, καὶ πρὸς τὴν δε, ὀρθή. ἡ αζ, ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ηθ, δε, ὀρθή ἐστι, καὶ τὴν ς'· ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται, ἡ ζα, ἄρα τῷ διὰ τῶν εδ, ηθ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν εδ, ηθ, ἐπίπεδον ἐστὶ τὸ ὑποκείμενον, ἡ αζ, ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 7.



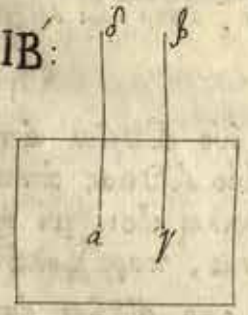
Πρότασις ΙΒ'. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀφαιρῆσαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ α. Δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ α, σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀφαιρῆσαι. Νενοήσθω τὸ σημεῖον μετέωρον τὸ β, καὶ ἀπὸ τοῦ β, ἐπὶ τὸ ὑποκείμε-

κείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ βγ, καὶ διὰ τῆς α, σημείου τῇ βγ, παράλληλος ἤχθω ἡ αδ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν, αἱ αδ, γβ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ βγ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ αδ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀνῆκται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Eucl. Lib. xi. Fig. 8.

ΙΒ΄:

Πρότασις ΙΓ΄: Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου, δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀφαρήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ δύο μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατὸν τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ α, δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, αγ, πρὸς ὀρθὰς ὑφεστάθωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν αβ, αγ, ἐπίπεδον, τομὴν δὴ ποιήσει διὰ τοῦ α, ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν δαε, αἱ ἄρα αβ, αγ, δαε, εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ αγ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ δαε, οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ ἄρα ὑπὸ γαε, γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ βαε, ὀρθή ἐστιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ γαε, τῇ ὑπὸ βαε, καί εἰσιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀχθήσονται, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΔ΄: Θεώρημα.

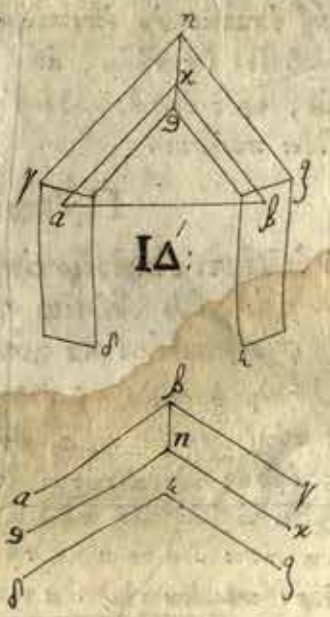
Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, πρὸς ἑκάτερον τῶν γδ, εζ, ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω. Λέγω, ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα. εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται· συμπιπτέτωσαν· ποιήσουσι δὴ κοινὸν τομὴν εὐθεῖαν, ποιείτωσαν τὴν ηθ. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ηθ, τυχὸν σημεῖον τὸ κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ακ, βκ· καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ εζ, ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν βκ, ἄρα εὐθεῖαν, οὖσαν ἐν τῷ εζ, ἐκβληθέντι ἐπιπέδῳ, ὀρθή ἐστιν ἡ αβ, ἡ ἄρα ὑπὸ

αβκ, γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ βακ, ὀρθή ἐστι, ἴση δὲ τῇ αβκ, αἱ δύο γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβκ, βακ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ γδ, εζ, ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσεῖται, παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ γδ, εζ, ἐπίπεδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Euclid. Lib. 11. Fig. 9.

Πρότασις ΙΕ′: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων περὶ δύο εὐθείας ἁπτόμενας ἀλλήλων παράλληλοι ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.



Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ αβ, βγ, περὶ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, τὰς δε, εζ, ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι. λέγω, ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν αβ, βγ, δε, εζ, ἐπίπεδα, οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπίπεδον κάθετος ἡ βη, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ η, σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ η, τῇ μὲν ε δ, παράλληλος ἤχθω ἡ ηθ, τῇ δὲ εζ, ἡ ηκ. καὶ ἐπεὶ ἡ βη, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ηθ, ηκ, οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπιπέδῳ. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βηκ, βηθ, γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ βα, τῇ ηθ, αἱ ἄρα ὑπὸ ηβα, βηθ, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ βηθ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ηβα, ἡ ηβ, ἄρα τῇ βα, πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ βη, καὶ τῇ βγ, ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ βη, δυσὶν εὐθείαις ταῖς βα, βγ, τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἡ βη, ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν βα, βγ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ βη, καὶ τῷ διὰ τῶν ηθ, ηκ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν ηθ, ηκ, ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν δε, εζ, ἡ βη, ἄρα τῷ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐδείχθη δὲ ἡ βη, καὶ τῷ διὰ τῶν αβ, βγ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς, ἔστι δὲ καὶ τῷ διὰ τῶν δε, εζ, ἐπιπέδῳ ὀρθή. ἡ βη, ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν διὰ τῶν αβ, βγ, δε, εζ, ἐπιπέδων ὀρθή ἐστι, καὶ κατὰ τὸ αὐτὸ παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν αβ, βγ, ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν δε, εζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

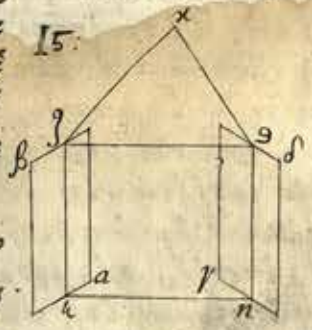
Πρό-

Πρότασις Ις': Θεώρημα.

Ε'αμ δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τιμὸς τέτμηται, αἱ κοιναὶ αὐτῷ τομαὶ παράλληλοί εἰσι.

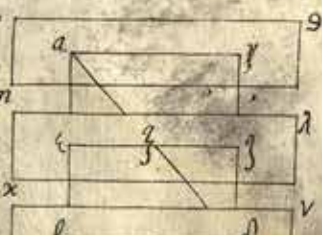
Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα, τὰ α β, γ δ, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ε ζ η θ, τετμήσθω, κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ ε ζ, η θ. Λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ε ζ, τῇ η θ, εἰ γὰρ μὴ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται αἱ ε ζ, η θ, ἤτοι ἐπὶ τὰ ζ, θ, μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ ε, η. Ἐκβεβλήσθω πρότερον, ὡς ἐπὶ τὰ ζ, θ, μέρη, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ κ. καὶ ἐπεὶ ἡ ε ζ κ, ἐν τῷ α β, ἐστὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς ε ζ κ, σημεῖα ἐν τῷ α β, ἐπιπέδῳ ἐστίν, ἐν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς ε ζ κ, εὐθείας σημείων, ἐστὶ τὸ κ, τὸ κ, ἄρα ἐν τῷ α β, ἐστὶν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ κ, καὶ ἐν τῷ γ δ. ἐστὶν ἐπιπέδῳ, τὰ α β, γ δ, ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δέ, διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι, οὐκ ἄρα αἱ ε ζ, η θ, εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ ζ, θ, μέρη. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι αἱ ε ζ, η θ, εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ ε, η, μέρη συμπεσοῦνται ἐκβαλλόμεναι. αἱ δὲ ἐπὶ τὰ μηδέτερα μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ε ζ, τῇ η θ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. xi. Fig. 10.



Πρότασις ΙΖ': Θεώρημα.

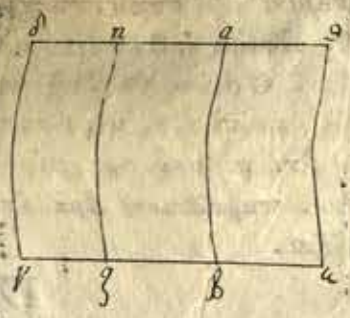
Ε'αμ δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τὰς αὐτὰς λόγους τμηθήσονται.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ α β, γ δ, ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν η θ, κ λ, μ ν, τμηθήτωσαν κατὰ τὰ α, ε, β, δ, ζ, γ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι ἐστὶν, ὡς ἡ α ε, εὐθεῖα πρὸς τὴν ε β, οὕτως ἡ γ ζ, πρὸς τὴν ζ δ. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ α γ, β δ, α δ, καὶ συμβαλέτω ἡ α δ, τῷ κ λ, ἐπιπέδῳ, κατὰ τὸ ξ, σημεῖον. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε ξ, ξ ζ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ κ λ, μ ν, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ε β δ ζ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ε ζ, β δ, παράλληλοί εἰσι κατὰ τὴν ἀντιπέρω. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ πάλιν κατὰ τὴν αὐτὴν, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ α γ, ζ ξ, παράλληλοί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ξυγώνιόν τὸ α β δ, παρὰ μίαν τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἦπται ἡ ε ξ, παράλληλος, ἀνάλογον ἄρα κατὰ τὴν β'. τοῦ ς'. τέμνει τὰς αὐτοῦ πλευρὰς ὡς ἡ α ε, πρὸς τὴν ε β, οὕτως ἡ α ξ, πρὸς τὴν ξ δ. καὶ αὖθις κατὰ τὴν αὐτὴν ὡς τὸ α δ γ,

α δ γ, ξηγώνε αὐάλογόν εἰσιν αἱ πλάγραι, (παρὰ μίαν γὰρ τῶν αὐτῆ πλαγρῶν ἦκται ἡ ξ ζ, παράλληλος) ἄρα ὡς ἡ α ξ, πρὸς τὴν ξ δ, οὕτως ἡ γ ζ, πρὸς τὴν ζ δ, ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ α ξ, πρὸς τὴν ξ δ, οὕτως ἡ α ε, πρὸς τὴν ε β, καὶ ὡς ἄρα ἡ α ε, πρὸς τὴν ε β, οὕτως ἡ γ ζ, πρὸς τὴν ζ δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

Ε'αν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ α β, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω. Λέγω, ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς α β, ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. Ἐκβεβλήθω γὰρ διὰ τῆς α β, ἐπίπεδον τὸ δ ε, καὶ ἔστω τούτου κοινὴ τομὴ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου ἡ γ ε. καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ε γ, τυχὸν σημεῖον τὸ ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, τῇ γ ε, πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ δ ε, ἐπιπέδῳ ἡ ζ η. καὶ ἐπεὶ ἡ α β, πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ α β, ὥστε καὶ πρὸς τὴν γ ε, ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ α β ζ, γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ η ζ β, ὀρθή, παράλληλος ἄρα ἡ α β, τῇ ζ η, ἡ δὲ α β, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἡ ζ η, ἄρα τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καὶ κατὰ τὸν δ'. ὅρον, ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν εἰσὶ τῷ ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ γ ε, πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ζ η, ἐδείχθη τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς, τὸ ἄρα δ ε, ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς α β, ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Eucl. lib. 11. Fig. 11.

Πρότασις ΙΘ'. Θεώρημα.

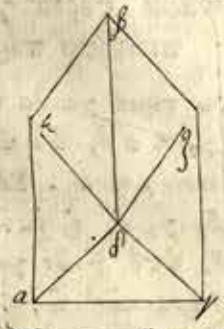
Ε'αν δύο ἐπίπεδα τέμνωσι ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ α β, β γ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω. κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ β δ. Λέγω, ὅτι ἡ β δ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπ: πρὸς ὀρθάς ἐστι. μὴ γάρ, ἀλλ' ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ δ, σημείου ἐν μὲν τῷ α β, ἐπιπέδῳ, τῇ α δ,

εὐθείᾳ

εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ δε, ἐν δὲ τῷ βγ, ἐπιπέδῳ, τῇ γδ, πρὸς ὀρθὰς ἡ δζ, καὶ ἐπεὶ τὸ αβ, ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ αδ, πρὸς ὀρθὰς ἐντῷ αβ, ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ δε, ἡ δε, ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ δζ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ δ, τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ὅπερ ἀδύνατον, καὶ τὴν ιγ'. τοῦ παρόντος. οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ δ, σημείου πρὸς ὀρθὰς ἀναστήσεται, πλὴν τῆς δβ, κοινῆς τομῆς τοῦ αβ, βγ, ἐπιπέδων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 12.

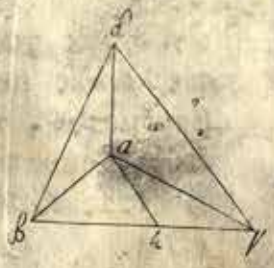


Πρότασις Κ'. Θεώρημα.

Ε'αν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιωσοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ α, ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, περιεχέσθω. λέγω, ὅτι τῶν ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, γωνιῶν δύο ὁποιωσοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. εἰμὲν οὖν αἱ ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. φανερὸν, ὅτι δύο ὁποιωσοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. εἰ δὲ οὔ. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ βαγ. καὶ συνεστάθω πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῷ α, τῇ ὑπὸ δαβ, γωνίᾳ ἐν τῷ διὰ τῶν βαγ, ἐπιπέδῳ ἴση ἡ ὑπὸ βαε. καὶ κείσθω τῇ αδ, ἴση ἡ αε, καὶ διὰ τοῦ ε, σημείου διαχθεῖσα ἡ βεγ, τεμνέτω τὰς αβ, αγ, εὐθείας κατὰ τὰ β, γ, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βδ, δγ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ αε, κοινὴ δὲ ἡ αβ, δύο δὴ αἱ δα, αβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς αε, αβ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δαβ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βαε, ἴση. βάσις ἄρα ἡ δβ, βάσει τῇ βε, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ δβ, δγ, τῆς βγ, μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ δβ, τῇ βε, ἐδείχθη ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ δγ, λοιπῆς τῆς εγ, μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ αε, κοινὴ δὲ ἡ αγ, καὶ βάσις ἡ δγ, βάσεως τῆς εγ, μείζων ἐστί. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δαγ, γωνίας τῆς ὑπὸ εαγ, μείζων ἐστίν, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δαβ, τῇ ἀπὸ βαε, ἴση, αἱ ἄρα ὑπὸ δαβ, δαγ, τῆς ὑπὸ βαγ, μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σὺν δύο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 13.



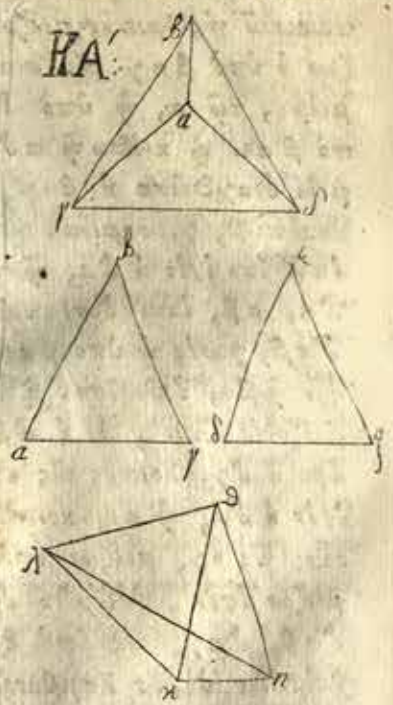
Πρό-

Πρότασις ΚΑ'. Θεώρημα.

Ἅπασα γωνία στερεὰ ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ α, περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ. Λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Εἰλήφθω γὰρ ἑφ' ἑκάστης τῶν αβ, αγ, αδ, τυχόντα σημεῖα τὰ β, γ, δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βγ. γδ, δβ, καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ β, ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ γβα, αβδ, γβδ, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, αἱ ἄρα ὑπὸ γβα, αβδ, τῆς ὑπὸ γβδ, μείζονές εἰσι, καθ' ἃ καὶ πρότερον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ αἱ μὲν ὑπὸ βγα, αγδ, τῆς ὑπὸ βγδ, μείζονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ γδα, αδβ, τῆς ὑπὸ γδβ, μείζονές εἰσιν, ἐξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ γβα, αβδ, βγα, αγδ, αδγ, αδβ, τριῶν τῶν ὑπὸ γβδ, βγδ, γδβ, μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ τρεῖς, αἱ ὑπὸ γβδ, βγδ, γδβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, αἱ ἓξ ἄρα, αἱ ὑπὸ γβα, αβδ, βγα, αγδ, αδγ, αδβ, δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι· καὶ ἐπεὶ ἑκάστου τῶν αβγ, αγδ, αδβ, τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι, αἱ ὑπὸ γβα, αγβ, βαγ, αγδ, δαγ, γδα, αδβ, δβα, βαδ, ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν· ὧν αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, αγδ, γδα, αδβ, δβα, ἓξ γωνίαι δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ βαγ, γαδ, δαβ, τρεῖς γωνίαι, περιέχουσι τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 14.



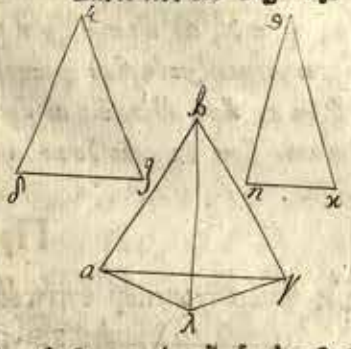
Πρότασις ΚΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατὸν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυσῶν τὰς ἴσας εὐθείας, τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντη μεταλαμβανόμεναι, αἱ αβγ, δεζ, τῆς ὑπὸ ηθκ, αἱ δὲ ὑπὸ δεζ, ηθκ, τῆς ὑπὸ αβγ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ηθκ, αβγ, τῆς ὑπὸ δεζ· καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ αβ, βγ, δε, εζ, ηθ, θκ, εὐθεῖαι· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, δζ, ηκ. Λέγω,

ὅτι

ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ, δζ, ηκ, τρίγωνον συστήσασθαι· πυτέσιν, ὅτι τῶν αγ, δζ, ηκ, δύο ὁποιανοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, φανερὸν, ὅτι καὶ τῶν αγ, δζ, ηκ, ἴσων γενομένων, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων αγ, δζ, ηκ, τρίγωνον συστήσασθαι. εἰ δὲ οὔ· ἔστωσαν ἄνισοι· καὶ συνεστάσθω πρὸς τῇ θκ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ θ, τῇ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ, ἴση ἡ ὑπὸ κθλ, καὶ κείσθω μιᾷ τῶν αβ, βγ, δε, εζ, ηθ, θκ, ἴση ἡ θλ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηλ, κλ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς ηθ, θλ, ἴσαί εἰσι, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ β, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ κθλ, ἴση, βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ κλ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ αβγ, ηθκ, τῆς ὑπὸ δεζ, μείζονές εἰσι, ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ κθλ, ἡ ἄρα ὑπὸ ηθλ, τῆς ὑπὸ δεζ, μείζων ἐστὶ, καὶ ἐπεὶ αἱ ηθ, θλ, δύσι ταῖς δε, εζ, ἴσαί εἰσι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ηθλ, γωνίας τῆς πρὸς τῷ ε, μείζων, βάσις ἄρα ἡ ηλ, βάσεως τῆς δζ, μείζων ἐστὶν, ἀλλ' αἱ ηκ, κλ, τῆς ηλ, μείζονές εἰσι, πολλῷ ἄρα αἱ ηκ, κλ, τῆς δζ, μείζονές εἰσιν, ἡ δὲ κλ, ἴση τῇ αγ, αἱ αγ, ηκ, ἄρα τῆς λοιπῆς δζ, μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν αγ, δζ, τῆς ηκ, μείζονές εἰσιν. αἱ δὲ ηκ, δζ, τῆς αγ. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ, δζ, ηκ, τρίγωνον συστήσασθαι.



Eucl. lib. 11. Fig. 15.

Ἄλλως. Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρίγωνοι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· περιεχέτωσαν δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, δε, εζ, ηθ, θκ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, δζ, ηκ. Λέγω ὅτι δυνατόν ἐστι τρίγωνον συστήσασθαι ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ, δζ, ηκ, πάλιν, ὅτι αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. εἰμὶ οὖν πάλιν αἱ πρὸς τοῖς β, ε, θ, σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσίν. ἔσονται δὲ καὶ αἱ αγ, δζ, ηκ, ἴσαι. καὶ ἔσονται αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες. εἰ δὲ ὄ, ἔστωσαν ἄνισοι αἱ πρὸς τοῖς β, ε, θ, σημείοις γωνίαι, καὶ μείζων ἡ πρὸς τῷ β, ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς ε, θ. μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ αγ, εὐθεῖα ἑκατέρας τῶν δζ, ηκ. καὶ φανερὸν, ὅτι αἱ αγ, μεθ' ἑκατέρας τῶν δζ, ηκ, τῆς λοιπῆς μείζων ἐστί. Λέγω, ὅτι καὶ αἱ δζ, ηκ, τῆς αγ, μείζονές εἰσι. συνεστάθω πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ β, τῇ ὑπὸ κθλ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ αβλ. καὶ κείσθω μιᾷ τῶν αβ, βγ, δε, εζ, ηθ, θκ, ἴση ἡ βλ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αλ, λγ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ, βλ, δυσὶ ταῖς ηθ, θκ, ἴσαί εἰσιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ αλ, βάσει τῇ ηκ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς ε, θ, σημείοις γωνίαι τῆς ὑπὸ αβγ, μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ ηθκ, τῇ ὑπὸ αβλ, ἐστὶν ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ ε,

γωνια

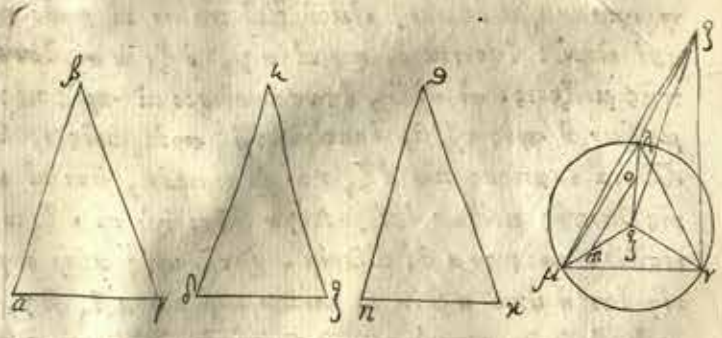
γωνία τῆς ὑπὸ λβγ, μείζων ἐστὶ· καὶ ἐπεὶ δύο αἱ λβ, βγ, δυσὶ ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δεζ, γωνίας τῆς ὑπὸ λβγ, μείζων ἐστὶ, βάσις ἄρα ἡ δζ, βάσεως τῆς λγ, μείζων ἐστὶν, ἴση δὲ ἐδείχθη ἡ ηκ, τῇ αλ, αἱ ἄρα δζ, ηκ, τῶν αλ, λγ, μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ αἱ αλ, λγ, τῆς αγ, μείζονές εἰσι, πολλῷ ἄρα αἱ δζ, ηκ, μείζονές εἰσι τῆς αγ. τῶν αγ, δζ, ηκ, ἄρα δύο τῶν λοιπῶν μείζονές εἰσι παντῃ μεταλαμβανόμεναι. δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ, δζ, ηκ, τρίγωνον συστήσασθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΓ'. Πρόβλημα.

Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι παντῃ μεταλαμβανόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν παντῃ μεταλαμβανόμεναι· ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες. Δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι. Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ αβ, βγ, δε, εζ, ηθ, θκ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, δζ, ηκ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς αγ, δζ, ηκ, τρίγωνον συστήσασθαι· συνεστάθω τὸ λμν, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν αγ, τῇ λμ, τὴν δὲ δζ, τῇ μν, καὶ ἔτι τὴν ηκ, τῇ λν. καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ λμν, τρίγ: κύκλος, ὁ λμν, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον, ἔστω δὲ ἤτοι ἐντὸς τοῦ λμν, τρίγ: ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἢ ἐκτός. Ἔστω πρότερον ἐντὸς, καὶ ἔστω τὸ ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λξ, μξ, νξ. Λέγω, ὅτι ἡ αβ, μείζων ἐστὶ τῆς λξ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν, ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ λξ· ἀλλ' ἡ μὲν αβ, τῇ βγ, ἐστὶν ἴση, ἡ λξ, ἄρα τῇ βγ, ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ λξ, τῇ ξμ, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς λξ, ξμ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ αγ, βάσει τῇ λμ, ὑπόκειται ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ λξμ, ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ δεζ, τῇ ὑπὸ μξν, ἴση ἐστὶν· καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ ηθκ, τῇ ὑπὸ νξλ, τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ λξμ, μξν, νξλ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ λξμ, μξν, νξλ. πέντε ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ,

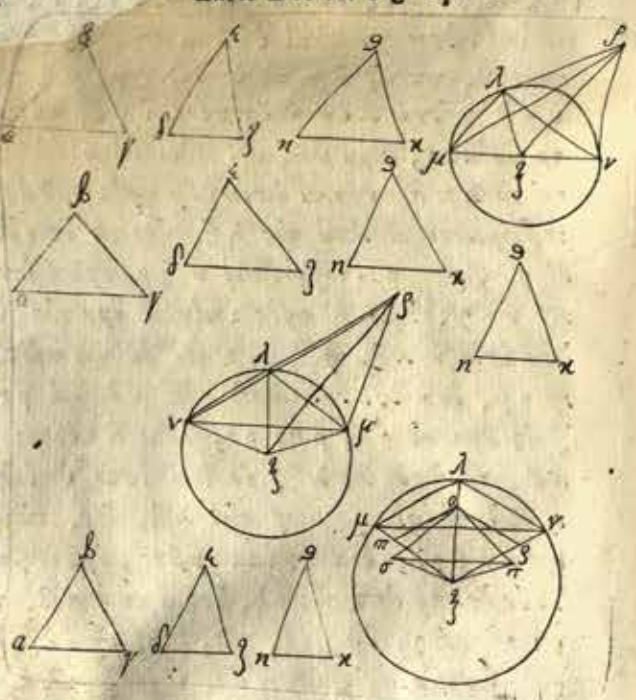
Eucl. Lib. 11. Fig. 16.



δεζ, ηθκ, τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαί εἰσιν, ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἀδύνατον, ἐκ ἄρα ἡ αβ, τῇ λξ, ἐστὶν ἴση. Λέγω, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ αβ, τῆς λξ, εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν αβ, ἴση ἡ ξο, τῇ δὲ βγ, ἡ ξπ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ οπ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν αἱ αβ, τῇ βγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ξο, τῇ ξπ. ὥστε καὶ ἡ ολ, λοιπὴ, λοιπῇ τῇ πμ, ἐστὶν ἴση, παράλληλος ἄρα ἡ λμ, τῇ οπ, καὶ ἰσογώνιον τὸ λξμ, τῷ οπξ· ἔστιν ἄρα καὶ τὸν ά: τῶν ς': ὡς ἡ λξ, πρὸς τὴν λμ, οὕτως ἡ ξο, πρὸς τὴν ομ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ λξ, πρὸς τὴν οξ, οὕτως ἡ λμ, πρὸς τὴν ομ, μείζων δὲ ἡ ξλ, τῆς ξο, μείζων ἄρα καὶ ἡ λμ, τῆς ομ, ἀλλ' ἡ λμ, κεῖται τῇ αγ, ἴση, καὶ ἡ αγ, ἄρα τῆς ομ, μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς ξο, ξπ, ἴσαί εἰσι, καὶ βάσις ἡ αγ, βάσεως τῆς ομ, μείζων ἐστὶ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίας τῆς ὑπὸ οξπ, μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ δεζ, τῆς ὑπὸ μξν, μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ ηθκ, τῆς ὑπὸ νξλ· αἱ ἄρα ἐξῆς γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, ἐξῶν τῶν ὑπὸ λξμ, μξν, νξλ, μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται, πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ λξμ, μξν, νξλ, τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν, ἀλλὰ καὶ ἴσαι, ὅπερ ἄτοπον. ἐκ ἄρα ἡ αβ, ἐλάσσων τῆς λξ, ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδ' ἴση, ἄρα μείζων. Λ'νεσάθω δὴ κατὰ τὰ ιβ': τῷ παρ: ἀπὸ τῆς ξ, σημείου, τῇ τῆς λμ, κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξρ, καὶ ᾧ μείζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἐκείνῳ ἔστω ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ξρ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ρλ, ρμ, ρν· καὶ ἐπεὶ ἡ ξρ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τῆς λμν, κύκλου ἐπίπεδον, κατὰ τὸν γ': ὅρον καὶ πρὸς ἑκάστην ἄρα τῶν λξ, μξ, νξ, ὀρθή ἐστιν ἡ ρξ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ λξ, τῇ ξμ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ξρ, βάσις ἄρα ἡ λρ, βάσει τῇ ρμ, ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ρν, ἑκατέρᾳ τῶν ρλ, ρμ, ἴση ἐστὶν, αἱ ἐξῆς ἄρα αἱ ρλ, ρμ, ρν, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ· καὶ ἐπεὶ ᾧ μείζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἐκείνῳ ἴσον ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς ξρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, ἰσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν λξ, ξρ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν λξ, ξρ, ἰσόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ρλ, διὰ τὴν ἑκατέραν, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ λξρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, ἰσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ρλ, ἴση ἄρα ἡ αβ, τῇ ρλ. ἀλλὰ τῇ μὲν αβ, ἴσαι ἐστὶν ἑκατέρα τῶν βγ, δε, εζ, ηθ, θκ, τῇ δὲ ρλ, ἴσαι ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ρμ, ρν, ἑκατέρα ἄρα τῶν αβ, βγ, δε, εζ, ηθ, θκ, ἑκάστῃ τῶν ρλ, ρμ, ρν, ἴση ἐστίν. ἐπεὶ δὲ δύο αἱ ρλ, ρμ, δυσὶ ταῖς αβ, βγ, ἴσαί εἰσι. καὶ βάσις ἡ λμ, βάσει τῇ αγ, ὑπόκειται ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ λρμ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ αβγ, ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ μρν, γωνία τῇ ὑπὸ δεζ, ἐστὶν ἴση. ἡ δὲ ὑπὸ λρν, τῇ ὑπὸ ηθκ. ἐκ ἐξῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων, τῶν ὑπὸ λρμ, μρν, λρν, αἱ ἴσαί εἰσι ἐξῆς δοθείσαις, ταῖς ὑπὸ αβγ, δεζ, ηθκ, στερεὰ γωνία συνίσταται ἡ πρὸς τῷ ρ, περιεχομένη ὑπὸ τῶν λρμ, μρν, λρν, γωνιῶν. Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κοῖλον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν ἐξῆς πλευρῶν τῆς μν, καὶ

ἔσω τὸ ξ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ξλ. Λέγω πάλιν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ αβ, τῆς λξ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ λξ, ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, τσὶν αἱ δε, εζ, δυσὶ ταῖς ξμ, ξλ, τσὶ τῇ μν, ἴσαι εἰσὶν, ἀλλ' ἡ μν, τῇ δζ, κεῖται ἴση, καὶ αἱ δε, εζ, ἄρα τῇ δζ, ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ αβ, ἴση τῇ λξ, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων, πολλῷ γὰρ τὸ ἀδύνατον μείζων. ἡ ἄρα αβ, μείζων ἐστὶ τῆς λξ, καὶ ἐὰν ὁμοίως, ᾧ μεῖζον τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῷ ἀπὸ τῆς λξ, ἐκείνῳ ἴσον πρὸς ὀρθὰς τῇ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ρξ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα. Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ λμν, ξιγώνου, καὶ ἔστω τὸ ξ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λξ, μξ, νξ. Λέγω δὴ καὶ ὅπως, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ αβ, τῆς λξ, εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν, ἢ ἐλάττων, ἔστω πρότερον ἴση. δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς μξ, ξλ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ αγ, βάσει τῇ μλ, ἐστὶν ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ μξλ, ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ηθκ, τῇ ὑπὸ λξν, ἐστὶν ἴση, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ μξν, δυσὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, ηθκ, ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, ηθκ, τῆς ὑπὸ δεζ, μείζονές εἰσι, καὶ ἡ ὑπὸ μξν, ἄρα τῆς ὑπὸ δεζ, μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ δε, εζ, δυσὶ ταῖς μξ, νξ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ δζ, βάσει τῇ μν, ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ μξν, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ, ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα ἴση ἡ αβ, τῇ λξ. Ἐξῆς δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων, μείζων ἄρα. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τῇ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀναστήσωμεν τὸ ξρ, καὶ ἴσῳ αὐτῷ ὑποθώμεθα, ᾧ μεῖζον δύναται τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα. Λέγω δὲ, ὅτι οὐδ' ἐλάττων ἐστὶν ἡ αβ, τῆς λξ, εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω. καὶ κείσθω τῇ μὲν αβ, ἴση ἡ ξο, τῇ δὲ βγ, ἴση ἡ ξπ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ οπ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ βγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ξο, τῇ ξπ, ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ολ, λοιπῇ τῇ πμ, ἐστὶν ἴση, παράλληλος ἄρα ἡ μλ, τῇ πο, καὶ ἰσογώνιον τὸ λμξ, ξίγ: τῷ πξο, ξιγ: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λξ, πρὸς τὴν λμ, οὕτως ἡ ξο, πρὸς τὴν ομ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ λξ, πρὸς τὴν ξο, οὕτως ἡ λμ, πρὸς τὴν ομ, μείζων δὲ ἡ λξ, τῆς ξο, μείζων ἄρα καὶ ἡ λμ, τῆς ομ. ἀλλ' ἡ λμ, τῇ αγ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ αγ,

Eucl. Lib. 11. Fig. 17.



αγ, ἄρα τῆς οπ, μείζων· ἐπεὶ οὖν αἱ αβ, βγ, δύο δυσὶ ταῖς οξ, ξπ, ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ αγ, βάσεως τῆς οπ, μείζων ἐστὶ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίας τῆς ὑπὸ οξπ, μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ καὶ τὴν ξρ, ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ξο, ξπ, ὑπολάβωμεν, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ορ, δείξομεν, ὅτι ἡ ὑπὸ ηθκ, γωνία τῆς ὑπὸ οξρ, μείζων ἐστί. Συνεστάσθω δὴ πρὸς τῇ λξ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῷ ξ, τῇ μὲν ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ λξσ, τῇ δὲ ὑπὸ ηθκ, ἡ ὑπὸ λξτ, καὶ κείσθω ἑκατέρα τῶν ξσ, ξτ, τῇ οξ, ἴση· καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ οσ, οτ, στ· καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς οξ, ξσ, ἴσαί εἰσι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ οξσ, ἴση, βάσις ἄρα ἡ αγ, τῇ ἐστὶν ἡ λμ, βάσει τῇ οσ, ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ λν, τῇ οτ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ μλ, λν, εἰσὶν ἴσαι δυσὶ ταῖς οσ, οτ, καὶ γωνία ὑπὸ μλν, γωνίας τῆς ὑπὸ στο, μείζων, βάσις ἄρα ἡ μν, βάσεως τῆς στ, μείζων ἐστίν. ἀλλ' ἡ μν, τῇ δζ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ δζ, ἄρα τῆς στ, μείζων. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ δε, εζ, δυσὶ ταῖς σξ, ξτ, ἴσαί εἰσι, καὶ βάσις ἡ δζ, βάσεως τῆς στ, μείζων, ἄρα γωνία ὑπὸ δεζ, γωνίας τῆς ὑπὸ σξτ, μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ σξτ, ταῖς ὑπὸ αβγ, ηθκ, ἡ ἄρα ὑπὸ δεζ, τῇ ὑπὸ αβγ, ηθκ, μείζων ἐστὶν, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον.

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ τρόπον ᾧ μείζονι ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ξρ, δείξομεν ὅτως.

Ἐκκείσθωσαν αἱ αβ, λξ, εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων ἡ αβ. καὶ γεγράφθω ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ αβγ, καὶ εἰς τὸ αβγ, ἐνηρμόσθω τῇ λξ, εὐθείᾳ ἴση ἡ αγ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ βγ. Ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τρίγωνόν ἐστὶ τὸ αβγ, γωνίαν δὲ ἐστὶν ἡ ὑπὸ αγβ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὴν λά: τοῦ γ': τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῆς αγ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς βγ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βγ, ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ λξ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βγ. Ἐὰν οὖν τῷ βγ, ἴσην τῇ ξρ, ὑπολάβωμεν, ἔσαι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς ξρ, ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι.

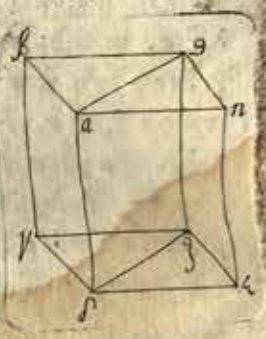
Eucl. Lib. 11. Fig. 18.

Πρότασις ΚΔ'. Θεώρημα.

Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτῷ ἐπίπεδα ἴσα τε, καὶ παραλληλόγραμμά ἐστι.

Στερεὸν γὰρ τὸ γδ ηθ, ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων ἐμπεριεχέσθω, τῶν αγ, ηζ, εθ, δζ, ζβ, αε. Λέγω, ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτῷ ἐπίπεδα, ἴσάτε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ βη, γε, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ αγ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὸν ις': τοῦ παρόντος, παράλληλος ἄρα ἡ αβ, τῇ γδ. Πάλιν ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ βζ, αε, ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ αγ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὸν αὐτόν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αδ, τῇ βγ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ δγ, παράλληλος, παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ αγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν δζ, ζη, βζ, αε, παραλληλόγραμμόν ἐστιν. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ αθ, δζ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν, ἡ μὲν αβ, τῇ δγ, ἡ δὲ βθ, τῇ γζ, δύο δὴ αἱ αβ, βθ, ἁπτόμεναι ἀλλήλων τοῖς δγ, γζ, ἁπτομένας ἀλλήλων παράλληλοί εἰσι, κατὰ τὸν ιέ: τοῦ παρ: οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας ἄρα γωνίας περιέχουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αβθ, γωνία τῇ ὑπὸ δγζ, καὶ ἐπεὶ δύο αἱ αβ, βθ, δυσὶ ταῖς δγ, γζ, ἴσαι εἰσι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβθ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δγζ, ἴση, βάσις ἄρα ἡ αθ, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβθ, τρίγωνον τῷ δγζ, τριγ: ἴσόν ἐστι, καὶ ἔστι τοῦ μὲν αβθ, τριγ: διπλάσιον τὸ βη, παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ δγζ, τὸ γε, παραλληλόγ: ἴσον ἄρα τὸ βη, παραλληλόγ: τῷ γε, παραλλογ: ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ αγ, τῷ ηζ, ἴσόν ἐστι, καὶ τὸ σε, τῷ βζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. *Fig.* 19.



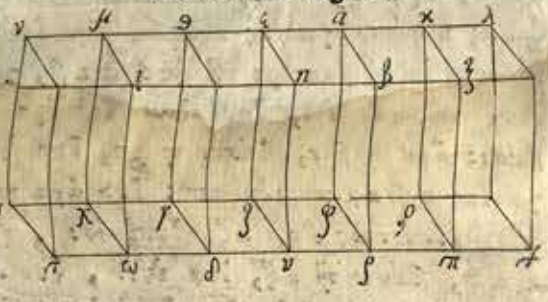
Πρότασις ΚΕ'. Θεώρημα.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτω τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ αβγδ, ἐπιπέδῳ τῷ υε, τετμήσθω, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ρα, δθ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αεζφ, βάσις πρὸς τὴν εθγζ, βάσιν, οὕτω τὸ αβζυ, στερεὸν πρὸς τὸ ενγδ, στερεόν. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ αε, εθ, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη. καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν εθ, ἴσαι, ὁσαιδηποτοῦν αἱ θμ, μν, τῇ δὲ αε, ἴσαι, αἱ αξ, κλ. καὶ συμ-

συμπεπληρώθωσαν τὰ λο, κφ, θχ, μσ, παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ λπ, κρ, δμ, μτ, στερεά. Καὶ ἐπεὶ ἴσαί εἰσιν αἱ λκ, κα, αε, δυθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσά ἐστι καὶ τὰ μὲν λο, κφ, αζ, παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις. τὰ δὲ λξ, κβ, αη, ἀλλήλοις. καὶ ἔτι τὰ λψ, κπ, αρ, ἀλλήλοις, ἀπεναντίον γάρ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ εγ, θχ, μσ, παραλληλόγ: ἴσά ἐστιν ἀλλήλοις, τὰ δὲ θη, θι, ιν, ἴσά εἰσιν ἀλλήλοις. καὶ ἔτι τὰ δθ, μω, ντ. τεία ἄρα ἐπίπεδα τῷ λπ, κρ, αυ, στερεῶν τεισὶν ἐπιπέδοις ἴσά ἐστιν, ἀλλὰ καὶ τὰ τεία τεισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐσὶν ἴσα. τὰ ἄρα τεία στερεὰ τὰ λπ, κρ, αυ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τεία στερεὰ τὰ εδ, δμ, μτ, ἴσα ἀλλήλοις ἐσὶν. ὁσαπλασίων ἄρα ἡ λζ, βάσις τῆς αζ, βάσεως, τοσαυταπλασίον ἐστὶ καὶ τὸ λυ, στερεὸν τοῦ αυ, στερεοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ νζ, βάσις τῆς ζθ, βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ νυ, στερεὸν τοῦ θυ, στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ λζ, βάσις τῇ νζ, βάσει, ἴσον καὶ τὸ λυ, στερεὸν, τῷ νυ, στερεῷ. καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ λζ, τῆς νζ, βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ λυ, στερεὸν τοῦ νυ, στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. τεσσάρων δὲ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων, τῶν αζ, ζθ, δύο δὲ στερεῶν τῶν αυ, υθ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τῆς μὲν αζ, βάσεως, καὶ τοῦ αυ, στερεοῦ, ἥτε λζ, βάσις, καὶ τὸ λυ, στερεὸν. τῆς δὲ θζ, βάσεως, καὶ τοῦ θυ, στερεοῦ, ἥτε νζ, βάσις, καὶ τὸ νυ, στερεὸν, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ λζ, βάσις τῆς νζ, βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ λυ, στερεὸν τοῦ νυ, στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση, ἴσον. καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αζ, βάσις πρὸς τὴν ζθ, βάσιν, οὕτω τὸ αυ, στερεὸν, πρὸς τὸ υθ, στερεὸν καὶ τὸν, ε: ὅρον τοῦ ε: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euc. Lib. 11. Fig. 20.



Πρότασις Κϛ'. Πρόβλημα.

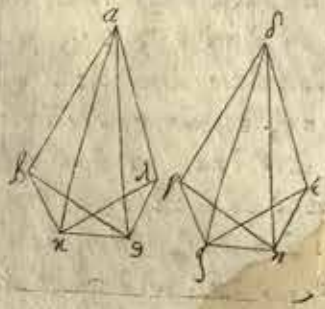
Πρὸς τῇ δοθείσῃ δ'θείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συςήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ἡ αβ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ δ, περιεχομένη ὑπὸ τῶν εδγ, εδζ, ζδγ, γωνιῶν ἐπιπέδων. Δεῖ δὴ πρὸς τῇ αβ, δ'θείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ πρὸς τῷ δ, στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συςήσασθαι. Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς δζ, τυχὸν σημεῖον τὸ ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὸ διὰ τῶν εδ, δγ, ἐπίπεδον κάθετος ἡ ζη, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δη καὶ

συνε-

συνεστάσθω πρὸς τῇ αβ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ μὲν ὑπὸ εδγ, γωνίᾳ ἴσην ἡ ὑπὸ βαλ, τῇ δὲ ὑπὸ εδη, ἴση ἡ ὑπὸ βακ. καὶ κείσθω τῇ δη, ἴση ἡ ακ, καὶ ἀνεστάσθω ἀπὸ τοῦ κ, σημείου τῷ διὰ τοῦ βαλ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ κθ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ηζ, ἡ κθ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θα. Λέγω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ α, στερεὰ γωνία ὑπὸ τοῦ βαλ, βαθ, θαλ, γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ δ, στερεᾷ γωνίᾳ, τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τοῦ εδγ, εδζ, ζδγ, γωνιῶν.

Eucl. Lib. 11. Fig. 21.



Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ αβ, δε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θβ, κβ, ζε, ηε. καὶ ἐπεὶ ἡ ζη, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ηζε, ηζδ, γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ θκβ, γωνιῶν ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ αἱ κα, αβ, δυσὶ ταῖς ηδ, δε, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ βκ, βάσει τῇ εη, ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ κθ, τῇ ζη, ἴση, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν. ἴση ἄρα καὶ ἡ βθ, τῇ ζε. Πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ακ, κθ, δυσὶ ταῖς δη, ηζ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ αθ, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐστίν, ἔστι δὲ καὶ αβ, τῇ δε, ἴση. δύο δὴ αἱ αθ, κβ, δυσὶ ταῖς ζδ, δε, ἴσαί εἰσι. καὶ βάσις ἡ θβ, βάσει τῇ ζε, ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ βαθ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ, ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ θαλ, τῇ ὑπὸ ζδγ, ἴση ἐστίν. ἐπειδὴ περ ἐὰν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς αλ, δγ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς κλ, θλ, ηγ, ζγ, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ βαλ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ εδγ, ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ βακ, τῇ ὑπὸ εδη, ὑπόκειται ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ καλ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ηδγ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ κα, αλ, δυσὶ ταῖς ηδ, δγ, ἴσαί εἰσι, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ κλ, βάσει τῇ ηγ, ἴση ἐστίν. ἴση δὲ καὶ ἡ κθ, τῇ ηζ, ἐστὶ. δύο δὴ αἱ λκ, κθ, δυσὶ ταῖς γη, ηζ, εἰσὶν ἴσαι, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ θλ, βάσει τῇ ζγ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ θα, αλ, δυσὶ ταῖς ζδ, δγ, ἴσαί εἰσι, καὶ βάσις ἡ θλ, βάσει τῇ ζγ, ἐστὶν ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ θαλ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζδγ, ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαλ, τῇ ὑπὸ εδγ, ἴση. πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ, ἴση στερεὰ γωνία συνέσταται.

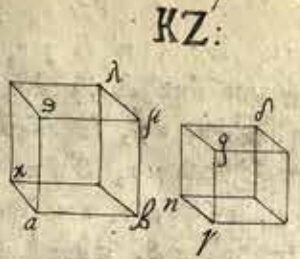
Πρό-

Πρότασις ΚΖ΄: Πρόβλημα.

Α΄πὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὁμοίου τε καὶ ὁμοίως κειμένου στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

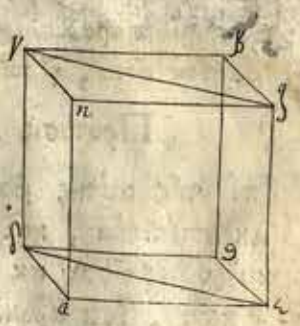
Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ α β, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ δ γ. Δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς α β, τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ δ γ, ὁμοίου τε καὶ ὁμοίως κειμένου, καὶ πάλιν ἑξῆς. Συνεστάθω γὰρ πρὸς τῇ α β, εὐθείᾳ καὶ τῇ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ πρὸς τῷ γ, στερεᾷ γωνίᾳ ἴση, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν β α θ, θ α κ, κ α β, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ β α θ, γωνίαν τῇ ὑπὸ ε γ ζ, τὴν δὲ ὑπὸ β α κ, τῇ ὑπὸ ε γ η, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ κ α θ, τῇ ὑπὸ ε γ ζ. καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ε γ, πρὸς τὴν γ η, οὕτως ἡ β α, πρὸς τὴν α κ, ὡς δὲ ἡ η γ, πρὸς τὴν γ ζ, οὕτως ἡ α κ, πρὸς τὴν α θ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ε γ, πρὸς τὴν γ ζ, οὕτως ἡ β α, πρὸς τὴν α θ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ β θ, παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ α λ, στερεόν. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ε γ, πρὸς τὴν γ η, οὕτως ἡ β α, πρὸς τὴν α κ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ε γ η, β α κ, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα τὸ η ε, παραλληλόγραμμον τῷ κ β, παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν κ θ, παραλληλόγραμμον τῷ η ζ, παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι. καὶ ἔτι τὸ ζ ε, τῷ θ β, τοῖα ἄρα παραλληλόγρ: τὰ γ δ, στερεὰ τρισὶ παραλληλογράμ: τὰ α λ, στερεὰ ὅμοιά εἰσιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τοῖα τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσά τε ἐστι καὶ ὅμοια, ὅλον ἄρα τὸ γ δ, στερεὸν ὅλῳ τῷ α λ, στερεῷ ὁμοιόν ἐστιν. Α΄πὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς α β, καὶ πάλιν ἑξῆς.

Eucl. Lib. 11. Fig. 22.



Πρότασις ΚΗ΄: Θεώρημα.

Ε΄αν στερεοῦ παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.



Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ α β, ἐπιπέδῳ τῷ γ δ ε ζ, τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, τὰς γ ζ, δ ε. Λέγω, ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ α β, στερεὸν ὑπὸ τοῦ γ δ ε ζ, ἐπιπέδου. Ἐπεὶ γὰρ ἴσόν ἐστι τὸ μὲν γ η ζ, τρίγωνον τῷ γ β ζ, τριγώνῳ. τὸ δὲ α δ ε, τῷ δ ε θ, ἴσοι δὲ καὶ τὸ μὲν γ α, παραλληλόγρ: τῷ β ε, ἴσον, ἀπεναντίον γὰρ, τὸ δὲ η ε, τῷ γ θ, καὶ τὸ πείσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο

μοι

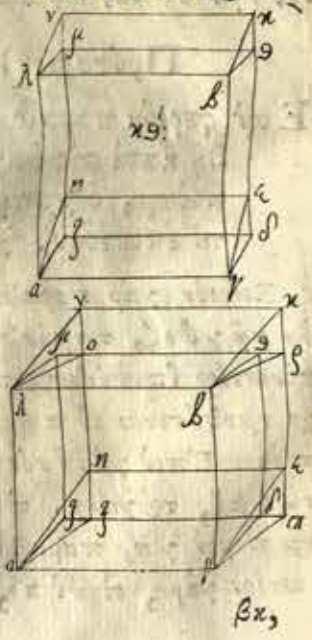
μὲν τριγώνων τῇ γηζ, αδε, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῇ ηε, αγ, γε, ἴσόν ἐστι τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων, τῇ γζβ, δεθ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων γθ, βε, γε, ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ πλήθει, καὶ τῷ μεγέθει. ὥστε ὅλον τὸ αβ, στερεὸν δίχα τέτμηται, ὑπὸ τοῦ γδεζ, ἐπιπέδου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΘ'. Θεώρημα.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῆς αὐτῶν εἰσὶν ἀνίσων, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς αβ, στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ γμ, γν, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι, αἱ αζ, αη, λμ, λν, γδ, γε, βθ, βκ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀνίσων ἔστωσαν τῇ ζν, δκ. Λέγω, ὅτι ἴσόν ἐστι τὸ γμ, στερεὸν τῷ γν, στερεῷ. Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν γθ, γε, ἴση ἐστὶν ἡ γβ, ἑκατέρᾳ τῶν δθ, εκ, ὥστε καὶ ἡ δθ, τῇ εκ, ἐστὶν ἴση. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ εθ, λοιπὴ ἄρα ἡ δε, λοιπῇ τῇ θκ, ἴση ἐστίν. ὥστε καὶ τὸ δεγ, τρίγωνον τῷ θκβ, τριγώνῳ ἴσόν ἐστι, τὸ δὲ δη, παραλληλόγραμμον τῷ θν, παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ αζη, τρίγωνον τῷ λμν, τριγώνῳ ἴσόν ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν γζ, παραλληλόγραμ: τῷ βμ, παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ γη, τῷ βν, ἀπεναντίον γὰρ, καὶ τὸ πρίσμα ἄρα, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν αζη, δεγ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν αδ, δη, ηγ, ἴσόν ἐστι τῷ πρίσματι, τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν λμν, θβκ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν βμ, νθ, βν, κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν τὸ αβ, παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ηεθμ, ὅλον ἄρα τὸ γμ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ γν, στερεῷ παραλληλεπιπ: ἴσόν ἐστι. τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 11. Fig. 23.



Πρότασις Λ'. Θεώρημα.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῆς αὐτῶν ἀνίσων, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἔστω γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς αβ, στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ γμ, γν, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφεστῶσαι, αἱ αζ, αη, λμ, λν, γδ, γε, βθ,

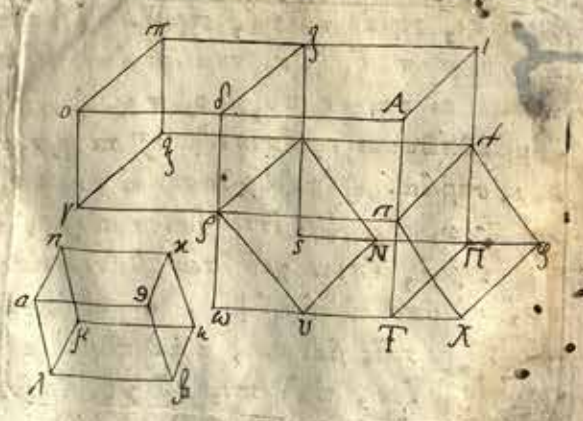
βκ, μὴ ἔσωσαν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθειῶν. Λέγω, ὅτι ἴσόν ἐστι τὸ γμ, στερεὸν τῷ γν, στερεῷ. Ἐκβεβλήθωσαν γὰρ αἱ νκ, δϑ, καὶ ἔτι αἱ ηε, ζμ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὰ ο, ρ, π, ξ, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αξ, λο, γπ, βρ, ἴσον δή ἐστι τὸ γμ, στερεὸν, ᾧ βάσις μὲν τὸ αγβλ, παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ζδϑμ, τῷ γο, στερεῷ, ᾧ βάσις μὲν τὸ αγβλ, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ τὸ ζπρο, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς αγβλ, καὶ αὐτῆς αἱ ὑφεστῶσαι αἱ αζ, αξ, λμ, λο, γδ, γπ, βϑ, βρ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσιν εὐθειῶν τῆς ζπ, μρ, καὶ τῷ ἀνωτέρω, ἀλλὰ τὸ γο, στερεὸν, ᾧ βάσις μὲν τὸ αγβλ, παραλληλόγρ: ἀπεναντίον δὲ τὸ ξπρο, καὶ τῷ αὐτῷ, ἴσόν ἐστι τῷ γν, στερεῷ, ᾧ βάσις μὲν τὸ αγβλ, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ τὸ κεην, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς αγβλ, καὶ αὐτῶν αἱ ὑφεστῶσαι, αἱ αη, αξ, γε, γπ, λν, λο, βκ, βρ, ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, τῶν κπ, νξ, ὥστε καὶ τὸ γμ, στερεὸν ἴσόν ἐστι τῷ γν, στερεῷ. Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΑ′: Θεώρημα.

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

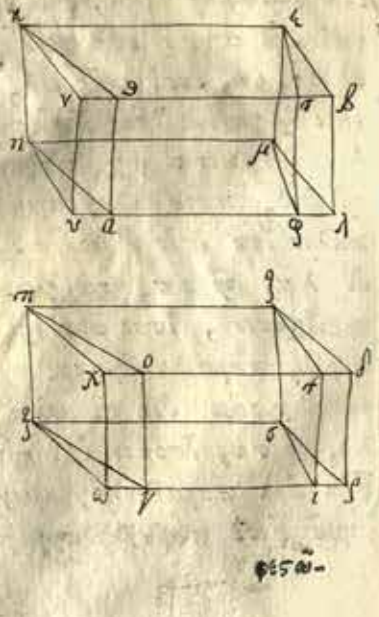
Ἐστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν αβ, γδ, στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ αε, γζ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Λέγω, ὅτι ἴσόν ἐστι τὸ αε, στερεὸν τῷ γζ, στερεῷ. Ἔστωσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ϑκ, βε, αη, λμ, οπ, δζ, γξ, ρσ, πρὸς ὀρθὰς ταῖς αβ, γδ, βάσεσιν, ἡ δὲ ὑπὸ αλβ, τῇ ὑπὸ γρδ, ἄνισος. καὶ ἐκβεβλήϑω ἐπ' εὐθείας τῇ γρ, εὐθεῖα ἡ ρτ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ρτ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ ρ, τῇ ὑπὸ αλβ, γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ τρυ, καὶ κείσθω τῇ μὲν αλ, ἴση ἡ ρτ, τῇ δὲ λβ, ἴση ἡ ρυ, καὶ πρὸς τῷ υ, σημείῳ τῇ ρτ, παράλληλος ἀνεστάϑω ἡ υχ, καὶ συμπεπληρώϑω ἥτε ρχ, βάσις, καὶ τὸ ψυ, στερεὸν, καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ρτ, ρυ, δυσὶ ταῖς αλ, λβ, ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ρχ, παραλληλόγραμ: τῷ ϑλ, παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αλ, τῇ ρτ, ἡ δὲ λμ, τῇ ρσ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ρψ, παραλληλόγραμ: τῷ αμ, παραλληλογράμ: διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ λε, τῷ συ, ἴσόν τε ἐστὶ καὶ ὅμοιον. ξία ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ αε, στερεὰ ξίσι παραλληλογράμ: τὰ ψυ,

Eucl. Lib. 11. Fig. 24.



στερεοῦ ἴσα ἐστί, καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν ἓξ ἐστὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοια, καὶ ὅλον ἄρα τὸ αε, στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ φυ, παραλληλεπιπέδῳ ἴσόν ἐστι. διήχθωσαν αἱ δρ, χυ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ ω, καὶ διὰ τῶν τ, σ δ ω, παράλληλος ἡ τΤ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἡ Τ τ, καὶ ο δ, καὶ συνεζεύχθωσαν κατὰ τὸ Α. καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ ωφ, ρι, στερεά, ἴσον δή ἐστι τὸ φω, στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ρφ, παραλληλόγραμμον· ἀπεναντίον δὲ τὸ ωΠ, τῷ φυ, στερεῷ, οὗ βάσις ἐστὶ τὸ ρφ, παραλληλόγραμμον· ἀπεναντίον δὲ τὸ υφ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ρφ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ αὐτῷ αἱ ὑφεστῶσαι αἱ ρω, ρυ, Ττ, τχ, σς, σΝ, φΠ, φφ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εἰσι δυθειῶν τῆς ωχ, ςφ, ἀλλὰ τὸ φυ, στερεὸν τῷ αε, ἴσόν ἐστι, καὶ τὸ φω, ἄρα στερεὸν τῷ αε, στερεῷ, ἴσόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴσόν ἐστι τὸ ρυχτ, παραλληλόγραμμον τῷ ωτ, παραλληλογράμμῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ρτ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ρτ, ωχ, ἀλλὰ τὸ ρυχτ, τῷ γδ, ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ τῷ αβ· καὶ τὸ ωτ, ἄρα παραλληλόγραμμον· τῷ γδ, ἐστὶν ἴσον. ἄλλο δέ τὸ δτ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ γδ, βάσις πρὸς τὴν δτ, οὕτως ἡ ωτ, πρὸς τὴν δτ, καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ γι, ἐπιπέδῳ τῷ ρζ, τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ γδ, βάσις πρὸς τὴν δτ, βάσιν, οὕτως τὸ γζ, στερεὸν πρὸς τὸ ρι, στερεόν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ωι, ἐπιπέδῳ τῷ ρφ, τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ωτ, βάσις πρὸς τὴν δτ, βάσιν, οὕτω τὸ ωφ, στερεὸν πρὸς τὸ ρι, στερεόν, ἀλλ' ὡς ἡ γδ, βάσις πρὸς τὴν δτ, οὕτως ἡ ωτ, πρὸς τὴν τδ, καὶ ὡς ἄρα τὸ γζ, στερεὸν πρὸς τὸ ρι, στερεόν, οὕτω τὸ ωφ, στερεὸν πρὸς τὸ ρι, στερεόν, ἑκάτερον ἄρα τῶν γζ, φω, στερεῶν πρὸς τὸ ρι, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἴσον ἄρα τὸ γζ, στερεὸν τῷ ωφ, στερεῷ, ἀλλὰ τὸ ωφ, τῷ αε, ἐδείχθη ἴσον, καὶ τὸ αε, ἄρα ἴσόν ἐστι τῷ γζ. Μὴ ἔστωσαν δὲ αἱ ἐφεστηκυῖαι, αἱ αη, θκ, βε, λμ, γξ, οπ, δζ, ρσ, πρὸς ὀρθὰς ταῖς αβ, γδ, βάσεσιν. Λέγω δὴ πάλιν, ὅτι ἴσόν ἐστι τὸ αε, στερεὸν τῷ γζ, στερεῷ. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν κ, η, μ, π, ζ, ξ, σ, σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον αἱ κν, ετ, ηυ, μφ, πχ, ζψ, ξω, σι, καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ ν, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, ι, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ντ, υφ, ηυ, τφ, χψ, χω, ωι, ψι. ἴσον δή ἐστι τὸ κφ, στερεὸν τῷ πι, στερεῷ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν κμ, πσ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν, ἀλλὰ τὸ μὲν κφ, τῷ αε, στερεῷ ἴσόν ἐστι, τὸ δὲ πι, τῷ γζ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ὧν αἱ ἐφεστῶ-

Eucl. Lib. 11. Fig. 25.



φεστῶ-

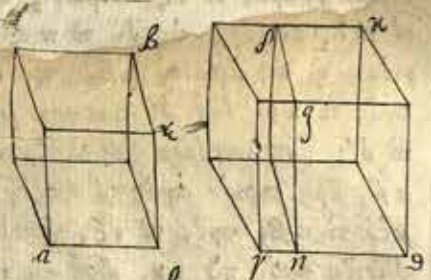
φεσῶσαι ἐκ εἰσὶν ἐπὶ τῆ αὐτῆ δ' Θειῶν, καὶ τὸ α ε, ἄρα, στερεὸν τῷ γ ζ, στερεῷ ἐστιν ἴσον, τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΛΒ΄: Θεώρημα.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις.

Ε΄στωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ α β, γ δ. Λέγω, ὅτι παῦτα ἔχουσιν ὡς αἱ βάσεις (τετράγωνα, πρὸς ἄλληλα) ὡς ἡ α ε, βάσις πρὸς τὴν γ ζ, βάσιν, οὕτως τὸ α β, στερεὸν, πρὸς τὸ γ δ, στερεόν. Παραβεβλήθω γὰρ παρὰ τὴν ζ η, τῷ α ε, ἴσον τὸ ζ Θ, παραλληλόγρ. καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ζ Θ, ὕψος δὲ αὐτῆ τῷ γ δ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπληρώσθω τὸ η κ, ἴσον δή ἐστι τὸ α β, στερεὸν τῷ η κ, στερεῷ, ἐπίπεδα γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῆ α ε, ζ Θ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ τῆ ἀνωτέρω. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ γ κ, ἐπιπέδῳ τῷ δ η, τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα καὶ τῆ κέ: τοῦ παρόντος, ὡς ἡ Θ ζ, βάσις πρὸς τὴν γ ζ, βάσιν, οὕτω τὸ Θ δ, στερεὸν, πρὸς τὸ δ γ, στερεόν, ἴση δὲ ἡ μὲν ζ Θ, βάσις τῆ α ε, βάσει, τῷ δὲ η κ, στερεὸν τῷ α β, στερεῷ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ α ε, βάσις πρὸς τὴν γ ζ, βάσιν, οὕτω τὸ α β, στερεὸν, πρὸς τὸ γ δ, στερεόν, τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα. καὶ τὰ ἑξῆς.

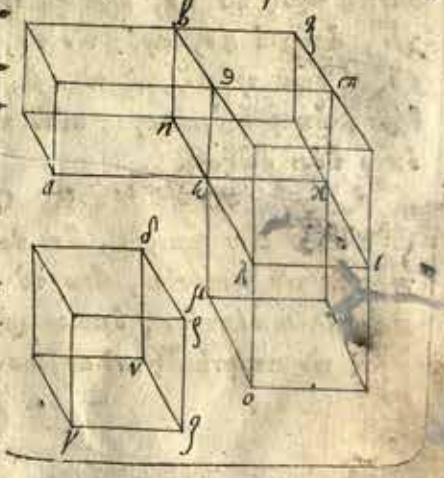
Eucl. Lib. 11. Fig. 26.



Πρότασις ΛΓ΄: Θεώρημα.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ε΄στω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ α β, γ δ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ α ε, τῆ γ ζ. Λέγω, ὅτι τὸ α β, στερεὸν πρὸς τὸ γ δ, στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α ε, πρὸς τὴν γ ζ. Ε΄κβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς α ε, κ ε, Θ ε, αἱ ε κ, ε λ, ε μ. καὶ κείσθω τῆ μὲν γ ζ, ἴση ἡ ε κ, τῆ δὲ ζ ν, ἴση ἡ ε λ, καὶ ἔτι τῆ ζ ρ, ἴση ἡ ε μ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ κ λ, παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ κ ο, στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ε κ, ε λ, δυσὶ ταῖς γ ζ, ζ ν, ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ κ ε λ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γ ζ ν, ἐστὶν ἴση, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ α ε κ, τῇ ὑπὸ γ ζ ν, ἐστὶν ἴση, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν α β, γ δ, στερεῶν, ἴσον ἄρα ἐστὶ



καὶ ὅμοιον τὸ κλ, παραλληλόγραμμον τῷ γν, παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μν, παραλληλόγρ: ἴσόν ἐστι καὶ ὅμοιον τῷ γρ, παραλληλογρ: καὶ ἔτι τὸ οε, τῷ δζ, ἴσα ἄρα παραλληλόγραμ: τῷ κο, στερεῷ, ἴσοι παραλληλογράμ: τῷ γδ, στερεῷ ἔσιν ἴσα τε καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν ἴσα ἴσοι τῶν ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ὅλον ἄρα τὸ κο, στερεὸν ὅλῳ τῷ γδ, στερεῷ ἴσόν ἐστι καὶ ὅμοιον. συμπεπληρώθω τὸ πκ, παραλληλόγραμ: καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῆς πκ, κλ, παραλληλογράμμων, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῇ αβ, στερεὰ συμπεπληρώθω τὰ εξ, λπ, καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῆς αβ, γδ, στερεῶν, ἔστιν ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν γζ, οὕτως ἡ εκ, πρὸς τὴν ζν, καὶ ἡ εθ, πρὸς τὴν ζρ, ἴση δὲ ἡ μὲν ζγ, τῇ εκ, ἡ δὲ ζν, τῇ ελ, ἡ δὲ ζρ, τῇ εμ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αε, πρὸς τὴν εκ, οὕτως ἡ πε, πρὸς τὴν ελ, καὶ ἡ θε, πρὸς τὴν εμ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ αε, πρὸς τὴν εκ, οὕτω τὸ απ, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ πκ, παραλληλόγρ: κατὰ τὴν α': τὸ ς': ὡς δὲ ἡ πε, πρὸς τὴν ελ, οὕτω τὸ πκ, πρὸς τὸ κλ, ὡς δὲ ἡ θε, πρὸς τὴν εμ, οὕτως τὸ πε, πρὸς τὸ κμ, καὶ ὡς ἄρα τὸ απ, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ πκ, οὕτω τὸ πκ, πρὸς τὸ κλ, καὶ πε, πρὸς τὸ κμ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ απ, πρὸς τὸ πκ, οὕτω τὸ αβ, στερεὸν, πρὸς τὸ εζ, στερεόν, ὡς δὲ τὸ πκ, πρὸς τὸ κλ, οὕτω τὸ ξε, στερεὸν πρὸς τὸ πλ, στερεόν, ὡς δὲ τὸ πε, πρὸς τὸ κμ, οὕτω τὸ πλ, στερεὸν πρὸς τὸ κο, στερεόν, καὶ ὡς ἄρα τὸ αβ, στερεὸν πρὸς τὸ εξ, οὕτω τὸ εξ, πρὸς τὸ πλ, καὶ τὸ πλ, πρὸς τὸ κο. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ τὸ συνεχὲς ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δ': ἐπιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ β': καὶ τὸν ι ά: ὅρον τῆς ε: καὶ τὸ αβ, ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ κο, ἐπιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ εξ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ αβ, πρὸς τὸ εξ, οὕτω καὶ τὸ απ, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ πκ, καὶ ἡ αε, πρὸς τὴν εκ, ὥστε καὶ τὸ αβ, στερεὸν πρὸς τὸ κο, ἐπιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ αε, πρὸς τὴν εκ, ἴσον δὲ τὸ μὲν κο, στερεὸν τῷ γδ, στερεῷ, ἡ δὲ εκ, τῇ γζ, καὶ τὸ αβ, ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ γδ, στερ: ἐπιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος αὐτῆς πλευρὰ ἡ αε, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν γζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

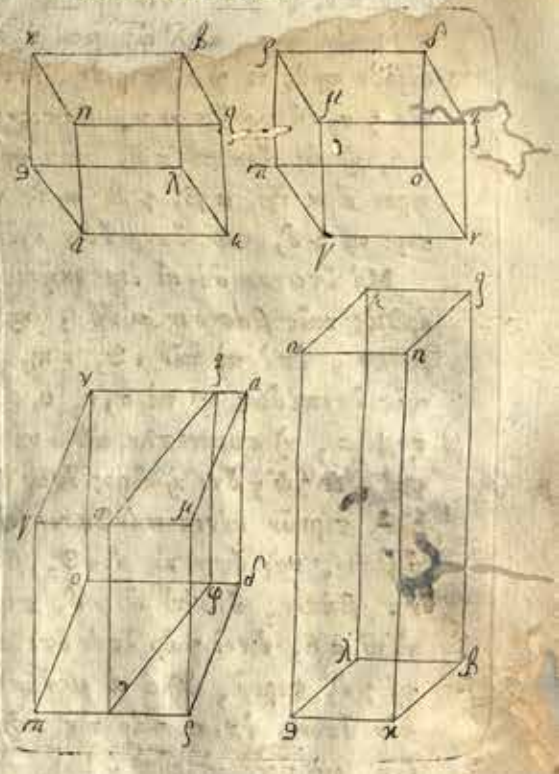
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν. ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας στερεὸν παραλληλεπίπεδον, ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἐπειδὴ περ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην ἐπιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν.

Πρότασις ΛΔ'. Θεώρημα.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπ: τὰ αβ, γδ. Λέγω, ὅτι τῶν αβ, γδ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ἔστιν ὡς ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτω τὸ τῦ γδ, στερεῦ ὕψος πρὸς τὸ τῦ αβ, στερεῦ ὕψος. Ἔστω γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ αη, εζ, λβ, ϑκ, γμ, νξ, οδ, πρ, πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν. Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτως ἡ γμ, πρὸς τὴν αη. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ εϑ, βάσις τῇ νπ, βάσει, ἔστι καὶ τὸ αβ, στερ: τῷ γδ, στερ: ἔσται καὶ ἡ γμ, τῇ αη, ἴση, εἰ γὰρ τῶν εϑ, νπ, βάσεων ἴσων ὄντων, μὴ εἴη τὰ αη, γμ, ὕψη ἴσα, οὐδ' ἄρα τὸ αβ, στερ: τῷ γδ, στερεὸν ἴσον ἔσται. ὑπόκειται δὲ ἴσον, οὐκ ἄρα ἄνισον, τὸ γμ, ὕψος τῷ αη, ὕψει, ἴσον ἄρα, καὶ ἔσται ὡς ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτως ἡ γμ, πρὸς τὴν αη, καὶ φανερὸν, ὅτι τῶν αβ, γδ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. Μὴ ἔστω δὲ ἴση ἡ εϑ, βάσις τῇ νπ, βάσει, ἀλλὰ μείζων. ἔστι δὲ καὶ τὸ αβ, στερεὸν τῷ γδ, στερεῷ ἴσον, μείζων ἄρα καὶ ἡ γμ, τῆς αη. εἰ γὰρ μή, οὐδ' ἄρα πάλιν τὰ αβ, γδ, στερεὰ, ἴσα ἔσται, ὑπόκειται δὲ ἴσα. κείσθω οὖν τῇ αη, ἴση ἡ γτ, καὶ συμπεπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς νπ, ὕψος δὲ τὸ τῦ γτ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ φγ, καὶ ἐπεὶ ἴσόν ἐστι τὸ αβ, στερεὸν τῷ γδ, στερεῷ, ἄλλο δέ τι τὸ φγ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὡς ἄρα τὸ αβ, στερεὸν πρὸς τὸ γφ, στερεὸν οὕτω τὸ γδ, στερεὸν πρὸς τὸ αὐτὸ γφ, στερεόν, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ αβ, στερεὸν πρὸς τὸ γφ, στερεὸν, οὕτως ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, ἰσοῦψῆ γὰρ, κεῖται τὴν λβ: τῷ παρόντι: τὰ αβ, γφ, στερεὰ· ὡς δὲ τὸ γδ, στερ: πρὸς τὸ γφ, στερ: οὕτως ἡ μπ, βάσις πρὸς τὴν πτ, βάσιν, καὶ ἡ μγ, πρὸς τὴν γτ, ὡς ἄρα ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτως ἡ μγ, πρὸς τὴν γτ, ἴσην

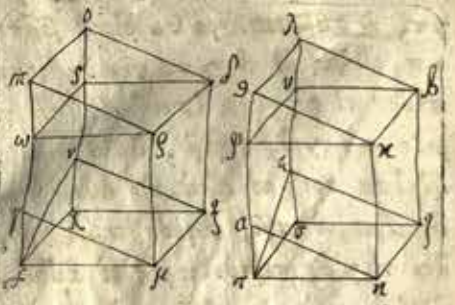
Eucl. Lib. 11. Fig. 27.



ἴση δὲ ἡ γτ, τῇ αν, καὶ ὡς ἄρα ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτως ἡ μγ, πρὸς τὴν αν· τῇ αβ, ἄρα γδ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνϑασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. Πάλιν δὴ τῇ αβ, γδ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονϑέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτω τὸ τῆς γδ, στερεὸν ὕψος πρὸς τὸ τῆς αβ, λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβ, στερ: τῷ γδ, στερ: Ἐκκείσθωσαν γὰρ πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρϑὰς ταῖς βάσεσι, καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ εϑ, βάσις τῇ νπ, βάσει, ἔστιν ὡς εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτω τὸ τῆς γδ, στερεὸν ὕψος πρὸς τὸ τῆς αβ, στερ: ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τῆς γδ, ὕψος τῷ τῆς αβ, στερ: ὕψει. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἴσον ἄρα τὸ αβ, στερεὸν τῷ γδ, στερεῷ. Μὴ ἔστω δὴ ἡ εϑ, βάσις τῇ νπ, ἴση, ἀλλὰ μείζων, μείζον ἄρα καὶ τὸ τῆς γδ, στερεὸν ὕψος τοῦ αβ, στερεοῦ ὕψους, ἔστιν ἡ μγ, τῆς αν, ἴση πάλιν ἡ γτ, καὶ συμπεπληρώϑω ὁμοίως τὸ γφ, στερεόν. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτως ἡ γμ, πρὸς τὴν αν, ἴση δὲ ἡ αν, τῇ γτ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτως ἡ γμ, πρὸς τὴν γτ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτως τὸ αβ, στερεὸν πρὸς τὸ γφ, στερεόν, ἰσοῦψῆ γὰρ τὰ αβ, γφ, στερεά, ὡς δὲ ἡ μγ, πρὸς τὴν γτ, οὕτως ἥτε μπ, βάσις πρὸς τὴν πτ, βάσιν, καὶ τὸ γδ, στερεὸν πρὸς τὸ γφ, καὶ ὡς ἄρα τὸ αβ, στερ: πρὸς τὸ γφ, οὕτω τὸ γδ, στερεὸν πρὸς τὸ γφ, ἑκάτερον ἄρα τῶν αβ, γδ, πρὸς τὸ γφ, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἴσον ἄρα τὸ αβ, στερ: τῷ γδ, στερ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι ζε, βλ, να, κϑ, ξν, δο, μγ, ρπ, πρὸς ὀρϑὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῇ, καὶ ἤχϑωσαν ἀπὸ τῶν ζ, η, β, κ, ξ, μ, δ, ρ, σημείων, ἐπὶ τὰ τῶν εϑ, νπ, βάσεων, ἐπίπεδα κάϑετοι, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ς, ω, σημεῖα, καὶ συμπεπληρώϑω τὰ ζφ, ξω, στερεά. Λέγω, ὅτι καὶ ὅπως ἴσων ὄντων τῶν αβ, γδ, στερεῶν ἀντιπεπόνϑασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, οὕτω τὸ τῆς γδ, στερεὸν ὕψος πρὸς τὸ τῆς αβ, ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ αβ, στερεὸν τῷ γδ, στερεῷ, ἀλλὰ τὸ μὲν αβ, τῷ βτ, ἐστὶν ἴσον, ἐπίπεδος γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ζκ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. ὧν αἱ ἐφεστῶσαι εἰς εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐϑειῶν. τὸ δὲ γδ, στερεὸν τῷ δψ, ἴσον, ἐπίπεδος γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ξρ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι εἰς εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐϑειῶν, καὶ τὸ βτ, ἄρα στερεὸν τῷ δψ, στερεῷ ἴσόν ἐστι, τῶν δ' ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρϑάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν,

Eucl. Lib. 11. Fig. 28.



αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζκ, βάσις πρὸς τὴν ξρ, βάσιν, (ἴση δὲ ἡ μὲν ζκ, βάσις τῇ εϑ, βάσει, ἡ δὲ ξρ, βάσις τῇ νπ,) ὕπω τὸ τῆ δφ, στερεὸν ὕψος, πρὸς τὸ τῆ βτ, ὕψος, τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶν τῆ δφ, βτ, στερεῶν, καὶ τῆ αβ, δγ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, ὕπω τὸ τῆ γδ, στερεὸν ὕψος πρὸς τὸ τῆ αβ, στερεόν· τῆ αβ, γδ, ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. Πάλιν δὴ τῆ αβ, γδ, στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν ὕπω τὸ τῆ γδ, στερεὸν ὕψος πρὸς τὸ τῆ αβ, στερεόν. Λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβ, στερ: τῇ γδ, στερεῷ. τῆ γὰρ αὐτῆ καταγεγράφϑω, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ εϑ, βάσις πρὸς τὴν νπ, βάσιν, ὕπω τὸ τῆ γδ, στερεὸν ὕψος πρὸς τὸ τοῦ αβ, στερεοῦ, ἴση δὲ ἡ μὲν εϑ, βάσις τῇ ζκ, βάσει, ἡ δὲ νπ, τῇ ξρ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζκ, βάσις πρὸς τὴν ξρ, βάσιν, ὕπω τὸ τῆ γδ, στερεὸν ὕψος πρὸς τὸ τῆ αβ, στερεὸν τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῆ αβ, γδ, στερεῶν, καὶ τῆ βτ, δφ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ζκ, βάσις πρὸς τὴν ξρ, βάσιν, ὕπω τὸ τῆ δφ, στερεὸν ὕψος πρὸς τὸ τῆ βτ, στερεοῦ ὕψος, τῶν βτ, δφ, ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα, ἴσον ἄρα τὸ βτ, στερεὸν τῇ δφ, στερεῷ, ἀλλὰ τῇ μὲν βτ, τὸ αβ, ἐστὶν ἴσον· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ζκ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐκ εἰσὶν ἐπὶ τῆ αὐτῶν δϑείων, τὸ δὲ δφ, στερεὸν τῇ γδ, στερεῷ ἴσον ἐστίν, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ξρ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς δϑείαις, τὸ αβ, ἄρα στερεὸν τῇ γδ, στερεῷ ἐστιν ἴσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΛΕ΄: Θεώρημα.

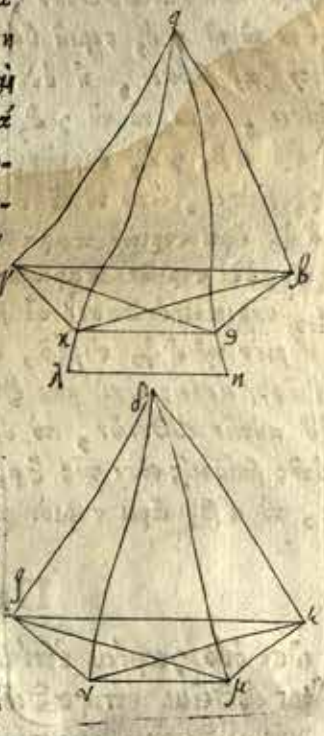
Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῆς κορυφῶν αὐτῆς μετέωροι δϑεῖαι ἐπιζαϑῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῆς ἐξ ἀρχῆς δϑειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρα, ἐπὶ δὲ τῆς μετεώρων ληφϑῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῆς ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάϑετοι ἀχϑῶσιν, ἀπὸ δὲ τῆς γενομένων σημείων ὑπὸ τῆς καθέτων ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχϑῶσιν δϑεῖαι, ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῆς μετεώρου.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι δϑυγράμμοι ἴσαι αἱ ὑπὸ βαγ, εδζ. ἀπὸ δὲ τῶν α, δ, σημείων μετέωροι δϑεῖαι ἐφεστάϑωσαν αἱ αη, δμ, ἴσας περιέχουσαι γωνίας μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς δϑειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν ὑπὸ μδε, τῇ ὑπὸ ηαβ, τὴν δὲ ὑπὸ μδζ, τῇ ὑπὸ ηαγ, καὶ εἰλήφϑωσαν ἐπὶ τῶν αη, δμ, τυχόντα σημεῖα τὰ η, μ, καὶ ἤχϑωσαν ἀπὸ τῶν η, μ, σημείων, ἐπὶ τὰ διὰ τῶν βαγ, εδζ,

ἐπί-

ἐπίπεδα κάθετοι, αἱ ηλ, μν. Λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηαλ, γωνία τῇ ὑπὸ μδν, γωνίᾳ. Κείσθω τῇ δμ, ἴση ἡ αθ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ θ, τῇ ηλ, παράλληλος, ἡ κθ, ἡ δὲ ηλ, κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν βαγ, ἐπίπεδον, καὶ ἡ θκ, ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν βαγ, ἐπίπεδον. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν κ, ν, σημείων ἐπὶ τὰς αβ, αγ, δζ, δε, εὐθείας κάθετοι αἱ κβ, κγ, νζ, νε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θγ, γβ, μζ, ζε. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς θα, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θκ, κα, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς κα, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν κγ, γα, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς θκ, ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ θκ, κγ, γα, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν θκ, κγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς θγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς θα, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θγ, γα, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ θγα, γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ δζμ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αγθ, γωνία τῇ ὑπὸ δζμ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ θαγ, τῇ ὑπὸ μδζ, ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ μδζ, θγα, τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν αθ, τῇ δμ, καὶ τὰς λοιπὰς γ ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἔστιν ἄρα ἡ αγ, τῇ δζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ αβ, τῇ δε, ἴση ἐστίν. ἐπεζεύχθωσαν αἱ θβ, με, καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς αθ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αχ, χθ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αχ, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βχ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, βχ, χθ, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αθ, ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν βχ, χθ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βθ. ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ θχβ, γωνία. διὰ τὸ καὶ τὴν θχ, κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αθ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βθ, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αβθ, γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὑπὸ δεμ, γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαθ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ εδμ, ὑπόκειται γάρ, καὶ ἔστιν ἡ αθ, τῇ δμ, ἴση ἄρα καὶ ἡ αβ, τῇ δε. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αγ, τῇ δζ, ἡ δὲ αβ, τῇ δε, δύο δὴ αἱ αγ, αβ, δυσὶ ταῖς ζδ, δε, ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γαβ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζδε, ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ βγ, βάσει τῇ εζ, ἴση ἐστί, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αγβ, γωνία τῇ ὑπὸ δζε, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ αγκ, ὀρθῇ τῇ ὑπὸ δζν, ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βγκ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ εζν, ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ὑπὸ γβκ, γωνία τῇ ὑπὸ ζεν, ἴση. δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ γβκ, ζεν, τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας

Eucl. Lib. 11. Fig. 29.



ἔχον-

ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν βγ, τῇ εζ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν, ἴση ἄρα ἡ γκ, τῇ ζν, ἔστι δὲ καὶ ἡ αγ, τῇ δζ, ἴση· δύο δὴ αἱ αγ, γκ, δυσὶ ταῖς δζ, ζν, ἴσαι εἰσὶ, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ακ, βάσει τῇ δν, ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αθ, τῇ δμ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αθ, τῷ ἀπὸ τῆς δμ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αθ, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ακ, κθ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ακθ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς δμ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν δν, νμ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ δνμ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ακ, κθ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δν, νμ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ακ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς δν. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κθ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς νμ, ἴση ἄρα ἡ θκ, τῇ νμ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ θα, ακ, δυσὶ ταῖς μδ, δν, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ θκ, βάσει τῇ νμ, ἐδείχθη ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ θακ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ μδν, ἐστὶν ἴση. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι, ἐπισαθῶσι δὲ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, αἱ ἀπ' αὐτῶν καθέτοι, ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσὶν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

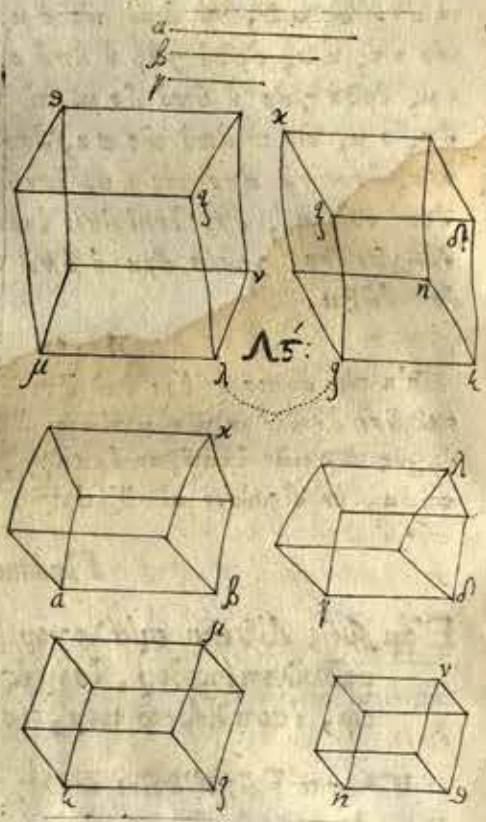
Πρότασις Λς'. Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ εὐθεῖα ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῆς ῥιζῶν εὐθειῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἔστωσαν ξεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον, αἱ α, β, γ, ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ β, πρὸς τὴν γ. Λέγω, ὅτι τὸ ἐκ τῶν αβγ, στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ ε, περιεχομένη ὑπὸ ξιῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, τῶν ὑπὸ δεκ, κεζ, ζεδ, καὶ κείσθω τῇ μὲν β, ἴση ἑκάστη τῶν δε, κε, εζ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ εκ, στερεὸν παραλληλεπ: τῇ δὲ α, κείσθω ἴση ἡ λμ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ λμ, εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῷ λ, τῇ πρὸς τῷ ε, στερεᾷ γωνίᾳ ἴση, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν νλξ, ξλμ, μλν, καὶ κείσθω τῇ μὲν β, ἴση ἡ λξ, τῇ δὲ γ, ἴση ἡ λν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α, πρὸς τὴν β, οὕτως ἡ β, πρὸς τὴν γ, ἴση δὲ ἡ μὲν α, τῇ λμ, ἡ δὲ β, ἑκάστη τῶν λξ, εζ, εκ, εδ, ἡ δὲ γ, τῇ λν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ λμ, πρὸς τὴν εζ, οὕτως ἡ δε, πρὸς τὴν λν, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ μλν, δεζ, αἱ πλευραὶ αὐτιπεπόνθασιν. ἴσον ἄρα τὸ μν, παραλληλόγραμ: τῷ δζ, παραλληλογράμ: καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι, εἰσὶν ἴσαι, αἱ ὑπὸ δεζ, νλμ, καὶ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστήκασιν αἱ λξ, εκ, ἴσαι τε ἀλλήλαις, καὶ ἴσας γωνίας

περιέχεσαι μιᾷ τῶν ἐξ ἀρχῆς δοθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν ηξ, σημείων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν νλ μ, δε ζ, ἐπίπεδα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὥστε τὰ λϑ, εκ, στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστί. καὶ κεῖται τὰ λά. ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἴσον ἄρα τὸ ϑλ, στερεὸν τῷ εκ, στερεῷ, καί ἐστι τὸ μὲν ϑλ, τὸ ἐπὶ τῶν α, β, γ, στερεὸν, τὸ δὲ εκ, τὸ ἀπὸ τῆς β, στερεὸν, τὸ ἄρα ἐκ τῶν α, β, γ, στερεὸν, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς β, στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. Ἐὰν ἄρα ᾖ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπ: ἴσον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Euel. Lib. 11. Fig. 30.



Πρότασις ΛΖ'. Θεώρημα.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν παραλληλεπίπεδα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται, καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ α β, γ δ, ε ζ, η ϑ, ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η ϑ. καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν α β, γ δ, ε ζ, η ϑ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα παραλληλεπίπεδα τὰ κ α, λ γ, με, νη. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ κ α, πρὸς τὸ λ γ, οὕτως τὸ με, πρὸς τὸ νη. Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶ τὸ κ α, στερεὸν παραλληλεπ: τῷ λ γ, ὅμοιον, τὸ κ α, ἄρα πρὸς τὸ λ γ, ἐξπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ με, πρὸς τὸ νη, ἐξπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η ϑ, καί ἐστιν ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η ϑ, ὡς ἄρα τὸ α κ, πρὸς τὸ λ γ, οὕτω τὸ με, πρὸς τὸ νη. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ α κ, στερεὸν πρὸς τὸ λ γ, στερεὸν, οὕτω τὸ με, στερεὸν πρὸς τὸ νη, στερεόν. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ α β, εὐθεῖα πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η ϑ. ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ α κ, πρὸς τὸ λ γ, ἐξπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, ἔχει δὲ καὶ τὸ με, πρὸς τὸ νη, ἐξπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η ϑ, καί ἐστιν ὡς τὸ α κ, πρὸς τὸ λ γ, οὕτω τὸ με, πρὸς τὸ νη, καὶ ὡς ἄρα ἡ α β, πρὸς τὴν γ δ, οὕτως ἡ ε ζ, πρὸς τὴν η ϑ. Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

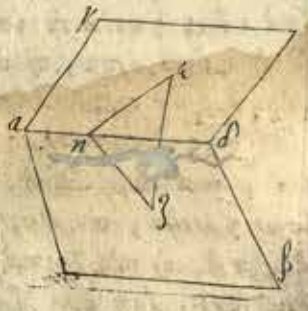
Πρό-

Πρότασις ΛΗ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ ἑνὸς τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων πεσεῖται ἡ ἀγομένη κάθετος.

Ἐπίπεδον γὰρ τὸ γδ, ἐπιπέδῳ τῷ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ αδ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆ γδ, ἐπιπέδῳ τυχὸν σημεῖον τὸ ε. Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ ε, ἐπὶ τὸ αβ, ἐπίπεδον ἀγομένη κάθετος ἐπὶ τῆς δα, πεσεῖται. μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, πιπτέτω ἐκτὸς, ὡς ἡ εζ, καὶ συμβαλλέτω τῷ αβ, ἐπιπέδῳ, κατὰ τὸ ζ, σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὴν δα, τῷ αβ, ἐπιπέδῳ κάθετος ἤχθω ἡ ζη, ἥτις καὶ τῷ γδ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εη. Ἐπεὶ οὖν ἡ ζη, τῷ γδ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ εη, οὖσα ἐν τῷ γδ, ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ζηε, γωνία. ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ εζ, τῷ αβ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἡ ἄρα ὑπὸ εζη, ὀρθή ἐστι. ξιγώνου δὴ τοῦ εζη, αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν ιζ'. τοῦ ά. οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ ε, ἐπὶ τὸ αβ, ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς δα, ἐπὶ τὴν δα, ἄρα πεσεῖται. Ἐὰν ἄρα ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων, ἡ ἀγομένη κάθετος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 11. Fig. 31.



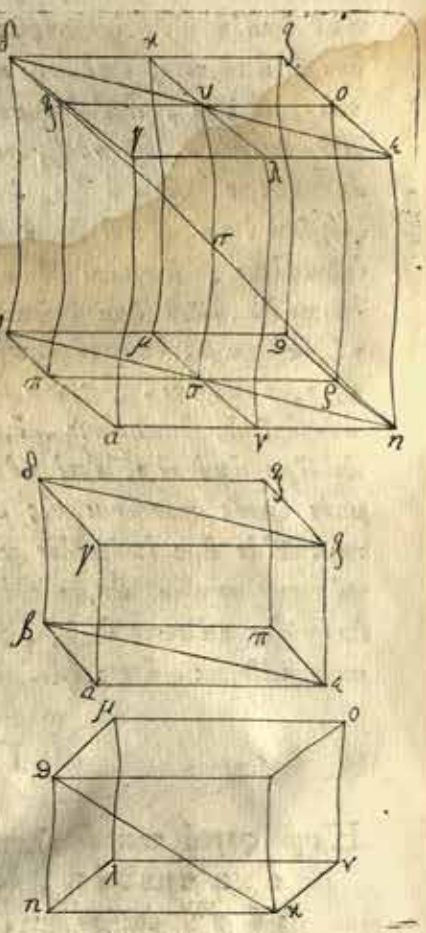
Πρότασις ΛΘ'. Θεώρημα.

Ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τοῦ ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἡ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου τοῦ αζ, τοῦ ἀπεναντίον ἐπιπέδων τοῦ γν, αθ, αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ κ, λ, μ, ν, ξ, π, ο, ρ, σημεῖα. διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ κη, ξρ, κοινὴ δὲ τοῦ ἐπιπέδου τομὴ ἔστω ἡ υσ, τοῦ δὲ αβ, στερεοῦ παραλληλεπιπ: διαγώνιος ἡ δη. Λέγω, ὅτι αἱ υσ, δη, δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν υτ, τῇ τσ, ἴση ἐστὶν, ἡ δὲ

ἡ δὲ δτ, τῇ τη. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ δυ, υε, βσ, ση, καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ δξ, τῇ οε, αἱ ἐναλλὰξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ δξυ, υοε, ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν δξ, τῇ εο, ἡ δὲ ξυ, τῇ υο, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ δυ, βάσει τῇ υε, ἴση ἐστί. τὸ δὲ δξυ, τρίγωνον τῷ υοε, τριγώνῳ ἴσόν ἐστι. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ξυδ, γωνία τῇ ὑπὸ ουε. διὰ τοῦτο διπλασιάσιόν ἐστιν ἡ δυε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ βση, διπλασιάσιόν ἐστι, καὶ ἴση ἡ βσ, τῇ ση, καὶ ἐπεὶ ἡ γα, τῇ δβ, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. ἀλλ' ἡ γα, τῇ εη, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς διπλασιάσιαι αἱ δε, ηβ, παράλληλος ἄρα ἡ δε, τῇ ηβ, καὶ εἰλήφται ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ δ, υ, η, σ, καὶ ἐπεζεύχθησαν αἱ δη, υσ, καὶ κῇ τὴν ζ': τοῦ παρόντος, ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ αἱ δη, υσ, καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ δε, τῇ βη, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ εδτ, γωνία τῇ ὑπὸ βητ, ἐναλλὰξ γάρ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ δτυ, τῇ ὑπὸ ητσ, ἴση, κατὰ κορυφὴν γάρ, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ δτυ, ητσ, τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν δυ, τῇ ησ, ἡμίσειαι γάρ εἰσι τῶν δε, ηβ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει. ἴση ἄρα ἡ μὲν δτ, τῇ τη, ἡ δὲ υτ, τῇ στ. Ἐὰν ἄρα στερεὸν παραλληλεπ: καὶ τὰ ἑξῆς.

Eucl. Lib. 11. Fig. 32.



Πρότασις Μ': Θεώρημα.

Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τριγώνιον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἔστω πρίσματα ἰσοῦψῆ τὰ αβγδεζ, ηθκλμν, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ αζ, παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ, τὸ ηθκ, τρίγωνον. διπλάσιον ἔστω τὸ αζ, παραλλ: τοῦ ηθκ, τριγώνου. Λέγω, ὅτι ἴσόν ἐστι τὸ αβγδεζ, πρίσμα τῷ ηθκλμν, πρίσματι. Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ αξ, ηο, στερεά. καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ αζ, παραλληλόγρ: τοῦ ηθκ, τριγώνου, ἔστι δὲ καὶ τὸ θκ, παραλληλόγρ: διπλάσιον τοῦ ηθκ, τριγ: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αζ, παραλληλόγραμ: τῷ θκ,

ϑκ, παραλληλογρ: τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ τὴν λά: ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ. ἴσον ἄρα τὸ αξ, στερεὸν τῷ ηο, στερεῷ, καὶ ἔστι τὸ αξ, στερεὸν ἥμισυ τοῦ αβγδεζ, πρίσματος, τὸ δὲ ηο, στερεὸν ἥμισυ τοῦ ηϑκλμν, πρίσματος, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγδεζ, πρίσμα τῷ ηϑκλμν, πρίσματι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ Ἑνδεκάτου τῶν εἰς Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΩΔΕΚΑΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΟΥ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΣΤΕΡΕΟΥ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

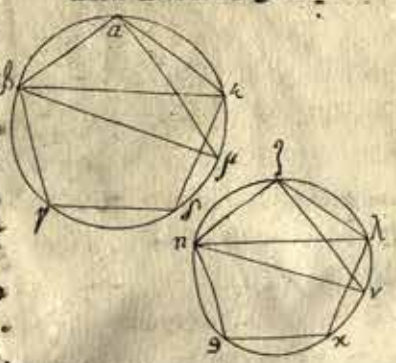
Πρότασις Α΄. Θεώρημα.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς τὰ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ αβγδε, ζηθκλ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ αβγδε, ζηθκλ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ βμ, ην. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βμ, τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ην, τετράγωνον, οὕτω τὸ αβγδε, πολύγωνον πρὸς τὸ ζηθκλ, πολύγωνον.

Εὐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βε, αμ, ηλ, ζν, καὶ ἐπεὶ καὶ τὸν α΄. τῶν ς΄. ὅρον, ὅμοιόν ἐστι τὸ αβγδε, πολύγωνον τῷ ζηθκλ, πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ βαε, γωνία τῇ ὑπὸ ηζλ, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αε, οὕτως ἡ ζη, πρὸς τὴν λζ, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ βαε, ηζλ, μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ βαε, τῇ ὑπὸ ηζλ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβε, τρίγωνον τῷ ζηλ, τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ αεβ, γωνία τῇ ὑπὸ ζλη, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ αεβ, τῇ ὑπὸ αμβ, ἴση ἐστὶ καὶ τὴν κ΄. τῶν γ΄: (ἐπὶ τῆς αὐτῆς γὰρ περιφερείας βεβήκασιν), ἡ δὲ ὑπὸ ζλη, τῇ ὑπὸ ζνη, καὶ ἡ ὑπὸ αμβ, ἄρα τῇ ὑπὸ ζνη, ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ αμβ, ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ηζν, καὶ τὴν λ΄. τῶν αὐτῶν, ἴση, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα τὸ αμβ, τρίγωνον τῷ ζην, τριγώνῳ· καὶ καὶ τὴν δ΄. τῶν ς΄. ἀνάλογον, ἄρα ὡς ἡ βμ, πρὸς τὴν ην, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν ηζ, ἀλλὰ τῆς μὲν τῆς βμ, πρὸς τὴν ην, λόγος διπλασίων ἐστὶν ὁ τῆς ἀπὸ τῆς βμ, τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ην, τετράγωνον· καὶ τὴν ιθ΄. τῶν ς΄. τῆς δὲ ἀπὸ τῆς βα, πρὸς τὴν ηζ, διπλασίων ἐστὶν, ὃ τῆς αβγδε, πολυγ. πρὸς τὸ ζηθκλ, πολύγων. καὶ τὴν κ΄. τῶν

Eucl. Lib. 12. Fig. 1.



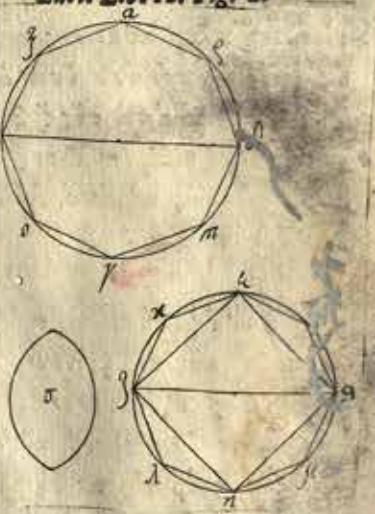
τῷ αὐτῷ, καὶ κῦ τλω ιά: τὸ ε: ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βμ, τετράγωνον: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ην, ὅπερ τὸ αβγδε, πολύγ: πρὸς τὸ ζηθκλ, πολύγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Β': Θεώρημα.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

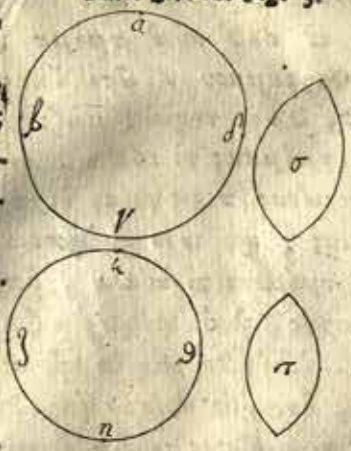
Ἔστωσαν κύκλοι οἱ αβγδ, εζηθ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔστωσαν αἱ βδ, ζθ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετρ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, ὅπως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετρ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, ὅπως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετράγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, ὅπως ὁ αβγδ, κύκλ: ἤτοι πρὸς ἔλασσόντι τὸ εζηθ, κύκλε χωρίον, ἢ πρὸς μεῖζον. Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ σ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εζηθ, κύκλον τετράγωνον τὸ εζηθ, τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον τετράγ: ἢ μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ εζηθ, κύκλε. ἐπεὶδήπερ ἐὰν διὰ τῶν εζηθ, σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλε διαγάγωμεν, τὸ περιγραφόμενον περὶ τὸν κύκλον τετραγώνε ἥμισύ ἐστι τὸ εζηθ, τετράγ: τὸ δὲ περιγραφόμενον τετράγωνε ἔλασσόν ἐστι ὁ κύκλος, ὥστε τὸ εζηθ, ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ εζηθ κύκλου. Τετμήσθωσαν δίχα αἱ εζ, ζη, ηθ, θε, περιφέρειαι κῦ τὰ κ, λ, μ, ν, σημεῖα. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ εκ, κζ, ζλ, λη, ημ, μθ, θν, νε, καὶ ἕκασον ἄρα τῶν εκζ, ζηλ, ημθ, καὶ θνε, τριγώνων μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλε. Ἐπεὶδήπερ ἐὰν διὰ τῶν κ, λ, μ, ν, σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλε ἀγάγωμεν, καὶ κῦ τὰν μά: τοῦ ά: ἀναπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν εζ, ζη, ηθ, θε, εὐθειῶν παραλληλόγραμμα, ἕκασον τῶν εκζ, ζλη, ημθ, θνε, τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμε· ἀλλὰ τὸ καθ' αὑτὸ τμῆμα, ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου. ὥστε ἕκασον τῶν εκζ, ζλη, ημθ, θνε, τριγώνων: μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' αὑτὸ τμήματος τοῦ κύκλε. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα τμήματα τοῦ κύκλε, ἅπερ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ὁ εζηθ, κύκλος τοῦ σ, χωρίου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῇ ά: θεωρήματι τοῦ δεκάτε, ὅτι δύο ἀνίσων μεγεθῶν ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος μεῖζον ἀφαιρεθῇ, ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον, ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον

Eucl. Lib. 12. Fig. 2.



λαττον τῆ ἐκκειμένου ἐλάττονος μεγέθους. λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῆς εκ, κζ, ζλ, λη, ημ, μθ, θν, νε, τμήματα τῆ εζ ηθ, κύκλε, ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ὁ εζ ηθ, κύκλος τῆ σ, χωρίε, λοιπὸν ἄρα τὸ εκζλημθν, πολύγων: μεῖζόν ἐστι τῆ σ, χωρίε. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν αβγδ, κύκλον τῷ εκζλημθν, πολυγώνῳ, ὅμοιον πολύγωνον τὸ αξβογπδρ, καὶ τὸν ἀνωτέρω, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετράγων: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, τετράγωνον, οὕτω τὸ αξβογπδρ, πολύγ: πρὸς τὸ εκζλημθν, πολυγ: καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετράγ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸ σ, χωρίον. καὶ ὡς ἄρα ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸ σ, χωρίον, οὕτω τὸ αξβογπδρ, πολύγ: πρὸς τὸ εκζλημθν, πολύγ: καὶ ἐναλλὰξ ἄρα καὶ τὸν ις': τῶ ε': ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτω τὸ σ, χωρίον, πρὸς τὸ εκζλημθν, πολύγ: μείζων δὲ ὁ αβγδ, κύκλος τῆ ἐν αὐτῷ πολυγ: μεῖζον ἄρα καὶ τὸ σ, χωρίον τῆ εκζλημθν, πολυγ: ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδυνατον. οὐκ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τετρ: πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, τετρ: οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τῆ εζ ηθ, κύκλε χωρίον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, οὕτως ὁ εζ ηθ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τῆ αβγδ, κύκλε χωρίον. Λέγω ὅτι οὐδ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τῆ εζ ηθ, κύκλε χωρίον. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω πρὸς τὸ σ, ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶ, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, οὕτω τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον. ἀλλ' ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον, οὕτως ὁ εζ ηθ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τῆ αβγδ, κύκλε χωρίον. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, οὕτως ὁ εζ ηθ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τῆ αβγδ, κύκλε χωρίον, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλ: πρὸς μεῖζόν τι τῆ εζ ηθ, κύκλε χωρίον. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδ' ὡς πρὸς ἔλαττόν τι. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζθ, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τι εζ ηθ, κύκλον. Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. Lib. 12. Fig. 3.



ΛΗΜΜΑ.

Λέγω δὴ, ὅτι τῆ σ, χωρίε μείζονος ὄντος τῆ εζ ηθ, κύκλε, ἔστιν ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον, οὕτως ὁ εζ ηθ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τῆ αβγδ, κύκλε χωρίον. γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλ: οὕτως ὁ εζ ηθ, κύκλος πρὸς τὸ τ, χωρίον. Λέγω ὅτι ἔλαττόν ἐστι τὸ τ, χω-

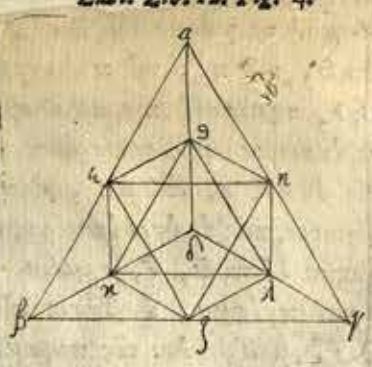
χωρίον τῷ αβγδ, κύκλῳ, ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον, οὕτως ὁ εζηθ, κύκλ: πρὸς τὸ τ, χωρίον, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα, καὶ τῶν ις': τῷ ε: ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον· οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸ τ, χωρίον, μεῖζον δὲ τὸ σ, τοῦ εζηθ, κύκλου, μεῖζων ἄρα καὶ ὁ αβγδ, κύκλος τοῦ τ, χωρίου. ὥστε ὡς τὸ σ, χωρίον πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον, οὕτως ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδ, κύκλου χωρίον.

Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἔστω πυραμὶς μὲν, ἧς βάσις μὲν τὸ αβγ, τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον. Λέγω, ὅτι ἡ αβγδ, πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας, καὶ τῇ ἐξῆς. Τετμήθωσαν γὰρ αἱ αβ, βγ, γα, αδ, δβ, δγ, δίχα κατὰ τὰ ε, ζ, η, θ, κ, λ, σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εθ, εη, ηθ, θκ, κλ, λθ, εκ, κζ, ζη, ζλ, λη, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αε, τῇ εβ, ἡ δὲ αθ, τῇ θδ, καὶ τῶν β': ἄρα τὸ ς': παράλληλός ἐστιν ἡ εθ, τῇ βδ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ θκ, τῇ αβ, παράλληλός ἐστιν, παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ θεβκ, καὶ κατὰ τὴν λδ': ἄρα τὸ ά: ἴση ἐστὶν ἡ θκ, τῇ εβ, ἀλλ' ἡ εβ, τῇ αε, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ αε, ἄρα τῇ θκ, ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ αθ, τῇ θδ, ἴση. δύο δὴ αἱ αε, αθ, δυσὶ ταῖς κθ, θδ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ κατὰ τὴν κθ: τῷ ά: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αεθ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ θκδ, ἴση, καὶ βάσις ἄρα ἡ εθ, βάσει τῇ κδ, ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ αεθ, τρίγ: τῷ θκδ, τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ αθη, τρίγ: τῷ θλδ, τριγ: ἴσόν τε ἐστὶ καὶ ὅμοιον. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἅπτόμεναι ἀλλήλων περὶ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, παρέσιν αἱ εκ, κζ, περὶ τὰς κδ, δλ, εἰσὶν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέχουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ εθη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ κδλ, γωνία· καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ εθ, θη, δυσὶ ταῖς κδ, δλ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ εθη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ κδλ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὴν ἡ: ἄρα τὸ ά: τῷ ἐπιπέδων, καὶ βάσις τοῦ εθη, τριγ: ἡ εη, βάσει τῷ κδλ, ἴση: τῇ κλ, ἴση, καὶ ὅλον τὸ ξίγωνον ὅλῳ τῷ τριγώνῳ ἴσόν τε καὶ ὅμοιον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ αεη, τρίγ: τῷ θκλ, τριγ: ἴσόν τε καὶ ὅμοιόν ἐστιν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ αεη, ξίγ: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ θκλ, ξίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον. καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς δ': τῶν ς': ἐπεὶ ξιγώνου τοῦ σ, δ β,

Eucl. Lib. 12. Fig. 4.



α δ β, παρὰ μίαν τῶν αὐτῶν πλευρῶν τὴν α β, ἤκται ἡ θ κ, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ α δ β, τρίγ: τῷ δ θ κ, τριγ: καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ὅμοιον ἄρα τὸ α δ β, τρίγ: τῷ δ θ κ, τριγ: διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν δ β γ, τρίγ: τῷ δ κ λ, τριγ: ὅμοιόν ἐστι. τὸ δὲ α δ γ, τῷ δ θ λ, τριγ: καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ α β, α γ, καὶ τλω ι ε: τῶ α: τῷ ϛερ: περὶ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς κ θ, θ λ, εἰσὶν, ἴσας γωνίας περιέχασιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ β α γ, τῇ ὑπὸ κ θ λ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ β α, πρὸς τὴν α γ, οὕτως ἡ κ θ, πρὸς τὴν θ λ, ὅμοιον ἄρα τὸ α β γ, τρίγων: τῷ θ κ λ, τετ: καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ α β γ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ θ κ λ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ἀλλ' αὕτη ἐδείχθη ὁμοία πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ α ε η, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημεῖον. ὥστε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ α β γ, κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ α ε η, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημεῖον. ἑκατέρα ἄρα τῶν α ε η θ, θ κ λ δ, πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ α β γ δ, πυραμίδι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ β ζ, τῇ ζ γ, διπλάσιόν ἐστι καὶ τὸν μα: τῶ α: τὸ ε β ζ η, παραλληλόγραμμον τῷ η ζ γ, τετ: καὶ τὸν μ: τῷ παρελθόντος, ἄρα ἴσόν ἐστι τὸ περιεχόμενον πρίσμα ὑπὸ δύο μὲν τετ γώνων τῶν β κ ζ, ε θ η, τετ ῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ε β ζ η, ε β κ θ, η θ κ ζ, τῷ περιεχομένῳ πρίσματι ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν η ζ γ, θ κ λ, τετ ῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν κ ζ γ λ, λ γ η θ, θ κ ζ η. καὶ φανερὸν, ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, ὧν τε βάσις τὸ ε β η ζ, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ ἡ θ κ, εὐθεῖα, καὶ ὧν βάσις τὸ η ζ γ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ κ λ θ, τρίγωνον, μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ α ε η, θ κ λ, τριγ: κορυφαὶ δὲ τὸ θ, δ, σημεῖα. ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ε ζ, ε κ, εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, ὧν βάσις τὸ ε β ζ η, παραλληλόγραμ: ἐπεναντίον δὲ ἡ θ κ, εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ε ζ β, τρίγων: κορυφὴ δὲ τὸ κ, σημεῖον. ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ε β ζ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ κ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ α ε η, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ἴσων, καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται. ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, ὧν βάσις μὲν τὸ ε β ζ η, παραλληλόγραμ: ἀπεναντίον δὲ ἡ θ κ, εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ α ε η, τρίγων: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημ: ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, ὧν βάσις μὲν τὸ ε β ζ η, παραλληλόγρ: ἀπεναντίον δὲ ἡ θ κ, τῷ πρίσματι, ὧν βάσις μὲν τὸ η ζ γ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ θ κ λ, τρίγ: ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ α ε η, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ θ, σημ: ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ θ κ λ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημ: τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα, μεῖζονά ἐστι τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ α ε η, θ κ λ, τρίγ: κορυφαὶ δὲ τὰ θ, δ, σημ: ἡ ἄρα ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ α β γ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημ: διῄρηται εἰς δύο πυραμίδας, ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ ἑξῆς.

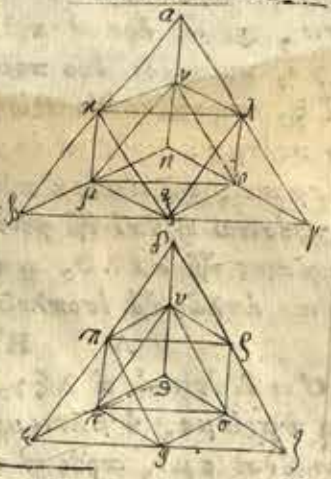
Πρό-

Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἐχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑτέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γεγομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον μεροῦται διῃρημένη, καὶ τοῦτο ἀεὶ γένηται, ἔστιν ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτω καὶ τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα, πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Ἐστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους βάσεις ἐχουσαι τὰς αβγ, δεζ, κορυφὰς δὲ τὰ η, θ, σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ τὰ ἐξῆς, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω. Λέγω, ὅτι ἔστιν ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτω τὰ ἐν τῇ αβγη, πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

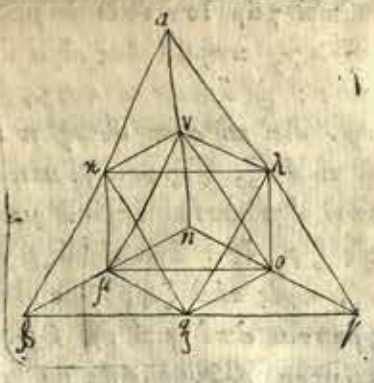
Euel. Lib. 12. Fig. 5.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν βξ, τῇ ξγ, ἡ δὲ αλ, τῇ λγ, παράλληλος ἄρα ἡ ξλ, τῇ αβ, καὶ τὸ β': τὸ ς': καὶ ὅμοιον τὸ αβγ, τριγωνον τῷ λξγ, τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ πόρισμα τῆς δ': τῷ αὐτῷ, καὶ τὸ δεζ, τριγωνον, ὅμοιόν ἐστι τῷ ρφζ, τριγώνῳ, καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν βγ, τῆς γξ, ἡ δὲ εζ, τῆς ζφ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν γξ, οὕτως ἡ εζ, πρὸς τὴν ζφ, καὶ τὸ ι β': τῷ αὐτῷ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῆς βγ, γξ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ αβγ, λξγ, ἀπὸ δὲ τῆς εζ, ζφ, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ δεζ, ρφζ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ αβγ, τριγωνον πρὸς τὸ λξγ, τριγωνον, οὕτω τὸ δεζ, πρὸς ρφζ, τρίγ: καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ αβγ, πρὸς τὸ δεζ, οὕτω τὸ λξγ, πρὸς τὸ ρφζ. πάλιν δὲ ἐπεὶ ἀλλ' ὡς τὸ λξγ, τρίγ: πρὸς τὸ ρφζ, οὕτω τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ λξγ, τριγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ομν, ὡς ἐφεξῆς δειχθήσεται, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ρφζ, τριγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ στυ, καὶ ὡς ἄρα τὸ αβγ, τριγωνον πρὸς τὸ δεζ, τρίγ: οὕτω τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ λξγ, τριγων: ἀπεναντίον δὲ τὸ ομν, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ρφζ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ στυ. καὶ ἐπεὶ, καθ' ὁμοιότητα τῶν ἐν τῇ αβγη, πυραμίδι δύο πρίσματα, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ τὰ ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι πρίσματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ κλξβ, παραλληλόγρ: ἀπεναντίον δὲ ἡ μο, εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ λξγ, τρίγωνον ἀπεναντίον

δὲ τὸ ομν, ἔπω τὸ ϖρίσμα, ἧ βάσις μὲν τὸ επρφ, παραλληλόγρ: ἀπεναντίον δὲ ἡ στ, εὐθεῖα, ϖρὸς τὸ ϖρίσμα, ἧ βάσις μὲν τὸ ρφζ, ξίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ στυ, συμπεσόντα ἄρα, ὡς τὰ κβξλμο, λξγμνο, πείσματα ϖρὸς τὸ λξγμνο, πεῖσμα, ἔπω τὰ πεφρστ, ρφζστυ, πείσματα ϖρὸς τὸ ρφζστυ, πεῖσμα, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὰ κβξλμο, λξγομν, ϖρὸς τὰ πεφρστ, ρφζστυ, πείσματα, ἔπω τὸ λξγμνο, πεῖσμα ϖρὸς τὸ ρφζστυ, πεῖσμα. ὡς δὲ τὸ λξγμνο, πεῖσμα, ϖρὸς τὸ ρφζστυ, πεῖσμα, ἔπως ἐδείχθη ἡ λξγ, βάσις ϖρὸς τλῳ ρφζ, βάσιν, καὶ ἡ αβγ, βάσις ϖρὸς τλῳ δεζ, βάσιν, καὶ ὡς ἄρα τὸ αθγ, ξίγ: ϖρὸς τὸ δεζ, ξίγ: ἔπω τὰ ἐν τῇ αβγη, ϖυραμίδι δύο πείσματα ϖρὸς τὰ ἐν τῇ δεζθ, ϖυραμίδι δύο πείσματα. ὁμοίως δὴ κἂν τὰς γενομένας ϖυραμίδας διέλωμεν, τὸν αὐτὸν τρόπον, οἷον τὰς ομνη, στυθ, ἔσαι ὡς ἡ ομν, βάσις ϖρὸς τλῳ στυ, βάσιν, ἔπω τὰ ἐν τῇ ομνη, ϖυραμίδι δύο πείσματα ϖρὸς τὰ ἐν τῇ στυθ, ϖυραμίδι δύο πείσματα. ἀλλ' ὡς ἡ ομν, βάσις ϖρὸς τλῳ στυ, βάσιν, ἔπως ἡ αβγ, βάσις ϖρὸς τλῳ δεζ, βάσιν, καὶ ὡς ἄρα ἡ αβγ, βάσις ϖρὸς τλῳ δεζ, βάσιν, ἔπω καὶ τὰ ἐν τῇ αβγη, ϖυραμίδι δύο πείσματα, ϖρὸς τὰ ἐν τῇ δεζθ, ϖυραμίδι δύο πείσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ ομνη, δύο πείσματα, ϖρὸς τὰ ἐν τῇ στυθ, ϖυραμίδι δύο πείσματα, καὶ τέσσαρα ϖρὸς τέσσαρα. Τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πεισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῆς ακλθ, καὶ δπρυ, ϖυραμίδων, καὶ ϖάντων ἁπλῶς τῶν ἰσοπλήθων.

Euclid. Lib. 12. Fig. 6.



ΛΗ ΜΜΑ.

Ὅτι δέ ἐστιν ὡς τὸ λξγ, ξίγ: ϖρὸς τὸ ρφζ, ξίγ: ἔπω τὸ πείσμα, ἧ βάσις μὲν τὸ λξγ, ξίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ ομν, ϖρὸς τὸ πείσμα, ἧ βάσις μὲν τὸ ρφζ, ξίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ στυ, ἔπω δεικτέον. Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς γεγονέτω ἀπὸ τῆς ηθ, καθετοι ἐπὶ τὰ αβγ, δεζ, ξίγ: ἐπίπεδα, ἴσαι δηλ: (διὰ τὸ ἰσοῦψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς ϖυραμίδας) τυγχάνουσαι. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ϖερ ηγ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ η, καθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν αβγ, ομν, τέμνονται, εἰς τὰς αὐτὰς λόγους, καὶ τὴν ιζ: τὰ ϖαρεληλυθότα, τμηθήσονται, καὶ τέτμηται ἡ ηγ, δίχα ὑπὸ τοῦ ομν, ἐπιπέδου καὶ τοῦ ο, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ η, ἄρα καθετος ἐπὶ τὸ αβγ, ἐπίπεδον, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ομν, ἐπιπέδου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ θ, καθετος ἐπὶ τὸ δεζ, ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ στυ, ἐπιπέδου, καί εἰσιν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν η, θ, καθετοι ἐπὶ τὰ αβγ, δεζ, ἐπίπεδα, ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν ομν, στυ, ξίγ: ἐπὶ τὰ αβγ, δεζ, καθετοι, ἰσοῦψῆ ἄρα ἐστὶ τὰ πείσματα, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ λξγ, ρφζ, ξίγων: ἀπεναντίον δὲ τὰ ομν, στυ, ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων

ων

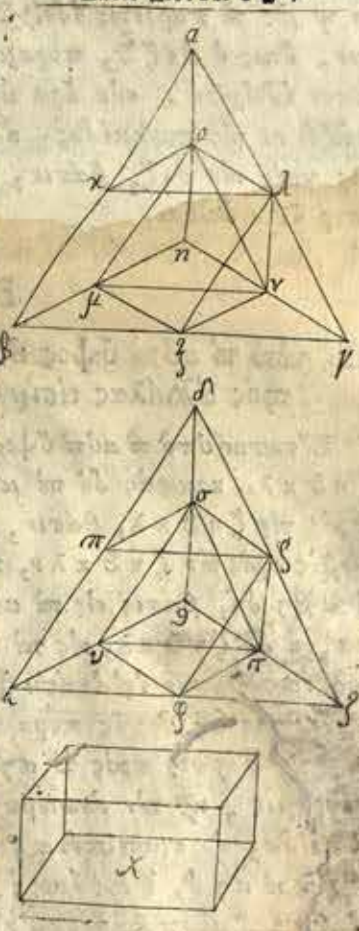
νων πρισμάτων ἀναγραφόμενα, ἰσοῦψῆ τυγχάνοντα, καὶ τὴν λβ′: τὰ αὐτὰ, πρὸς ἄλληλά ἐσιν ὡς αἱ βάσεις, καὶ τὰ ἥμισυ ἄρα ἔσαι, ὡς ἡ λξγ, βάσις πρὸς τὴν ρφζ, βάσιν, ὅπως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ε′: Θεώρημα.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ βάσεις.

Ἐκ τωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ αβγ, δεζ, τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ η, θ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι ἐσὶν ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, ὕπως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς τὴν δεζθ, πυραμίδα. εἰ γὰρ μὴ, ἔσαι ὕπως, ὥσε ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, ὕπως ἡ αβγη, πυραμὶς, ἤτοι πρὸς ἔλατόν τι τῆς δεζθ, πυραμίδος σερεὸν, ἢ πρὸς μεῖζον. ἔσω πρότερον πρὸς ἔλατον τὸ χ. καὶ διηρήθω ἡ δεζθ, πυραμὶς, καὶ τὴν γ′: τὰ παράντος εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά τε, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γιγνόμεναι πυραμίδες διηρήθωσαν ὁμοίως, καὶ τὸ μὲν γινέσθω, ἕως ἃ λειφθῶσί τινες πυραμίδες, ἀπὸ τῆς δεζθ, πυραμίδος, αἵ εἰσὶν ἐλάσσες τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ἡ δεζθ, πυραμὶς τὸ χ, σερεόν. λελείφθωσαν καὶ ἔσωσαν, λόγου χάριν, αἱ δπρσ, στυθ, λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐσι τοῦ σερεοῦ χ. διηρήθω καὶ ἡ αβγη, ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ δεζθ, πυραμίδι: ἔσιν ἄρα καὶ τὴν αὐτὴν, ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτω τὰ ἐν τῇ αβγη, πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι, ἀλλ' ὡς αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς τὸ χ, σερεὸν, καὶ ὡς ἄρα ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς τὸ χ, σερεὸν, ὕτω τὰ ἐν τῇ αβγη, πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι πρίσματα, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα, οὕτω τὸ χ, σερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ δεζθ, πυραμίδι πρίσματα, μεῖζον δὲ ἡ αβγη, πυραμὶς τοῦ ἐν αὐτῇ πρισμάτων, μεῖ-

Euel. Lib. 12. Fig. 7.



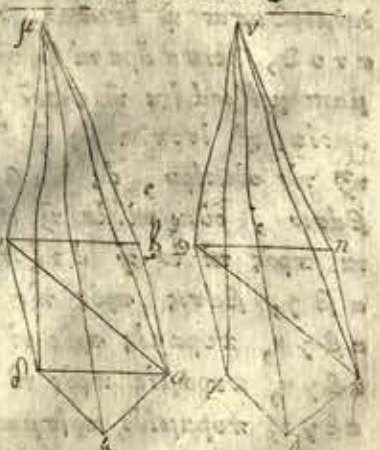
μεῖζον ἄρα καὶ τὸ χ, στερεὸν τῷ ὄντι τῇ δεζθ, πυραμίδι ὁρισμάτων, ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς δεζθ, πυραμίδος στερεόν. Ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι οὐδ' ὡς ἡ δεζ, βάσις πρὸς τὴν αβγ, βάσιν, οὕτως ἡ δεζθ, πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς αβγη, πυραμίδος στερεόν. Λέγω δή, ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδ' ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς δεζθ, πυραμίδος στερεόν, εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ χ. ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς ἡ δεζ, βάσις πρὸς τὴν αβγ, βάσιν, οὕτω τὸ χ, στερεὸν πρὸς τὴν αβγη, πυραμίδα, ὡς δὲ τὸ χ, στερεὸν πρὸς τὴν αβγη, πυραμίδα οὕτως ἡ δεζθ, πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς αβγη, πυραμίδος, ὡς ἐμπροσθεν ἐν τῇ β': τὸ παράπαν ἐδείχθη, καὶ ὡς ἄρα ἡ δεζ, βάσις πρὸς τὴν αβγ, βάσιν, οὕτως ἡ δεζθ, πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς αβγη, πυραμίδος, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτως ἡ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς πυραμίδος. ἀλλ' ἐδείχθη οὐδὲ πρὸς ἔλαττον, ἄρα ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτως αβγη, πυραμὶς πρὸς τὴν δεζθ, πυραμίδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ς'. Θεώρημα.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄσαι πυραμίδες, καὶ πολυγώνους ἐχουσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, πολυγώνους ἐχουσαι βάσεις τὰς αβγδε, ζηθκλ. κορυφὰς δὲ τὰ μν, σημεῖα. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν ζηθκλ, βάσιν, οὕτως ἡ αβγδεμ, πυραμὶς πρὸς τὴν ζηθκλν, πυραμίδα. Διῃρήσθω γὰρ ἡ αβγδε, βάσις εἰς τὰ αβγ, αγδ, αδε, τρίγωνα, ἡ δὲ ζηθκλ, εἰς τὰ ζηθ, ζθκ, ζκλ, τρίγ: καὶ νενοήσθωσαν ἐφ' ἑκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσοῦψεῖς τισὶ τῇ ἀρχῆς πυραμίσι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ αβγ, τρίγων: πρὸς τὸ αγδ, τρίγ: οὕτως ἡ αβγμ, πυραμὶς, κοινὴν τὴν ἀνωτέρω, πρὸς τὴν αγδμ, πυραμίδα, καὶ σιωπεθέντα, ὡς τὸ αβγ δ, παράλληλοι πρὸς τὸ αγδ, τρίγ: οὕτως ἡ αβγδμ, πυραμὶς πρὸς τὴν τγδμ, πυραμίδα, καὶ τὴν ιή: τῷ ε: ἀλλ' ὡς τὸ αγδ, τρίγων: πρὸς τὸ αδε, τρίγ: οὕτως ἡ αγδμ, πυραμὶς πρὸς τὴν αδεμ, πυραμίδα, καὶ δι' ἴσου ἄρα καὶ τὴν κβ: τῷ αὐτῷ, ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν αδε, βάσιν, οὕτως ἡ αβγδμ, πυραμὶς πρὸς τὴν αδεμ, πυραμίδα, καὶ σιωπεθέντα πάλιν, ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν αδε.

Euclid. Lib. 12. Fig. 8.



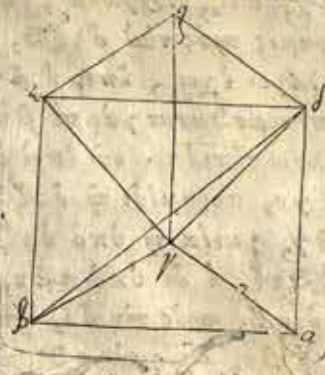
αδε, ἔπως ἡ αβγδεμ, πυραμὶς πρὸς τὴν αδεμ, πυραμίδα. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ὡς ἡ ζηθκλ, βάσις πρὸς τὴν ζκλ, βάσιν, ἔπω καὶ ἡ ζηθκλν, πυραμὶς πρὸς τὴν ζκλν, πυραμίδα, καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω, ὡς ἡ αδε, βάσις τῆς αδεμ, πυραμίδος πρὸς τὴν ζκλ, βάσιν τῆς ζκλν, πυραμίδος, ἔπως ἡ πυραμὶς πρὸς τὴν πυραμίδα. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν αδε, βάσιν, ἔπως ἡ αβγδεμ, πυρ: πρὸς τὴν αδεμ, πυρ: ὡς δὲ ἡ αδε, βάσις πρὸς τὴν ζκλ, βάσιν, ἔπως ἡ αδεμ, πυρ: πρὸς τὴν ζκλν, πυρ: καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν ζκλ, βάσιν, ἔπως ἡ αβγδεμ, πυραμὶς πρὸς τὴν ζκλν, πυραμ: ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ζκλ, βάσις πρὸς τὴν ζηθκλ, βάσιν, ἔπως ἦν καὶ ἡ ζκλν, πυρ: πρὸς τὴν ζηθκλν, πυρ: καὶ δι' ἴσου πάλιν, ὡς ἡ αβγδε, βάσις πρὸς τὴν ζηθκλ, βάσιν. ἔπως ἡ αβγδεμ, πυρ: πρὸς τὴν ζηθκλν, πυραμίδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

Παν πρίσμα τριγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἔστω πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ αβγ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ δεζ. Λέγω, ὅτι τὸ αβγδεζ, πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βδ, εγ, γδ. καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αβεδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ βδ, καὶ κατὰ τὴν λδ': τὸ ἄρα αβδ, τρίγ: τῷ εδβ, τριγώνῳ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ αβδ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ καὶ τὴν ἀνωτέρω πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ εδβ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον. ἀλλ' αὕτη ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ εδβ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ εβγ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον. ὑπὸ γὰρ τὰ αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αβδ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εβγ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον. πάλιν ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ζγβε, διάμετρος δ' αὐτοῦ ἡ γε, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ λδ': τῷ ἀ: τὸ εγζ, τρίγωνον τῷ γβε, τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ βεγ, τρίγ: κορυφὴ τὸ δ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυρ: ἧς βάσις μὲν τὸ εγζ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ βγε, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ αβδ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ γεζ, τρίγ: κορυφὴ

Eucl. Lib. 12. Fig. 9.



ρυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, ἴση πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ α β δ, τείγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον. διήρηται ἄρα τὸ α β γ δ ε ζ, πείσμα, εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τειγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ ἐπεὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ α β δ, τρίγ: κορυφὴ δὲ τὸ γ, σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ α β γ, κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πείσματος, ἧ βάσις μὲν τὸ α β γ, τείγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ δ ε ζ, καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ α β γ, τείγ: κορυφὴ δὲ τὸ δ, σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πείσματος, τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν, τὸ α β γ, τρίγ: ἀπεναντίον δὲ τὸ δ ε ζ.

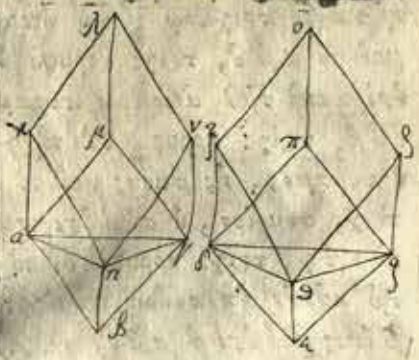
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πείσματος, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ, καὶ ὕψος ἴσον. ἐπειδήπερ καὶ ἑτερόν τι σχῆμα ἔχει ἡ βάσις τοῦ πείσματος, καὶ τὸ αὐτὸ ἀπεναντίον, διαιρεῖται εἰς πείσματα τειγώνους ἔχοντα βάσεις καὶ τὰς ἀπεναντίον.

Πρότασις Η': Θεώρημα.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὅμοιαι, καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶ τὰ α β γ, δ ε ζ, τείγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ η, θ, σημεῖα. Λέγω ὅτι ἡ α β γ η, πυραμὶς πρὸς τὴν δ ε ζ θ, πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ. Συμπεπληρώσθωσαν γὰρ τὰ β η μ λ, ε θ π ο, στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστιν ἡ πυραμὶς ἡ α β γ η, πυραμίδι τῇ δ ε ζ θ, ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ α β γ, γωνία τῇ ὑπὸ δ ε ζ, ἡ δὲ ὑπὸ η β γ, τῇ ὑπὸ θ ε ζ, ἡ δὲ ὑπὸ α β η, τῇ ὑπὸ δ ε θ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν δ ε, οὕτως ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ, καὶ ἡ β η, πρὸς τὴν ε θ· καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ α β, πρὸς τὴν δ ε, οὕτως ἡ β γ, πρὸς τὴν ε ζ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα τὸ β μ, παραλληλόγρ: τῷ ε π, παραλληλογρ: διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν β ν, τῷ ε ρ, ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ β κ, τῷ ε ξ, τεία ἄρα παραλληλόγρ: τὰ β μ, κ β, β ν, τεισὶ τοῖς ε π, ε ξ, ε ρ, ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία παῦτα καὶ τῶν κδ': τῶν ά: στερ: τεισὶ τοῖς ἀπεναντίον ὅμοιά τε καὶ ἴσά ἐστι. τὰ δὲ τρία ε π, ε ξ, ε ρ, τεισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσά τε ἐστὶ καὶ ὅμοια. τὰ β η μ λ, ε θ π ο, ἄρα στερ: ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων καὶ ἴσων τὸ πλῆθος περιέχονται. ὅμοιον ἄρα τὸ β η μ λ, στερ: τῷ ε θ π ο, στερ: τὰ δὲ ὅμοια στερ: παραλ-



παλληλεπίπ: καὶ τῷ λγ': τῷ παρειλημμένῳ, ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ βημλ, ἄρα στερ: πρὸς τὸ εθοπ, στερ: τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος βγ, πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον εζ, πλευράν, ὡς δὲ τὸ βημλ, στερ: πρὸς τὸ εθοπ, στερ: οὕτως ἡ αβγη, πυραμὶς πρὸς τὴν δεζθ, πυραμίδα. ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ, καὶ τὸν γ': τοῦ παραλληλεπιπ: τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος, καὶ τὸν ἀνωτέρω, καὶ ἡ αβγη, ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν δεζθ, πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ.

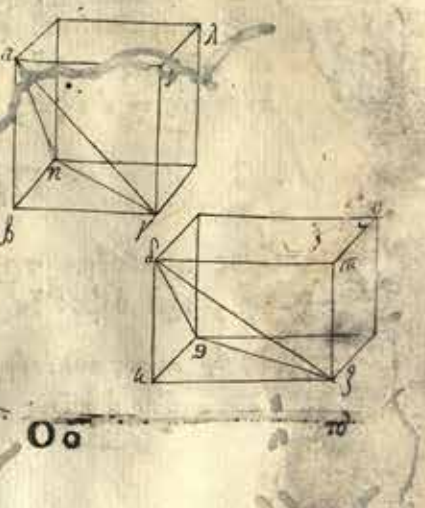
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῆς ὁμολόγων πλευρῶν, διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας, τριγώνους βάσεις ἐχούσας, διὰ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῆς βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι, καὶ τὸν κ': τοῦ ς': καὶ εἰς ἴσα τε καὶ πλήθει, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, ἔσαι ὡς ἐν ἑτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν πρὸς τὴν ἐν ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν, οὕτω καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, πρὸς τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα, ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν τρίγ: βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῆς ὁμολόγων πλευρῶν, καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίας βάσεις ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Πρότασις Θ': Θεώρημα.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι. *Eucl. Lib. 12. Fig. 11.*

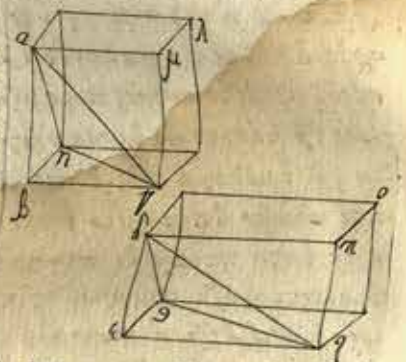
Ἔστωσαν γὰρ πυραμίδες ἴσαι τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς αβγ, δεζ, κορυφαὶ δὲ τὰ η, θ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι τῶν αβγη, δεζθ, πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, οὕτω τὸ τῆς δεζθ, πυραμ: ὕψος, πρὸς τὸ τῆς αβγη, πυρ: ὕψος. Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ βημλ, εθοπ, στερεὰ παραλληλεπ: καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβγη, πυρ: τῇ δεζθ, πυρ: καὶ ἔστι τῆς μὲν αβγη, πυραμ: ἑξαπλάσιον τὸ βημλ, στερεὸν, τῆς δὲ δεζθ,



Οο

τὸ επθο, στερεὸν καὶ τλω γ': καὶ ζ': τῷ παρόντος, ἴσον ἄρα τὸ βημλ, στερεὸν πρ. εθπο, στερεῷ, καὶ γὰρ τλω λδ': τῷ ιά: τῷ ἴσων στερεῶν παραλληλεπ: ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βμ, βάσις πρὸς τὴν επ, βάσιν, οὕτω τὸ τῆ εθπο, ὕψος, πρὸς τὸ τῆ βημλ, στερ: ὕψος. ἀλλ' ὡς ἡ βμ, βάσις πρὸς τὴν επ, βάσιν, ἕτω τὸ αβγ, τείγωνον πρὸς τὸ δεζ, τείγωνον. καὶ ὡς ἄρα τὸ αβγ, τείγων: πρὸς τὸ δεζ, τείγ: ἕτω τὸ τῆ εθπο, στερ: ὕψος πρὸς τὸ τῆ βημλ, στερ: ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τῆ εθπο, στερ: ὕψος τῷ αὐτό ἐστι πρ τῆς δεζθ, πυραμίδος ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, ἕτω τὸ τῆς δεζθ, πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς αβγη, πυραμίδος ὕψος, τῶν αβγη, δεζθ, πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ἀλλὰ δὴ τῶν αβγη, δεζθ, πυραμ: ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, ἕτω τὸ τῆς δεζθ, πυραμ: ὕψος πρὸς τὸ τῆς αβγη, πυρ: ὕψος. Λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ αβγη, πυραμὶς τῇ δεζθ, πυρ: τῷ γὰρ αὐτῷ κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, ἕτω τὸ τῆς δεζθ, πυρ: ὕψος πρὸς τὸ τῆς αβγη, πυρ: ὕψος. ἀλλ' ὡς ἡ αβγ, βάσις πρὸς τὴν δεζ, βάσιν, ἕτω τὸ βμ, παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ επ, παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ βμ, παραλληλόγρ: πρὸς τὸ επ, ἕτω τὸ τῆς δεζθ, πυρ: ὕψος πρὸς τὸ τῆς αβγη, πυραμ: ὕψος, ἀλλὰ τὸ μὲν τῆς δεζθ, πυραμ: ὕψος τῷ αὐτό ἐστι πρ τῆ εθπο, παραλληλεπιπέδῳ ὕψει, τὸ δὲ τῆς αβγη, πυρ: ὕψος τὸ αὐτό ἐστι πρ τῆ βημλ, παραλληλεπιπέδῳ ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βμ, βάσις πρὸς τὴν επ, βάσιν, ἕτω τὸ τῆ εθπο, παραλληλεπιπέδῳ ὕψος πρὸς τὸ τῆ βημλ, ὧν δὲ στερ: παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσά ἐστιν ἐκεῖνα, καὶ τλω ῥηθεῖσαν. ἴσον ἄρα τὸ βημλ, στερ: παραλληλεπ: πρ εθπο, στερ: παραλληλεπ: καὶ ἔστι τῷ μὲν βημλ, ἕκτον μέρος ἡ αβγη, πυραμὶς, τῷ δὲ εθπο, στερ: ὁμοίως ἕκτον μέρος ἡ δεζθ, πυραμὶς. ἡ ἄρα αβγη, πυραμὶς τῇ δεζθ, πυραμίδι ἴση ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Encl. Lib. 12. Fig. 12.

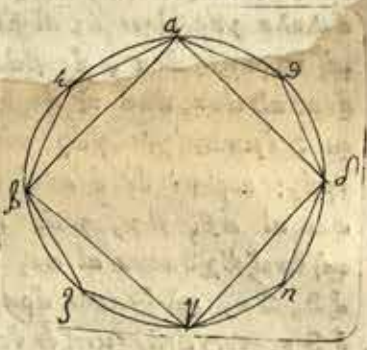


Πρότασις Ι': Θεώρημα.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ, τῆ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον.

Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν αβγδ, κύκλον, καὶ ὕψος ἴσον. Λέγω, ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὁ κύλινδρος τοῦ

τῆ κώνου ϛριπλασίων ἔσαι· εἰ γὰρ μή, ἔσαι ἤτοι μείζων, ἢ τριπλασίων, ἢ ἐλάττων, ἔστω πρότερον μείζων, ἢ ϛριπλασίων. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν α β γ δ, τετράγωνον τὸ α β γ δ, καὶ πάντα δὴ μείζονόν ἐσιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆ α β γ, κύκλε, καθ' ἣν δείξιν τῆς β': τῆ παρ: καὶ ἀνεσάδω ἀπὸ τῆ α β γ δ, τετραγ: πρίσματα ἰσοῦψῆ τῆ κυλίνδρῳ. τὸ δὴ ἀνισάμενον, μείζονόν ἐσιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆ κυλίνδρε. ἐπειδήπερ καὶν περὶ τὸν α β γ δ, κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμένον τετράγων: ἥμισύ ἐσι τῆ περιγραφομένε. καὶ ἔσι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνισάμενα ἰσοῦψῆ σερεὰ παραλληλεπίπ: πρίσματα. τὰ ἄρα πρίσματα, ἐσὶν, ὡς αἱ βάσεις. καὶ τὸ ἐπὶ τῆ α β γ δ, ἀναγραθὲν ἄρα τετράγωνε πρίσμα, ἥμισύ ἐσι τῆ ἀναγραθέντος πρίσματος ἀπὸ τῆ περιγραφέντος τετραγώνε, καὶ ἔσιν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τῆ πρίσματος, τῆ ἀναγραθέντος ἀπὸ τῆ περιγραφέντος τετραγ: τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀναγραθὲν ἀπὸ τῆ α β γ δ, τετραγ: ἰσοῦψὲς τῆ κυλίνδρῳ, μείζονόν ἐσι τῆ ἡμίσεως τῆ κυλίνδρου. Τετμήθωσαν αἱ α β, β γ, γ δ, δ α, περιφέρειαι δίχα καὶ τὰ ε, ζ, η, θ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α ε, ε β, β ζ, ζ γ, γ η, η δ, δ θ, θ α, καὶ ἕκασον ἄρα τῶν α ε β, β ζ γ, γ η δ, δ θ α, τριγώνων μείζονόν ἐσιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆ καθ' αὐτὸ τμήματος τῆ α β γ δ, κύκλε, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν κατὰ τὴν β': τῆ παρόντος. ἀνεσάσθω ἐφ' ἑκάσε τῶν α ε β, β ζ γ, γ η δ, δ θ α, τριγ: πρίσματα ἰσοῦψῆ τῆ κυλίνδρῳ. καὶ ἕκασον ἄρα τῶν ἀναγραθέντων πρισμάτων μείζονόν ἐσιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆ καθ' αὐτὸ τμήματος τῆ κυλίνδρε. ἐπειδήπερ ἐαν διὰ τῶν ε, ζ, η, θ, σημείων, παραλλήλες ἀγάγωμεν ταῖς α β, β γ, γ δ, δ α, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν α β, β γ, γ δ, δ α, παραλληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναςήσωμεν σερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοῦψῆ τῆ κυλίνδρῳ, ἑκάσου τῶν ἀναγραθέντων ἥμισή ἐσι τὰ πρίσματα, τὰ ἐπὶ τῶν α ε β, β ζ γ, γ η δ, δ θ α, τριγώνων. καὶ ἔσι τὰ τῆ κυλίνδρου ἀποτμήματα ἐλάττονα τῶν ἀναγραθέντων σεριῶν παραλληλεπιπέδων, ὥσε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν α ε β, β ζ γ, γ η δ, δ θ α, τριγώνων, πρίσματα μείζω ἐσὶν, ἢ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τῆ κυλίνδρε τμημάτων. τέμνοντες τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνισαύτες ἐφ' ἑκάσε τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοῦψῆ τῆ κυλίνδρῳ, καὶ πάντα ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τῆ κυλίνδρου, ἃ ἔσαι ἐλάττω τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τῆ τριπλασίε κώνου. λελείφθω, καὶ ἔσω τὰ α ε, ε β, β ζ, ζ γ, γ η, η δ, δ θ, θ α, λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ α ε β ζ γ η δ θ, πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῆ κυλίνδρῳ μείζονόν ἐσιν, ἢ τριπλάσιον τῆ κώνε. ἀλλὰ πάντα τὸ πρίσμα, καὶ τὴν ζ': τῆ παρ: τριπλάσιόν ἐσι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν ἐσι τὸ α ε β ζ γ η δ θ, πολύγ: κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῆ κώνῳ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα

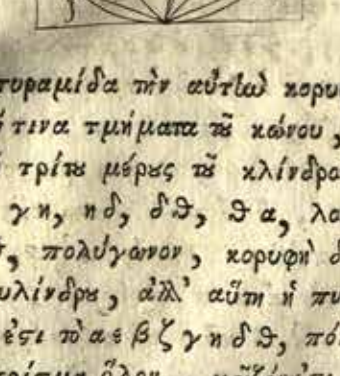


Eucl. Lib. 12. Fig. 13.

αὐτῇ καὶ τὸ πόρισμα τῆς ζ΄: τῇ παρ' μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου, τὴν βάσιν ἔχοντας τὸν αβγδ κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων. ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων, ἢ τριπλασίων.

Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ τριπλασίων. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ἐλάττων, ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. Ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν αβγδ κύκλον τετράγωνον τὸ αβγδ, καὶ τοῦτο μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ αβγδ κύκλου. καὶ ἀνεστάσθω ἀπὸ τοῦ αβγδ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀναστᾶσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. ἐπειδὴ περ ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύλινδρον περιγράψωμεν τετράγωνον, ἔσται τὸ αβγδ τετράγωνον ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου, καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοῦψῆ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα. ἔσται τὸ ἀναστὰν ἀπὸ τοῦ αβγδ τετραγώνου, ἥμισυ τοῦ ἀναστάντος ἀπὸ τοῦ περιγραφέντος τετραγώνου, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις, καὶ τὸν λβ΄: τοῦ παρελθ: ὥστε καὶ τὰ τελεῖα, καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ αβγδ τετράγωνον, ἥμισύ ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς ἀναστάσης ἀπὸ τοῦ περιγραφέντος τετραγώνου: καὶ αὐτὴ ἡ πυραμὶς μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ αβγδ, τετράγωνον: κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. Τετμήθωσαν αἱ αβ, βγ, γδ, δα, περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ ε, ζ, η, θ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, εβ, βζ, ζγ, γη, ηδ, δθ, θα, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν αεβ, βζγ, γηδ, δθα, τριγώνων μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' αὑτὸ τμήματος τοῦ αβγδ κύκλου. καὶ ἀνεστάθωσαν ἐφ' ἑκάστου τῶν αεβ, βζγ, γηδ, δθα, τριγ: πυραμίδες τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ, καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀναστάντων πυραμίδων, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα τμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν αε, εβ, βζ, ζγ, γη, ηδ, δθ, θα, λοιπὰ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αεβζγηδθ, πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου, ἀλλ' αὕτη ἡ πυραμὶς, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ αεβζγηδθ, πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, ὥστε καὶ τὸ πρίσμα ὅλον, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ αβγδ κύκλος, ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ἐμπεριέχε-

Eucl. Lib. 12. Fig. 14.



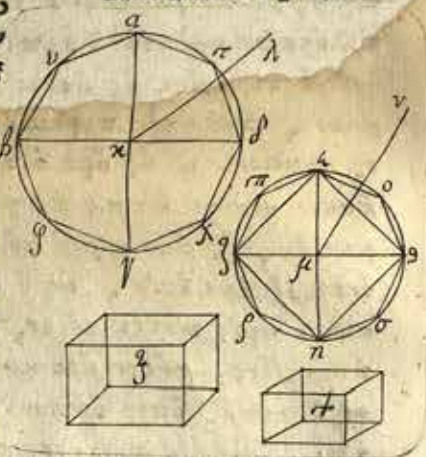
εἰ̓χεται γὰρ ὑπ' αὐτῶ, ὅπερ ἀδὐατον. ὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τῶ κώνου ἐλάττων, ὅπερ μείζων, ἀλλὰ ξιπλάσιος, ὡς ἐδείχθη, ὥστε ὁ κῶνος, ξίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΑ': Θεώρημα.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι, καὶ κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

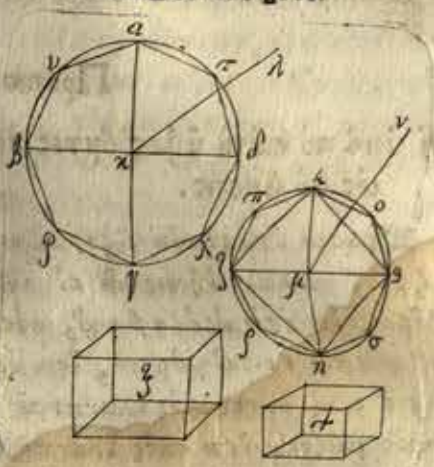
Ἐστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν εἰσιν οἱ αβγδ, εζηϑ, κύκλοι. ἄξονες δὲ οἱ κλ, μν, διάμετροι δὲ τῆ̃ βάσεων αἱ αγ, εη. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηϑ, κύκλον, ὕ̃πως ὁ αλ, κῶνος πρὸς τὸν εν. εἰ γὰρ μή, ἔσω ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηϑ, κύκλον, ὕ̃πως ὁ αλ, κῶνος πρὸς ἔλαττον τῶ̃ εν, κώνου στερεόν, ἢ πρὸς μεῖζον, ἔσω πρὸς ἔλαττον τὸ ξ. καὶ ἔστω ἔλασσον τὸ ξ. καὶ ἔστω τῶ̃ μὲν εν, ἐκείνω ἴσον ἔσω τὸ ψ, στερεόν, ὁ ἄρα εν, κῶνος ἴσός ἐστι τοῖς ξ, ψ, στερεοῖς. Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εζηϑ, κύκλον πεξάγ: τὸ εζηϑ, πεξάγωνον ἄρα μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῶ̃ κύκλου. Ἀνεσάθω ἀπὸ τῶ̃ εζηϑ, πεξαγ: πυραμὶς ἰσοῦψὴς τῆ̃ κώνῳ, ἡ ἄρα ἀναστᾶσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τῶ̃ κώνου. ἐπεὶ δήπερ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον πεξάγ: καὶ ἀπ' αὐτῶ̃ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοῦψῆ τῆ̃ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς, ἥμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης, κατὰ γὰρ τὸ ιγ': τῶ̃ παρόντος, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἐλάττων δ' ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμ: ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ εζηϑ, πεξάγ: κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῆ̃ κώνῳ, μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τῶ̃ κώνου. Τετμήθωσαν αἱ εζ, ζη, ηϑ, ϑε, περιφέρειαι, καὶ τὰ ο, π, ρ, σ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ϑο, οε, επ, πζ, ζρ, ρη, ησ, σϑ, ἕκασον ἄρα τῆ̃ ϑοε, επζ, ζρη, ησϑ, τριγώνων, μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῶ̃ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τῶ̃ κύκλου. Ἀνεσάω ἐφ' ἑκάστου τῆ̃ ϑοε, επζ, ζρη, ησϑ, τριγώνων πυραμὶς ἰσοῦψὴς τῆ̃ κώνῳ. καὶ ἑκάστη ἄρα τῆ̃ ἀναστᾶσῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τῶ̃ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τῶ̃ κώνου. Τέμνοντες δὴ πὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύοντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες, ἐφ' ἑκάστῃ τῆ̃ τριγώνων πυραμίδας ἰσοῦψεῖς τῆ̃ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τῶ̃ κώνου, καὶ τῶν ἀ: τῶ̃ ί: ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῶ̃ ψ, στερεῦ. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῆ̃ ϑοε, επζ, ζρη, ησϑ. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ϑοεπζρησ, πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῆ̃ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ ξ, στερεοῦ. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν αβγδ,

Euel. Lib. 12. Fig. 15.



αβγδ, κύκλον τῆς θοεπζρησ, πολυγώνῳ ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγ: τὸ δταυβφγχ, πολύγ: καὶ ἀνεσάθω ἐπ' αὐτῆς πυραμὶς ἰσοῦψὴς τῇ αλ, κώνῳ. ἐπεὶ οὖν (1) ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εη, οὕτω τὸ δταυβφγχ, πολύγ: πρὸς τὸ θοεπζρησ, πολύγ: ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς εη, οὕτως ὁ αβγδ, κύκλος (2) πρὸς τὸν εζηθ, κύκλ: καὶ ὡς ἄρα, ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτω τὸ δταυβφγχ, πολύγ: καὶ τὴν αὐτὴν, πρὸς τὸ θοεπζρησ, πολύγ: ὡς δὲ ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλ: οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς τὸ ξ, στερ: καὶ δὲ τὴν ιά: τῷ έ: ὡς τὸ δταυβφγχ, πολύγωνον πρὸς τὸ θοεπζρησ, πολύγων: οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ δταυβφγχ, πολύγ: κορυφὴ δὲ τὸ χ, σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ θοεπζρησ, κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον. καὶ ὡς ἄρα ὁ αλ, κῶνος πρὸς τὸ ξ, στερεὸν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ δταυβφγχ, πολύγ: κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ θοεπζρησ, πολύγ: κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον. καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ αλ, κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῇ πυραμίδα, οὕτω τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ εν, κώνῳ πυραμίδα. μείζων δὲ ὁ αλ, κῶνος τῆς ἐν αὐτῇ πυραμίδος, μείζον ἄρα καὶ τὸ ξ, στερεὸν τῆς ἐν τῷ εν, κώνῳ πυραμίδος, ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ εν, κώνου στερεόν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ὡς ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς τὸν αβγδ, κύκλον, οὕτως ὁ εν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αλ, κώνου στερεόν. Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἔστιν ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εν, κώνου στερεόν. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ ξ, ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν, ὡς ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς τὸν αβγδ, οὕτω τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὸν αλ, κῶνον. ἀλλ' ὡς τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὸν αλ, κῶνον, οὕτως ὁ εν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αλ, κώνου στερεόν, καὶ ὡς ἄρα ὁ εζηθ, κύκλος πρὸς τὸν αβγδ, οὕτως ὁ εν, πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αλ, κώνου, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ἔστιν ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εν, κώνου στερεόν. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ, πρὸς ἔλασσον, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτως ὁ αλ, κῶνος πρὸς τὸν εν, κῶνον. ἀλλ' ὡς ὁ κῶνος

Euel. Lib. 12. Fig. 16.



πρὸς

(1) ἀπὸ κῆ τιλῶ ά: τῷ παράντος.

(2) Κατὰ τὴν β: τῷ αὐτῷ.

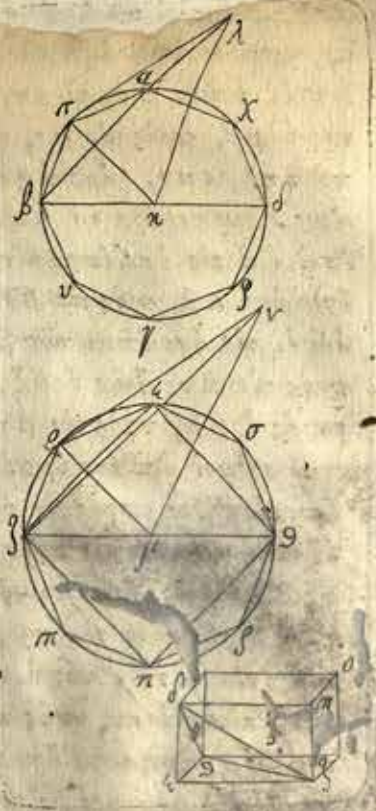
πρὸς τὸν κῶνον, ἔστι καὶ ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλασίων γὰρ ἑκάτερος ἑκατέρου, καὶ τὸν ἀνωτέρω, καὶ ὡς ἄρα ὁ αβγδ, κύκλος πρὸς τὸν εζηθ, κύκλον, οὕτως οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς τοῖς κώνοις κύλινδροι. οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροι οἱ πρὸς ἀλλήλοις τριπλασίονα λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

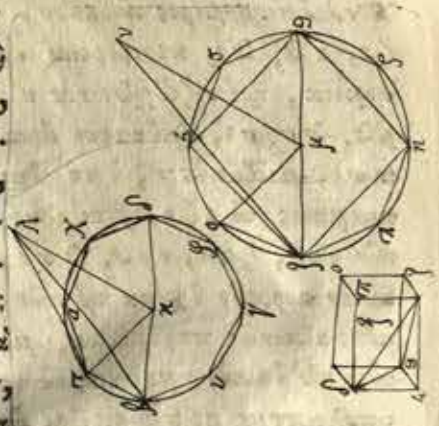
Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι, καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ αβγδ, εζηθ, κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων, αἱ βδ, ζθ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων, ἢ κυλίνδρων οἱ κλ, μν. Λέγω, ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ αβγδ, κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσεις μὲν ὁ εζηθ, κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. εἰ γὰρ μή, ἕξει πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ εζηθν, κώνου στερεόν, ἢ τριπλασίονα, ἢ πρὸς μεῖζον. Ἐχέτω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ ξ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εζηθ, κύκλον τετράγωνον τὸ εζηθ, καὶ τοῦτο μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ εζηθ, κύκλου. καὶ ἀνεσάθω ἀπὸ τοῦ εζηθ, τετράγωνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ, ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν δὴ αἱ εζ, ζη, ηθ, θε, περιφέρειαι δίχα, καὶ τὰ ο, π, ρ, σ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εο, οζ, ζπ, πη, ηρ, ρθ, θσ, σε, καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν εοζ, ζπη, ηρθ, πσε, μεῖζόν ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ εζηθ, κύκλου. καὶ ἀνεσάθω ἐφ' ἑκάστου τῶν εοζ, ζπη, ηρθ, θσε, τριγώνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων, μείζων ἐστὶν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τοῦ ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ὁ εζηθν, κῶνος τοῦ ξ, στερεοῦ. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν εο, οζ, ζπ, πη, ηρ, ρθ, θσ, σε, λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εοζπηρθσ, πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον, μείζων ἐστὶ τοῦ ξ, στερεοῦ. Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν αβγδ, τὸ εοζπηρθσ, πολυγ: ὅμοιον δὲ καὶ

Eucl. Lib. 12. Fig. 17.



ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ αβγδεζ. καὶ ἀνεσάθω ἀπ' αὐτοῦ πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ. καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ αβγδεζ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, σὺ ξίγωνον ἔστω τὸ λβτ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εοζπρηθσ, πολύγ. κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον, σὺ ξίγωνον ἔστω τὸ νζο, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κτ, μο. καὶ ἐπεὶ ὅμοιός ἐστιν ὁ αβγδλ, κώνος τῷ εζηθν, κώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ, οὕτως ὁ κλ, ἄξων πρὸς τὸν μν, ἄξονα, ὡς δὲ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ, οὕτως ἡ βκ, πρὸς τὴν ζμ, καὶ ὡς ἄρα ἡ βκ, πρὸς τὴν ζμ, οὕτως ἡ κλ, πρὸς τὴν μν, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ βκ, πρὸς τὴν κλ, οὕτως ἡ ζμ, πρὸς τὴν μν, καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ βκλ, ζμν, ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ βκλ, ζμν, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα τὸ βκλ, ξίγωνον τῷ ζμν, ξιγώνῳ. πάλιν ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ βκ, πρὸς τὴν κτ, οὕτως ἡ ζμ, πρὸς τὴν μο, καὶ περὶ ἴσας γωνίας, τὰς ὑπὸ βκτ, ζμο. ἐπειδήπερ δὲ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ βκτ, τῶν πρὸς τῷ κεντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ζμο, γωνία τῶν πρὸς τῷ μ, κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν. ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα τὸ βκτ, ξίγων. τῷ ζμο, ξιγ. πάλιν ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ βκ, πρὸς τὴν κλ, οὕτως ἡ ζμ, πρὸς τὴν μν, ἴση δὲ ἡ μὲν βκ, τῇ κτ, ἡ δὲ ζμ, τῇ μο, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κτ, πρὸς τὴν κλ, οὕτως ἡ μο, πρὸς τὴν μν, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τκλ, ομν, (ὀρθαὶ γὰρ) αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα τὸ λκτ, ξίγ. τῷ νμο, ξιγ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν βκλ, ζμν, ξιγώνων, ἔστιν ὡς ἡ λβ, πρὸς τὴν βκ, οὕτως ἡ νζ, πρὸς τὴν ζμ. διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν βκτ, ζμο, ἔστιν ὡς ἡ κβ, πρὸς τὴν βτ, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὴν ζο, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ βλ, πρὸς τὴν βτ, οὕτως ἡ νζ, πρὸς τὴν ζο. πάλιν ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν λτκ, νομ, ξιγ. ἔστιν ὡς ἡ λτ, πρὸς τὴν τκ, ἡ νο, πρὸς τὴν ομ. διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν κβτ, ομζ, ξιγ. ἔστιν ὡς ἡ κτ, πρὸς τὴν τβ, οὕτως ἡ μο, πρὸς τὴν οζ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ λτ, πρὸς τὴν τβ, οὕτως ἡ νο, πρὸς τὴν οζ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ λβ, πρὸς τὴν βτ, οὕτως ἡ νζ, πρὸς τὴν ζο. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ τλ, πρὸς τὴν βτ, οὕτως ἡ νο, πρὸς τὴν οζ, τῶν λτβ, νοζ, ἄρα ξιγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ, ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ λτβ, νοζ, ξίγ. ὥστε καὶ ὅμοια, καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ βκτ, ξίγ. κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ζμο, ξίγ. κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται, ἴσων τὸ πλῆθος. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ ξιγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν ξιπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, ἡ ἄρα

Eucl. Lib. 12. Fig. 18.



ἄρα βκτλ, πυραμὶς, πρὸς τὴν ζμον, πυραμίδα ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βκ, πρὸς τὴν ζμ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνύντες ἀπὸ τῆς α, χ, δ, φ, γ, υ, εὐθείας ἐπὶ τὸ κ, καὶ ἀπὸ τῆς ε, σ, θ, ρ, η, π, ἐπὶ τὸ μ, καὶ αὐξήσαντες ἐπὶ τῆς ξιγωνίων πυραμίδας τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἐχούσας τοῖς κώνοις. δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα ξιπλασίονα λόγον ἕξει, ἥπερ ἡ βκ, ὁμόλογος πλευρὰ, πρὸς τὴν ζμ, ὁμόλογον πλευρὰν· τουτέστιν ἥπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. ἀλλ' ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βκτλ, πυραμὶς πρὸς τὴν ζμον, πυραμ: οὕτως ἡ ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ατβυγφδχ, πολύγ: κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ εοζπηρθσ, κορυφὴ δὲ τὸ ν, σημεῖον. ὥστε καὶ ἡ ὅλη πυραμὶς πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. ὑπόκειται δὲ ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ αβγδ, κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ λ, σημεῖον, πρὸς τὸ ξ, στερ: ξιπλασίονα λόγον ἔχον, ἥπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ αβγδλ, κῶνος, πρὸς τὸ ξ, στερ: οὕτως ἡ ὅλη πυραμὶς ατβυγφδχλ, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα εοζπηρθσν, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ αβγδλ, κῶνος, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ ατβυγφδχλ, πυραμίδα, οὕτως τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὴν εοζπηρθσν, πυραμίδα, μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτὴν, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ξ, στερ: τῆς εοζπηρθσν, πυραμίδος, ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ὁ αβγδλ, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ εζηθν, κώνου στερεὸν ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ εζηθν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδλ, κώνου στερεὸν, ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ζθ, πρὸς τὴν βδ. Λέγω, ὅτι ὁ αβγδλ, κῶνος οὐδὲ πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθν, κώνου στερεὸν ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω, ἐχέτω δηλονότι πρότερον ὁ αβγδλ, κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθν, κώνου, τὸ ξ, ξιπλασίονα λόγον, ἀνάπαλιν ἄρα τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὸν αβγδλ, ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ζθ, πρὸς τὴν βδ, ὥστε ὡς τὸ ξ, στερεὸν πρὸς τὸν αβγδλ, κῶνον, οὕτως ὁ εζηθν, κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδλ, κώνου στερεὸν, καὶ ὁ εζηθν, κῶνος ἄρα πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ αβγδλ, κώνου στερεὸν ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ζθ, πρὸς τὴν βδ, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ αβγδλ, κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ εζηθν, κώνου, ἥπερ ἡ ζθ, πρὸς τὴν βδ, ξιπλασίονα λόγον ἔχει. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττόν τι. ὁ αβγδλ, ἄρα κῶνος πρὸς τὸν εζηθν, κῶνον ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· ξιπλ: γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου, ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ, καὶ ἰσοῦψὴς αὐτῷ. ἐδείχθη γὰρ, ἐν τῇ ι: τοῦ παρόντος, πᾶς κῶνος κυλίνδρου ξίτον μέρος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον, καὶ ὁ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον ξιπλασίονα

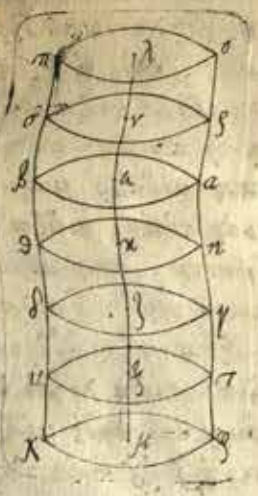
λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βδ, πρὸς τὴν ζθ. Οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῆς ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ε'αν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος γὰρ ὁ αδ, ἐπιπέδῳ τῷ ηθ, τετμήσθω, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς αβ, γδ, καὶ συμβαλλέτω τῷ εζ, ἄξονι κατὰ τὸ κ, σημεῖον. Λέγω, ὅτι ὡς ὁ βη, κύλινδρος πρὸς τὸν ηδ, κύλινδρον, οὕτως ὁ εκ, ἄξων πρὸς τὸν κζ, ἄξονα. Ἐκβεβλήσθω ὁ εζ, ἄξων ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ λ, μ, σημεῖα, καὶ ἐκκείσθωσαν τῷ μὲν εκ, ἄξονι ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ εν, νλ, τῷ δὲ κζ, ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ζξ, ξμ· καὶ διήχθωσαν διὰ τῶν λ, ν, ξ, μ, σημείων, ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς αβ, γδ· καὶ νενοήσθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν λ, ν, ξ, μ, ἐπιπέδοις περὶ τὸν κοινὸν ἄξονα τὸν λ, ν, ξ, μ, κύκλοι, οἱ ο π, ρ σ, τ υ, φ χ, ἴσοι τοῖς αβ, γδ· καὶ νενοήσθωσαν κύλινδροι οἱ πρ, ρβ, δτ, τχ· καὶ ἐπεὶ οἱ λν, νε, εκ, ἄξονες, ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, καὶ κατὰ τὰ ἀπὸ τῶν ἴσων· ἄρα τὰ παρόντα· οἱ πρ, ρβ, βη, κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς αἱ βάσεις, ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις, ἴσοι ἄρα καὶ οἱ πρ, ρβ, βη, κύλινδροι. ἐπεὶ οὖν οἱ λν, νε, εκ, ἄξονες ἴσοι ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ πρ, ρβ, βη, κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν λν, νε, εκ, τῷ πλήθει τῶν πρ, ρβ, βη, ὁσαπλασίων ἄρα ὁ κλ, ἄξων τοῦ εκ, ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ πη, κύλινδρος τοῦ βη, κυλίνδρου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ὁ μκ, ἄξων τοῦ κζ, ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶν καὶ ὁ χη, κύλινδρος τοῦ ηδ, κυλίνδρου· καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ κλ, ἄξων τῷ κμ, ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ πη, κύλινδρος τῷ χη, κυλίνδρῳ· εἰ δὲ μείζων ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, ἀξόνων μὲν τῶν εκ, κζ, κυλίνδρων δὲ τῶν βη, ηδ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν εκ, ἄξονος, καὶ τοῦ βη, κυλίνδρου, ὅ, τε κλ, ἄξων καὶ ὁ πη, κύλινδρος, τοῦ δὲ κζ, ἄξονος καὶ ηδ, κυλίνδρου, ὅ, τε κμ, ἄξων, καὶ ὁ ηχ, κύλινδρος· καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ κλ, ἄξων τοῦ κμ, ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ πη, κύλινδρος τοῦ ηχ, κυλίνδρου· καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάττων, ἐλάττων· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ εκ, ἄξων πρὸς τὸν κζ, ἄξονα, οὕτως ὁ βη, κύλινδρος πρὸς τὸν ηδ, κύλινδρον· καὶ τὸν ἐ· ὅρον τοῦ ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 12. Fig. 19.



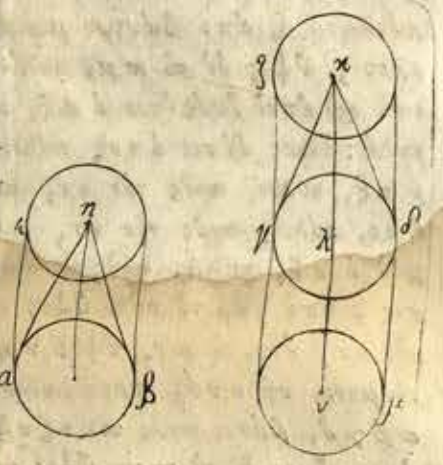
Πρό-

Πρότασις ΙΔ'. Θεώρημα.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

Ἐστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν αβ, γδ, κύλινδροι οἱ ζδ, εβ. Λέγω, ὅτι ὡς ὁ εβ, κύλινδ. πρὸς τὸν ζδ, κύλιν. οὕτως ὁ ηϑ, ἄξων πρὸς τὸν κλ, ἄξονα. Ἐκβεβλήϑω γὰρ ὁ κλ, ἄξων ἐπὶ τὸ ν, σημεῖον, καὶ κείϑω τῷ ηϑ, ἄξονι ἴσος ὁ λν, ἄξων. καὶ περὶ ἄξονα τὸν λν, κύλινδρος νενοήϑω ὁ γμ. Ἐπεὶ οὖν οἱ εβ, γμ, κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶ, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἴσαι δὲ εἰσὶν αἱ βάσεις ἀλλήλαις, ἴσοι ἄρα καὶ οἱ εβ, γμ, κύλιν. ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ζμ, ἐπίπ. τέτμηται τῷ γδ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸν αὐωτέρω, ὡς ὁ γμ, κύλινδ. πρὸς τὸν ζδ, κύλινδρον, οὕτως ὁ λν, ἄξων, πρὸς τὸν κλ, ἄξονα. Ἴσος δὲ ἐστὶν ὁ μὲν γμ, κύλιν. τῷ εβ, κυλίν. ὁ δὲ λν, ἄξων τῷ ηϑ, ἄξονι. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ εβ, κύλιν. πρὸς τὸν ζδ, κύλιν. οὕτως ὁ ηϑ, ἄξων πρὸς τὸν κλ, ἄξονα. ὡς δὲ ὁ εβ, κύλινδ. πρὸς τὸν ζδ, κύλιν. οὕτως ὁ αβκ, κῶνος πρὸς τὸν γδκ, κῶνον, ἐπιπλάσιοι γὰρ οἱ κύλιν. τῶν κώνων, καὶ τὴν ἰ. τῶ παρόντ. καὶ ὡς ἄρα ὁ ηϑ, ἄξων πρὸς τὸν κλ, ἄξονα, οὕτως ὁ αβκ, κῶνος πρὸς τὸν γδκ, κῶνον, καὶ ὁ εβ, κύλιν. πρὸς τὸν δζ, κύλιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 12. Fig. 20.



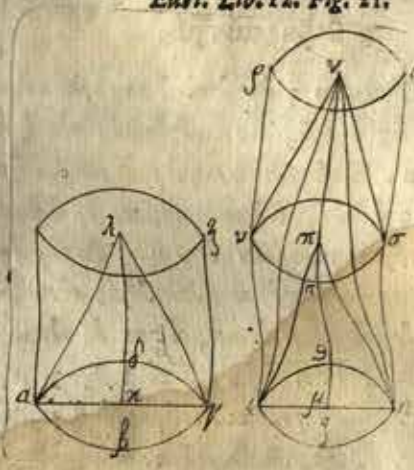
Πρότασις ΙΕ'. Θεώρημα.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοί εἰσιν ἐκεῖνοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ αβγδ, εἰνϑ, κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ αγ, εν, ἄξονες δὲ οἱ κλ, μν, οἵτινες καὶ ὕψη εἰσὶ τῶν κώνων, ἢ κυλίνδρων· καὶ συμπεπληρώσϑωσαν οἱ αξ, εο, κύλινδροι. Λέγω, ὅτι τῶν αξ, εο, κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τουτέστιν ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηϑ, βάσιν, οὕτως τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ λκ, ὕψος. τὸ γὰρ λκ, ὕψος τοῦ μν, ὕψει, ἤτοι ἴσόν ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστιν ἄρα καὶ ὁ αξ, κύλιν. τοῦ εο, κυλίν. ἴσος, καὶ ἐπὶ τὸν

ιά: τῶ παρ: οἱ κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἴση ἄρα ἡ αβγδ, βάσις τῇ εζηθ, βάσει, ὥστε καὶ ἀντιπεπόνθασιν. ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ κλ, ὕψος.

Euclid. Lib. 12. Fig. 21.



Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ κλ, ὕψος τῆς μν, ἴσον, ἀλλὰ μεῖζον. Ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μν, ὕψος τῆς κλ, ἴσον τὸ πμ· καὶ κείσθω τῆς κλ, ἴσον τὸ πμ· καὶ διὰ τοῦ π, σημείου, τετμήσθω ὁ εο, κύλινδρος τῷ τυσ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τῆς εζηθ, ρο, κύκλων. καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ εζηθ, κύκλου, ὕψος δὲ τοῦ πμ, κυλίνδρου νενοήσθω ὁ εσ. καὶ ἐπεὶ ἴσός ἐστιν ὁ αξ, κύλινδρος τῷ εο, κυλίνδρῳ ἄλλος δέ τις ὁ εσ, κύλινδρος ἔστιν ἄρα ὡς ὁ αξ, κύλινδρος πρὸς τὸν εσ, κύλινδρον οὕτως ὁ εο, κύλινδρος πρὸς τὸν εσ, κύλινδρον· ἀλλ' ὡς μὲν ὁ αξ, κύλινδρος πρὸς τὸν εσ, οὕτως ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ αξ, εσ, κύλινδροι· ὡς δὲ εο, κύλινδρος πρὸς τὸν εσ, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ πμ, ὕψος, ὁ γὰρ εο, κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ υτσ, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ πμ, ὕψος, ἴσον δὲ τὸ πμ, ὕψος τῷ κλ, ὕψει, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ κλ, ὕψος. τῶν ἄρα αξ, εο, κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Ἀλλὰ δὴ τῶν αξ, εο, κυλίνδρων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ κλ, ὕψος. Λέγω, ὅτι ἴσός ἐστιν ὁ αξ, κύλινδρος τῷ εο, κυλίνδρῳ· τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ αβγδ, βάσις πρὸς τὴν εζηθ, βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ κλ, ὕψος, ἴσον δὲ τὸ κλ, τῷ μπ, ὕψει, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτω τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ μπ, ὕψος· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ῥηθεῖσα βάσις πρὸς ῥηθεῖσαν βάσιν, οὕτω καὶ ὁ αξ, κύλινδρος πρὸς τὸν εσ, κύλινδρον· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν, ὡς δὲ τὸ μν, ὕψος πρὸς τὸ μπ, οὕτως ὁ εο, κύλινδρος πρὸς τὸν εσ, κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ αξ, κύλινδρος πρὸς τὸν εσ, κύλινδρον, οὕτως ὁ εο, πρὸς τὸν αὐτὸν εσ· ἴσος ἄρα ὁ αξ, κύλινδρος τῷ εσ, κυλίνδρῳ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

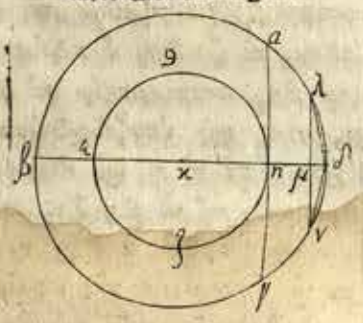
Πρό-

Πρότασις Ιϛ΄: Πρόβλημα.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὸν μείζονα κύκλον, πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι, οἱ αβγδ, εζηθ, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ κ. Δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν αβγδ, πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ εζηθ, κύκλου. Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ κ, κέντρου διάμετρος ἡ βδ, καὶ ἀπὸ τοῦ η, σημείου τῇ βδ, πρὸς ὀρθὰς ἡ αη, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ γ· ἡ αγ, ἄρα ἐφάπτεται τοῦ εζηθ, κύκλου. Τέμνοντες δὴ τὴν βαδ, περιφέρειαν δίχα, καὶ τῶν ἡμισείων αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάττονα τῆς αδ. Λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ λδ· καὶ ἀπὸ τοῦ λ, ἐπὶ τὸν βδ, κάθετος ἤχθω ἡ λμ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ ν· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λδ, δν, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ λδ, τῇ δν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ λν, τῇ αγ, ἡ δὲ αγ, ἐφάπτεται τοῦ εζηθ, κύκλου, καὶ ἡ λν, ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ αὐτοῦ κύκλου, πολλῷ ἄρα αἱ δλ, δν, οὐκ ἐφάπτονται τοῦ εζηθ, κύκλου. ἐὰν τῇ λδ, εὐθείᾳ ἴσας καὶ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν αβγδ, κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς αὐτὸν πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάττονος κύκλου, τοῦ εζηθ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 12. Fig. 22.



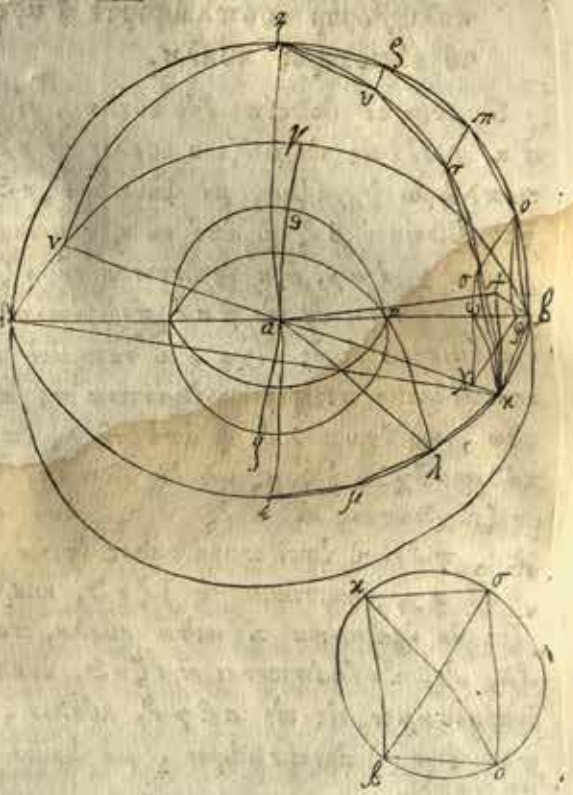
Πρότασις Ιζ΄: Πρόβλημα.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύγωνον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Νενοήθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ α, δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας καὶ τῆς ἐπιφανείας. Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρου· καὶ καὶ τὸν ιδ΄: ὅρον τοῦ παρελθ: αἱ δὴ τομαὶ αὐτῶν κύκλοι ἔσονται, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς δι- μέτρου, καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγένετο ἡ στερεὰ σφαῖρα. ὥστε καθ' οἵας οὖν θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δὲ αὐτῷ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον, ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον, καὶ φανερὸν, ὅτι καὶ μέγιστον. ἐπειδήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμι-

ἡμικυκλίου διάμετρος, δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, κατὰ τὸ ι ε΄ τοῦ γ΄· μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγομένων εὐθειῶν. ἔστω δὴ ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ βγδε, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι ὁ ζηθι, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ βδ, γε· καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν βγδε, ζηθι, εἰς τὸν μείζονα τῶν κύκλων τὸν βγδε, πολύγωνος ἰσοπλεύρου καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω, καὶ τὴν ἀνωτέρω, μὴ ψαύουσαν τοῦ ἐλάσσονος κύκλου, τοῦ ζηθι, αἱ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ βε, τεταρτημορίῳ αἱ βκ, κλ, λμ, με, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ κα, διήχθω ἐπὶ τὸ ν· καὶ ἀνεστάθω ἀπὸ τοῦ α σημείου τῷ βγδε, κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ αξ, καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ ξ· καὶ διὰ τῆς αξ, καὶ ἑκατέρας τῶν βδ, κν, ἐπιπέδα ἐκβεβλήσθω, ποιήσουσι δὲ διὰ τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιγίσεις κύκλους· ποιείτωσαν, ὧν τὰ ἡμικύκλια ἔστωσαν ἐπὶ τῶν βδ, κν, διαμέτρων, τὰ βξδ, κξν· καὶ ἐπεὶ ἡ ξα, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βγδε, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα, καὶ τὰ ἐπὶ τῆς ἡ· τὰ παρελθόντα διὰ τῆς αξ, ἐπίπεδα, ὀρθά εἰσι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ὥστε καὶ τὰ βξδ, κξν, ἡμικύκλια ὀρθά εἰσι πρὸς τὸ τοῦ βγδε, κύκλου ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ξδε, κξν, ἡμικύκλια, ἐπὶ ἴσων γάρ εἰσι διαμέτρων τῶν βδ, κν, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ βε, βξ, τεταρτημόρια ἀλλήλοις, ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῇ βε, τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσοῦταί εἰσι καὶ ἐν ταῖς βξ, κξ, τεταρτημορίοις, ἴσαι ταῖς βκ, κλ, λμ, με, εὐθείαις· ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ βο, οπ, πρ, ρξ· καὶ σο, οτ, τυ, υξ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ σο, τπ, υρ, καὶ ἀπὸ τῶν ο, σ, ἐπὶ τὸ τοῦ βγδε, κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ καὶ αἱ λή· τοῦ παρελθόντος ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων, τὰς βδ, κν, ἐπειδήπερ καὶ τὰ βξδ, κξν, ἐπίπεδα, ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βγδε, κύκλου ἐπίπεδον· πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ οφ, σχ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ φχ· καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις

Encl. Lib. 12. Fig. 23.



κλίοις τοῖς βξδ, κξν, ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν, αἱ βο, κσ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ οφ, σχ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν οφ, τῇ σχ, ἡ δὲ βφ, τῇ κχ, ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ βα, ὅλῃ τῇ κα, ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ φα, λοιπῇ τῇ χα, ἐστὶν ἴση. ἄρα καὶ ὡς ἡ βφ, πρὸς τὴν φα, οὕτως ἡ κχ, πρὸς τὴν χα, καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ β′: ἄρα τὸ ς′: παράλληλός ἐστιν ἡ φχ, τῇ κβ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν οφ, σχ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τὸ βγδε, κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστί, καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ ς′: τὸ ά: στερεὸν ἡ οφ, τῇ σχ, ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση, αἱ φχ, σο, ἄρα ἴσαί εἰσι καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ χφ, τῇ σο, ἀλλ' ἡ χφ, τῇ κβ, καὶ τὰ αὐτὰ δ′: τὸ παρελ: ἄρα καὶ ἡ σο, τῇ κβ, παράλληλός ἐστι. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ βο, κσ, τὸ κβσο, ἄρα τετράπλευρον. καὶ καὶ τὰ αὐτὰ ζ′: τὸ αὐτὸ ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἐπειδὴ περ ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, καὶ ἑκατέρα τῶν σοπτ, τπρυ, τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἔστι δὲ καὶ τὰ αὐτὰ β′: τὸ αὐτὸ, καὶ τὸ υρξ, τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν ο, σ, π, τ, ρ, υ, σημείων ἐπὶ τὸ α, ἐπιζευγνυμένας εὐθείας, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν πολυέδρον, μεταξὺ τῶν βξ, κξ, περιφερειῶν, ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ κβοσ, σοπτ, τπρυ, τετράπλευρα, καὶ τὸ υρξ, τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ α, σημεῖον. ἐὰν δὲ καὶ ἐφ' ἑκάστης τῶν κλ, λμ, με, πλευρῶν, καθάπερ ἐπὶ τῆς κβ, τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν ξ ἰῶν τεταρτημορίων, καὶ ἐπὶ τῆς λοιπῆς ἡμισφαιρίου, συσταθήσεταί τι σχῆμα πολυέδρον, ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν, ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσις τὰ εἰρημένα τετράπλευρα, καὶ τὸ υρξ, τρίγωνον, καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ α, σημεῖον. Λέγω, ὅτι τὸ εἰρημένον πολυέδρον ἐκ ἐφάπτεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ' ἧς ἐστὶν ὁ ζηθι, κύκλος. καὶ κατὰ τὴν ι ά: τῷ αὐτῷ γὰρ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ α, σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ κβοσ, τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ αψ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ ψ, σημεῖον· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βψ, ψκ. καὶ ἐπεὶ ἡ αψ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ κβοσ, τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα, καὶ τὰς γ′: ὅρον τοῦ ι ά: τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ αψ, καὶ πρὸς ἑκατέραν ἄρα τῶν βψ, ψκ, ὀρθή ἐστιν ἡ αὐτή. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ ακ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῷ ἀπὸ τῆς ακ, καὶ κατὰ τὴν μ ζ′: τοῦ ά: τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αβ, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αψ, ψβ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ ψ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ακ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν αψ, ψκ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αψ, ψβ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αψ, ψκ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς αψ, λοιπὸ. ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ψβ, λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ψκ, ἴσον ἐστίν, ἴση ἄρα ἡ ψβ, τῇ ψκ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ ψ, ἐπὶ τὰ ο σ, ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν βψ, ψκ, ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ ψ, καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ψβ, ψκ, γραφόμενος κύκλος, ἥξει καὶ διὰ τῶν ο, σ, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ κβοσ, τετράπλευρον, καὶ

ἐπεὶ

ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ κβ, τῆς χφ, ἴση δὲ ἡ χφ, τῇ σο, μείζων ἄρα ἡ βκ, τῆς σο, ἴση δὲ ἡ κβ, ἑκατέρᾳ τῶν κσ, βο, καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν κσ, βο, τῆς σο, μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ κβοσ, καὶ ἴσαι αἱ κβ, βο, κσ, καὶ ἐλάσσων ἡ οσ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ βψ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βψ, μείζων ἐστίν, ἢ διπλάσιον. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ κ, σημείου ἐπὶ τὴν βφδ, κάθετος ἡ κω. καὶ ἐπεὶ ἡ βδ, τῆς δω, ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δω, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν δβ, βω, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δω, ωβ, καὶ τὴν ά: τοῦ ς': ἀναγεγραμμένου δὴ ἀπὸ τῆς βω, τετραγώνου, καὶ συμπεπληρωμένου τοῦ ἐπὶ τῆς ωδ, παραλληλογράμμου, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν δβ, βω, τοῦ ὑπὸ τῶν δω, ωβ, ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ἔτι τῆς κδ, ἐπιζευγνυμένης, τὸ μὲν ὑπὸ τῶν δβ, βω, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς βκ, καὶ τὴν ιζ: τοῦ ς': καὶ γὰρ τὸ β': πόρισμ: τῆς ή: τοῦ αὐτοῦ, ἔστιν ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βκ, οὕτως ἡ κβ, πρὸς τὴν βω, ἡ γὰρ πρὸς τῷ κ, γωνία ἐν ἡμικυκλ: ἔσα, ὀρθή ἐστι, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν δω, ωβ, ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς κω, καὶ τὸ ά: πόρισμ: τῆς αὐτῆς, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κβ, τοῦ ἀπὸ τῆς κω, ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσ: ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς κβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βψ, μεῖζόν ἐστιν, ἢ διπλάσ: μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κω, τοῦ ἀπὸ τῆς βψ, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βα, τῇ κα, ἴσόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, τῷ ἀπὸ τῆς κα, καὶ ἔστι καὶ τὴν μζ': τοῦ ά: τῷ μὲν ἀπὸ τῆς βα, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν βψ, ψα, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς κα, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν κω, ωα, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν βψ, ψα, ἴσά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν κω, ωα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς κω, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βψ, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ωα, ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ψα, μείζων ἄρα ἡ αψ, τῆς αω, πολλῷ ἄρα ἡ αψ, μείζων ἐστὶ τῆς αν, καὶ ἔστιν ἡ μὲν αψ, ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ αν, ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάττονος σφαίρας ἐπιφάνειαν. ὥστε τὸ πολύεδρον τῆς ἐλάττονος σφαίρας ἐπιφανείαν.

ΛΗΜΜΑ.

Δεικτέον δὲ καὶ ἐπὶ τούτοις προχειρότερον, ὅτι μείζων ἡ αψ, τῆς αν. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ ν, τῇ αν, πρὸς ὀρθὰς ἡ νλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αλ. τέμνοντες δὴ τὴν εβ, περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα περιφέρειαν, ἥτις, ἔστιν ἐλάσσων τῆς ὑποτεινομένης τοῦ βγδε, κύκλου περιφερείας ὑπὸ τῆς ἴσης τῇ νλ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ κβ, περιφέρεια, ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ κβ, τῆς βεδ, καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ βκσο, τετράπλευρον, καί εἰσιν ἴσαι αἱ βο, βκ, κσ, καὶ ἐλάσσων ἡ οσ, ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βψκ, γωνία, μείζων ἄρα ἡ βκ, τῆς βψ. ἀλλὰ τῆς βκ, ἡ νλ, πολλῷ ἄρα ἡ νλ, μείζων τῆς βψ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς νλ, τοῦ ἀπὸ τῆς βψ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αν, τῇ αβ, ἴσον ἄρα καὶ τῷ ἀπὸ τῆς αλ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς αλ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν αν, νλ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν βψ, ψα, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αν, νλ, ἴσά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν βψ, ψα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς βψ, ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νλ, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ψα, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αν, μείζων ἄρα ἡ αψ, τῆς αν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟ'.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τὴν ἐν τῇ βγδε, σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὁμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ βγδε, σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ τῆς βγδε, σφαίρας διάμετρος, πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοπληθεῖς, καὶ ὁμοταγεῖς πυραμίδας, ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ κβος, τετράπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ α, σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἥπερ ἡ αβ, ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῆς περὶ τὸ κέντρον τὸ α, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κύκλου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὁμοίως δὴ καὶ ἑκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον α, σφαίρᾳ πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ, τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἥπερ ἡ αβ, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς ἄρα τὸ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ α, στερεὸν πολύεδρον, πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ αβ, πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, τουτέστιν ἥπερ ἡ βδ, διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον.

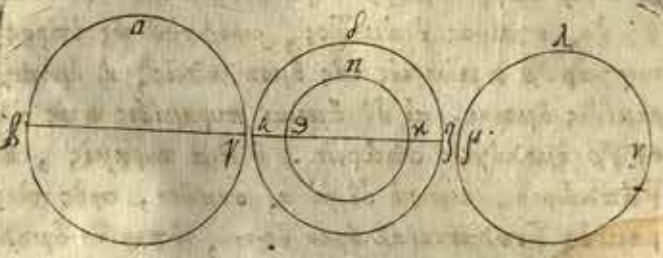
Πρότασις ΙΑ'. Θεώρημα.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Νενοήθωσαν σφαῖραι αἱ αβγ, δεζ, διάμετροι δὲ αἱ βγ, εζ. λέγω, ὅτι ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς τὴν δεζ, σφαῖραν, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. εἰ γὰρ μή, ἕξει ἄρα ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς δεζ, σφαίρας, τριπλασ: λόγον, ἢ πρὸς μείζονα, ἥπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. Ἐχέτω δὴ πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ηθκ, καὶ νενοήθω ἡ δεζ, σφαῖρα τῇ ηθκ, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν δεζ, στερεὸν πολύεδρον, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας τῆς ηθκ, κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. Ἐγγεγράφθω δὴ καὶ εἰς τὴν αβγ, τὴν ἐν τῇ δεζ, σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον, τὸ ἄρα ἐν τῇ αβγ, στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ δεζ, στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ, ἔχει δὲ καὶ ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς τὴν ηθκ, σφαῖραν τριπλασίονα λόγον, ἥπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς τὴν ηθκ, οὕτω τὸ ἐν τῇ αβγ, σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ δεζ, σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον, ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ ηθκ, σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ δεζ, σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον, μείζων δὲ ἡ αβγ, τῆς ἐν αὐτῇ πολυέδρου, μείζων

ζων ἄρα καὶ ἡ θηκ, σφαῖρα τῆ ἐν τῇ δεζ, σφαίρα πολυέδρα, ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτῆ. ἐκ ἄρα ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς δεζ, σφαῖραν ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, διάμετρος πρὸς τὴν εζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ δεζ, σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς αβγ, ξιπλασ: λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εζ, πρὸς τὴν βγ. λέγω, ὅτι οὐδὲ ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς δεζ, σφαίρας ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. εἰγὰρ δυνατὸν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν λμν, ἀνάπαλιν ἄρα ἡ λμν, σφαῖρα πρὸς τὴν αβγ, σφαῖραν ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εζ, διάμετρος πρὸς τὴν βγ, διάμετρον, ὡς δὲ ἡ λμν, σφαῖρα πρὸς τὴν αβγ, σφαῖραν, οὕτως ἡ δεζ, σφαῖρα πρός ἐλάττονά τινα τῆς αβγ, σφαίρας, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη. ἐπειδὴ περ μείζων ἐστὶν ἡ λμν, τῆς δεζ, καὶ ἡ δεζ, ἄρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς αβγ, σφαῖραν ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ εζ, πρὸς τὴν βγ. ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. ἐκ ἄρα ἡ αβγ, σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα, ἀλλ' οὐδὲ πρὸς ἐλάττονα, ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. ἡ αβγ, ἄρα σφαῖρα πρὸς τὴν δεζ, ξιπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βγ, πρὸς τὴν εζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. lib. 12. Fig. 24.



Τέλος τῦ Δωδεκάτυ τῆς τῦ Εὐκλείδυ Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ
ΤΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΤΡΙΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ:
ΤΟΥ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΟΥ ΤΡΙΤΟΥ,
ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Πρότασις Α'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον, καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ αγ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ αγ, εὐθεῖα ἡ αδ, καὶ κείσθω τῆς αβ, ἡμίσεια ἡ αδ. Λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. Ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν αβ, γδ, τετράγωνα, τὰ αε, δζ, καὶ κατεγεγράφθω ἐν τῷ δζ, τὸ χῆμα, καὶ διήχθω ἡ ζγ, ἐπὶ τὸ η. καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, σημεῖον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ἀπὸ τῆς αβ, βγ, τὸ γε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ζθ, ἴσον ἄρα τὸ γε, τῷ ζθ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αβ, τῆς αδ, ἴση δὲ ἡ μὲν βα, τῇ κα, ἡ δὲ αδ, τῇ αθ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ κα, τῆς αθ, ὡς δὲ ἡ κα, πρὸς τὴν αθ, οὕτω τὸ γκ, πρὸς τὸ γθ, διπλάσιον ἄρα τὸ κγ, τοῦ γθ, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ λθ, θγ, διπλάσια τοῦ γθ. ἴσον ἄρα τὸ κγ, τοῖς λθ, γθ, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ γε, τῷ ζθ, ἴσον, ὅλον ἄρα τὸ αε, τετράγ: ἴσόν ἐστι τῷ μνξ, γνώμονι· καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ βα, τῆς αδ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βα, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, τουτέστι τὸ αε, τοῦ δθ, ἴσον δὲ τὸ αε, τῷ μνξ, γνώμονι, καὶ ὁ μνξ, γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ δθ, ὅλον ἄρα τὸ δζ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ δθ, καὶ ἔστι τὸ μὲν δζ, τὸ ἀπὸ

Eucl. Lib. 13. Fig. 1.

τῆς γδ, τὸ δὲ δθ, τὸ ἀπὸ δα, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ, πενταπλάσιόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς δα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σχόλιον, Ἀνάλυσις καὶ Σύνθεσις τί;

Ἀνάλυσις, ἐστὶ λῆψις τοῦ ζητουμένου διὰ τῆς ἀκολούθων, ὡς ὁμολογουμένου, ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Σύνθεσις, ἐστὶ λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῆς ἀκολούθων, ἐπὶ τὸ τοῦ ζητουμένου κατάληψιν.

Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήθω κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς αβ, κείσθω ἴση ἡ αδ. Λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ δα. ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γδ, ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῆς γα, αδ, καὶ τοῦ δ′: τοῦ β′: μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ τῶν γα, αδ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν γα, αδ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα, διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς γα, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, ἀλλὰ τῷ μὲν δὶς ὑπὸ τῶν γα, αδ, κατὰ τοῦ α′: τοῦ ς′: ἴσόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, διπλῆ γὰρ ἡ βα, τῆς αδ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς αγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, κατὰ τὸν ιζ′: τοῦ ς′: ἡ γὰρ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, αγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, κατὰ τὸν β′: τοῦ β′: ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἐστὶ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, κατὰ τὸν δ′: τοῦ ς′: διπλῆ γὰρ ἡ αβ, τῆς αδ.

Σύνθεσις, τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, κατὰ τὸν θ′: τοῦ β′: ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἐστὶ, μεταὶ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὰ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, αγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἴσόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αχ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα. ὥστε καὶ τοῦ δ′: τοῦ β′: τὸ ἀπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὸ δὲ ἀπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ἐστὶ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ, ἐστὶ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς δα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δυνάται, τῆς διπλασίας τὸ ἐρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπόν μέρος ἐστὶ τῆς ὅλης ἀρχῆς εὐθείας.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, τμήματος ἑαυτῆς τὸ αγ, πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ αγ, διπλῆ ἔστω ἡ γδ. Λέγω, ὅτι τῆς γδ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ γβ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τῶν αβ, γδ, τετράγωνα τὰ αζ, γη, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ αζ, τὸ χῆμα, καὶ διήχθω ἡ ζβ, ἐπὶ τὸ ε. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ αζ, τοῦ αθ, τετραπλάσιος ἄρα ὁ μνζ, γνώμων τοῦ αθ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ δγ, τῆς γα, τετραπλ: ἄρα καὶ τὸ ά: πόρισμ: τῆς κ': τοῦ ς': τὸ ἀπὸ τῆς δγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γα, τετράκις τὸ γη, τοῦ αθ, ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ μνξ, γνώμων τετραπλάσιος τοῦ αθ, ἴσος ἄρα ὁ μνξ, γνώμων τῷ γη, καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ δγ, τῆς αγ, ἴση δὲ ἡ μὲν δγ, τῇ γκ, ἡ δὲ αγ, τῇ γθ, διπλῆ ἄρα ἡ κγ, τῆς γθ, διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ κβ, τοῦ βθ, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ λθ, θβ, διπλάσια τοῦ βθ, ἴσα γὰρ ἀλλήλοις εἰσὶ καὶ τὴν μγ': τοῦ ά: ἴσον ἄρα τὸ κβ, τοῖς λθ, θβ, ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ μνξ, γνώμων ὅλῳ τῷ γη, ἴσος, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ζθ, τῷ βη, ἐστὶν ἴσον, καὶ ἔστι τὸ μὲν βη, τὸ ὑπὸ τῶν γδ, βδ, ἴση γὰρ ἡ γδ, τῇ δη, τὸ δὲ θζ, τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν γδ, δβ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γβ, καὶ κεῖται τὴν ιζ': ἄρα τοῦ ς': ἔστιν ὡς ἡ γδ, πρὸς τὴν γβ, οὕτως ἡ γβ, πρὸς τὴν βδ, μεῖζων δὲ ἡ δγ, τῆς γβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ γβ, τῆς βδ. τῆς γδ, ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ γβ. P. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ ἐρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ὅλης ἀρχῆς εὐθείας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 13. Fig. 2.

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς αγ, μείζων ἐστὶ τῆς βγ, ὕπω δεικτέον. εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατὸν, ἡ βγ, τῆς γα, διπλῆ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γα, πενταπλάσιον ἄρα ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν βγ, γα, τοῦ ἀπὸ τῆς γα, ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς γα, καὶ τὴν δ': ἄρα τοῦ β': τὸ ἀπὸ τῆς βα, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βγ, γα, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ βγ, διπλασία τῆς αγ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἡ ἐλάττων τῆς βγ,

βγ, (διπλασίων ἐστὶ τῆς γα,) πολλῷ γὰρ μεῖζον τὸ ἄτοπον, ἡ ἄρα τῆς αγ, διπλῆ, μείζων ἐστὶ τῆς βγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τῶ Εἰρημένω Θεωρήματος ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ γδ, τμήματος ἑαυτῆς τὸ δα, πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ δα, διπλῆ κείσθω ἡ αβ. Λέγω, ὅτι ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ γ, σημεῖον, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αγ, ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. ἐπεὶ γὰρ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αγ, καὶ τιν' ις': ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, ἴσον, διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ βα, τῆς αδ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν βα, αγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τετραπλάσιον ἄρα, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ δα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τοῦ ἀπὸ τῆς αδ. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν αγ, δα, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, πενταπλάσιον δέ ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα, ἔστι δὲ διὰ τιν' ὑπόθεσιν.

Σιώθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ ἓν πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς γδ, τὰ ἀπὸ τῶν δα, αγ, ἐστὶ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα. διελόντι ἄρα τὰ δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς αδ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν δα, αγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν βα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αβ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἐστὶ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν αβ, αγ, ὅπερ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν βα, αγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γα, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ τῶν βα, αγ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν βα, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν γ, οὕτως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, μείζων δὲ ἡ βα, τῆς αγ, μείζων ἄρα καὶ ἡ αγ, τῆς γβ, ἡ αβ, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αγ.

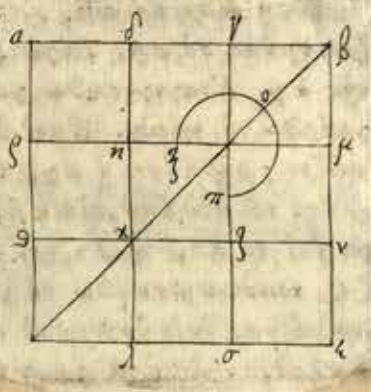
Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἔλασσον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος, πεντα-πλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω καὶ τὸ γ, σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, καὶ τετμήσθω ἡ αγ, δίχα καὶ τὸ δ. Λέγω, ὅτι πενταπλά-

πλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τῷ ἀπὸ τῆς δγ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ αε, καὶ καταγεγράφθω τὸ χῆμα. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς γδ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, τουτέστι τὸ ρσ, τῷ ζη. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ γε, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ρσ, τὸ ἄρα γε, ἴσόν ἐστι τῷ ρσ, τετραπλάσιον δὲ τὸ ρσ, τοῦ ζη, τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ γε, τοῦ ζη. καὶ πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αδ, τῇ δγ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ θκ, τῇ κζ, ὥστε καὶ τὸ ηζ, τετράγ: ἴσόν ἐστι τῷ θλ, τετραγώνῳ, ἴση ἄρα ἡ ηκ, τῇ κλ, τουτέστιν ἡ μν, τῇ νε, ὥστε καὶ τὸ μζ, ἴσόν ἐστι τῷ ζε. ἀλλὰ τὸ μζ, ἔστι καὶ τῷ γη, καὶ τὸ γε, ἄρα τῷ ζε, ἴσον, κοινὸν προσκείσθω τὸ γν, ὁ ἄρα ξοπ, γνώμων ἴσός ἐστι τῷ γε, ἀλλὰ τὸ γε, τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ ηζ, ἄρα καὶ ὁ ξοπ, γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ζη, τὸ ἄρα δν, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ηζ, τετραγ: καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν δν, τὸ ἀπὸ τῆς δβ, τὸ δὲ ηζ, τὸ ἀπὸ τῆς δγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δβ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. Lib. 13. Fig. 3.



Τῦ εἰρημένυ θεωρήματος αἰάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήθω κατὰ τὸ γ, σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ αγ, καὶ τῆς αγ, ἡμίσεια ἡ γδ. Λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τῷ ἀπὸ τῆς δγ. ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τῷ ἀπὸ τῆς γδ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς βδ, τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, διελόντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς αβ, βγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἡ γὰρ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, ἔστι γὰρ διπλῆ ἡ αγ, τῆς γδ,

Σωΐθεσις τῦ αὐτῦ.

Ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς γδ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, ἴσόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, συνῶσθω ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς δβ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

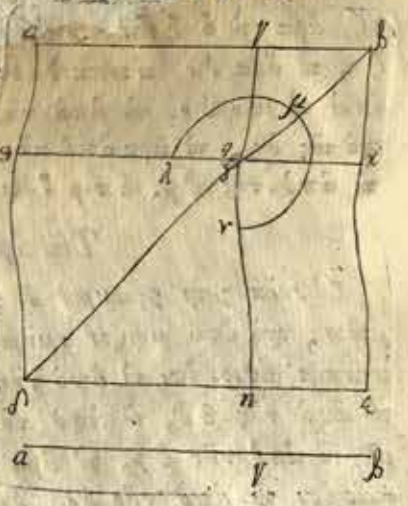
Πρό-

Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, καὶ τὸ ἐλάττονος τμήματος τὰ σύμπαντα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ αγ. Λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς αβ, τετράγωνον τὸ αδεβ, καὶ κατεγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ, καὶ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ αγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ ακ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ θκ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ακ, τῷ θκ, καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ αζ, τῷ ζε, κοινὸν προσκείσθω τὸ γκ, ὅλον ἄρα τὸ ακ, ὅλῳ τῷ γε, ἐστὶν ἴσον, τὰ ἄρα ακ, γε, τῷ ακ, ἐστὶ διπλάσια. ἀλλὰ τὰ ακ, γε, ὁ λμν, γνώμων ἐστί, καὶ τὸ γκ, τετράγωνον. ἄρα ὁ λμν, γνώμων καὶ τὸ γκ, τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ακ, ἀλλὰ μὴν τὸ ακ, τῷ θκ, ἐδείχθη ἴσον, ὁ ἄρα λμν, γνώμων, καὶ τὸ γκ, τετράγωνον, διπλάσιά ἐστι τοῦ θκ. ὥστε καὶ ὁ λμν, γνώμων, καὶ τὰ γκ, θκ, τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ κθ, τετραγώνου, καὶ ἔστιν ὁ μὲν λμν, γνώμων, καὶ τὰ γκ, θκ, τετράγωνα, ὅλον τὸ αεζ, καὶ γκ. ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετράγ: τὸ δὲ κθ, τὸ ἀπὸ τῆς αγ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τετράγ: τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 13. Fig. 4.



Τῦ ἀριμέμυ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ αγ. Λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, διελόντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν αβ, βγ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς αγ. ὥστε τὸ ὅλον ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, ἔστι δὲ, ἡ γὰρ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ.

Συ-

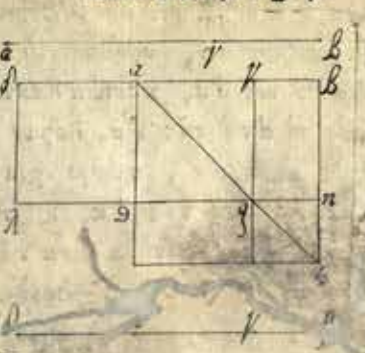
Σωσθεσις τ῀ αὐτ῀.

Ε᾽πει῀ οὖν ἡ αβ, ἄκρον κ῀ μέσον λόγον τέτμηται κ῀ τὸ γ, κ῀ ἔστι μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τ῀ αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τ῀ ἀπὸ τ῀ αγ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τ῀ αβ, βγ, διπλάσιόν ἐστι τ῀ ἀπὸ τ῀ αγ· συνθεντι, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τ῀ αβ, βγ, μ῀ τ῀ ἀπὸ τ῀ αγ, ξ῀ιπλάσιά ἐστι τ῀ ἀπὸ τ῀ αγ, ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ τ῀ αβ, βγ, μ῀ τ῀ ἀπὸ τ῀ αγ, τὰ ἀπὸ τ῀ αβ, βγ, ἐστὶ τε῀τράγωνα, τὰ ἄρα ἀπὸ τ῀ αβ, βγ, τε῀τράγωνα, ξ῀ιπλάσιά ἐστι τ῀ ἀπὸ τ῀ αγ.

Πρότασις Ε΄: Θεώρημα.

Ε᾽αν᾽ εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον κ῀ μέσον λόγον τμηθ῀ῇ, κ῀ προστεθ῀ῇ ἴση τ῀ῷ μείζονι τμήματι, ὅλη ἡ εὐθεῖα ἄκρον κ῀ μέσον λόγον τέτμηται, κ῀ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ αβ, ἄκρον κ῀ μέσον λόγον τετμήσθω κ῀ τὸ γ, κ῀ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, κ῀ τ῀ῇ αγ, ἴση κείσθω ἡ αδ. Λέγω, ὅτι ἡ δβ, εὐθεῖα, ἄκρον κ῀ μέσον λόγον τέτμηται κ῀ τὸ α, κ῀ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ αβ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τ῀ῆς αβ, τε῀τράγωνον τὸ αε, κ῀ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπει῀ οὖν ἡ αβ, ἄκρον κ῀ μέσον λόγον τέτμηται, κ῀ τὸ γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσόν ἐστι τ῀ῷ ἀπὸ τ῀ῆς αγ, κ῀ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, βγ, τὸ γε, τὸ δὲ ἀπὸ τ῀ῆς αγ, τὸ γθ. ἀλλὰ τὸ μὲν γε, ἴσόν ἐστι τ῀ῷ θε, τὸ δὲ γθ, ἴσον τ῀ῷ δθ, κ῀ τὸ δθ, ἄρα ἴσόν ἐστι τ῀ῷ θε, κοινὸν προσκείσθω τὸ θβ, ὅλον ἄρα τὸ δκ, ἴσόν ἐστιν ὅλῳ τ῀ῷ αε, κ῀ ἔστι τὸ μὲν δκ, τὸ ὑπὸ τῶν βδ, δα, ἴση γὰρ ἡ δα, τ῀ῇ δλ, τὸ δὲ αε, τ῀ῷ ἀπὸ τ῀ῆς αβ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βδ, δα, ἴσόν ἐστι τ῀ῷ ἀπὸ τ῀ῆς αβ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, μείζων δὲ ἡ δβ, τ῀ῆς βα, μείζων ἄρα κ῀ αὶ ἡ βα, τ῀ῆς αδ. ἡ ἄρα βδ, ἄκρον κ῀ μέσον λόγον τέτμηται κ῀ τὸ α, κ῀ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αβ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Ἀνάλυσις τ῀ εἰρημέν῀ θεωρήματος.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἄκρον κ῀ μέσον λόγον τετμήσθω κ῀ τὸ γ, κ῀ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ, κ῀ τ῀ῇ αγ, ἴση κείσθω ἡ αδ. Λέγω, ὅτι ἡ δβ, ἄκρον κ῀ αὶ μέσον λόγον τέτμηται κ῀ τὸ α, κ῀ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ βα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αδ. ἀλλ᾽ ἡ αδ, ἐστὶν ἴση τ῀ῇ αγ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ἡ βδ,

βδ, πρὸς τὴν δα, ἔπως ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, διελόντι ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, ἔπως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, ἴση δὲ ἡ αδ, τῇ αγ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἔπως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ. ἔστι δὲ, ἡ γὰρ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ γ.

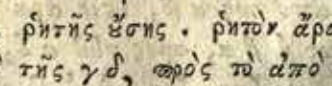
Σωίθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἔπως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ αδ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, ἔπως ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, συνθεὶς ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δα, οὕπως ἡ βα, πρὸς τὴν βγ. ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν βα, ἔπως ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ἴση δὲ ἡ αγ, τῇ αδ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν βα, ἔπως ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, ἡ ἄρα δβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ αβ.

Πρότασις ς′: Θεώρημα.

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ αβ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ αγ. λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν αγ, γβ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ βα, ἐπὶ τὸ δ, καὶ κείσθω τῆς βα, ἡμίσεια ἡ αδ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ αβ, τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, καὶ τῇ μείζονι αγ, προσκειται ἡ αδ, ἡμίσεια οὖσα τῆς αβ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ, τῷ ἀπὸ τῆς δα, πενταπλάσιόν ἐστι, καὶ τῶν παρόντος, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς γδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δα, λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς γδ, τῷ ἀπὸ τῆς δα, καὶ τῶν ι γ′: τῶν ι: ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς δα, ῥητὴ γάρ ἐστιν ἡ δα, ἡμίσεια οὖσα τῆς αβ, ῥητῆς οὔσης. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ γδ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς γδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δα, λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετρος ἄρα μήκει ἡ γδ, τῇ δα, αἱ γδ, δα, ἄρα ῥηταί, εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ αγ. πάλιν ἐπεὶ ἡ αβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ αγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αγ, ἀποτομῆς, παρὰ τὴν αβ, ῥητὴν παραβληθὲν, πλάτος ποιεῖ τὴν βγ, τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς, καὶ τῶν ιζ′: τῶν ι: παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον, πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην, ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἡ γβ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ αγ, ἀποτομή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

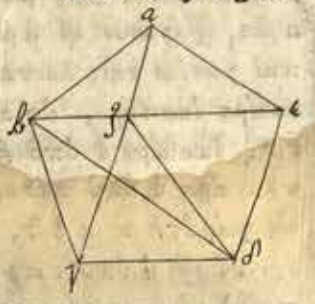


Πρό-

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι, ἤτοι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς, ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς ἴσαι ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ αβγδε, αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς, αἱ πρὸς τοῖς α, β, γ, δηλονότι ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν. Λέγω, ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ αβγδε πεντάγωνον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, βε, ζδ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ γβ, βα, δυσὶ ταῖς βα, αε, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γβα, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βαε, βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ βε, ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ δ': τοῦ δ': καὶ τὸ αβγ, τριγώνου τῷ αβε, τριγώνου ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ βγα, τῇ ὑπὸ βεα, ἡ δὲ ὑπὸ αβε, τῇ ὑπὸ γαβ, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ αζ, πλευρᾷ τῇ βζ, ἐστὶν ἴση, ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ αγ, ὅλῃ τῇ βε, ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ζγ, λοιπῇ τῇ ζε, ἐστὶν ἴση· ἔστι δὲ καὶ ἡ γδ, τῇ δε, ἴση· δύο δὴ αἱ ζγ, γδ, δυσὶ ταῖς ζε, εδ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ζδ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ζγδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζεδ, ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ ἡ ὑπὸ βγα, γωνία τῇ ὑπὸ αεβ, ἴση, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αεδ, ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ βγδ, ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς α, β, καὶ ἡ ὑπὸ αεδ, ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς α, β, γωνίαις, ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ γδε, ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς α, β, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγδε, πεντάγωνον.



Eucl. lib. 13. Fig. 6.

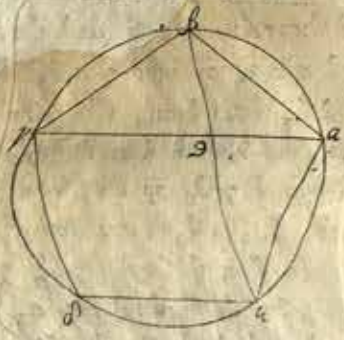
Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς γωνίαι. ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι, αἱ πρὸς τοῖς α, γ, δ, σημείοις. Λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ πεντάγωνον. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ βδ, καὶ ἐπεὶ δύο αἱ βα, αε, δυσὶ ταῖς βγ, γδ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ βε, βάσει τῇ βδ, ἴση ἐστὶ· καὶ τὸ αβε, τρίγωνον, τῷ βγδ, τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αεβ, τῇ ὑπὸ γδβ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βεδ, γωνία τῇ ὑπὸ βδε, ἴση, ἐπεὶ πλευρὰ ἡ βε, πλευρᾷ τῇ βδ, ἐστὶν ἴση, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αεδ, γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ γδε, ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ γδε, ταῖς πρὸς τοῖς α, γ, γωνίαις ὑπόκειται ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αεδ, ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς α, γ, ἴση ἐστὶ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ αβγ, ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς α, γ, γωνίαις, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβγδε, πεντάγωνον.

Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς ἀπὸ τοῦ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ αβγδε, δύο γωνίας τὰς ἀπὸ τοῦ ἑξῆς πρὸς τοῖς α, β, ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι, αἱ αγ, βε, τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ θ, σημεῖον. Λέγω, ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ θ, σημεῖον, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα, ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ αβγδε, πεντάγωνον, κύκλος ὁ αβγδε, καὶ εἰλήφθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ αε, αβ, δυσὶ ταῖς αβ, βγ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ βε, βάσει τῇ αγ, ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβε, τρίγωνον τῷ αβγ, τριγ: ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ βαγ, γωνία τῇ ὑπὸ αβε. διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ αθε, τῆς ὑπὸ βαθ, γωνίας, ἐπεὶ καὶ περιφέρεια ἡ εδγ, περιφερείας τῆς γβ, διπλῆ ἐστὶν, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ θαε, γωνία τῇ ὑπὸ αθε, ὥστε καὶ ἡ θε, εὐθεῖα τῇ εα, τουτέστι τῇ αβ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βα, τῇ αε, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβε, τῇ ὑπὸ βεα. ἀλλ' ἡ ὑπὸ αβε, τῇ ὑπὸ βαθ, ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ βεα, ἄρα τῇ ὑπὸ βαθ, ἐστὶν ἴση, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ αβε, καὶ τοῦ αβθ, ἐστὶν ἡ ὑπὸ αβε, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βαε, γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ αθβ, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αβε, τρίγ: τῷ αβθ, τριγ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ εβ, πρὸς τὴν βα, οὕτως ἡ βα, πρὸς τὴν βθ, ἴση δὲ ἡ βα, τῇ εθ. ὡς ἄρα ἡ βε, πρὸς τὴν εθ, οὕτως ἡ εθ, πρὸς τὴν θβ, μείζων δὲ ἡ βε, τῆς βα, μείζων ἄρα καὶ ἡ εθ, τῆς θβ, ἡ βε, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ θ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἴσόν ἐστι τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ αγ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ θ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα τὸ γθ, ἴσόν ἐστι τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euel. Lib. 13. Fig. 7.



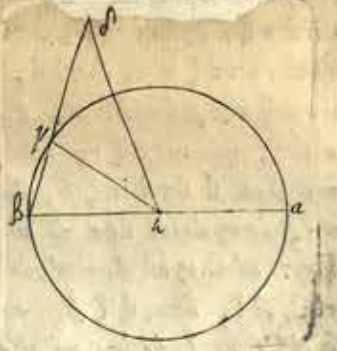
Πρό-

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Ε'αν ἡ τοῦ ἐξαγώνου πλευρά, καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων σωτεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ τοῦ ἐξαγώνου πλευρά.

Ε"στω κύκλος ὁ αβγ, καὶ τοῦ εἰς τὸν αβγ, κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ βγ, ἑξαγώνου δὲ ἡ γδ, καὶ ἔστωσαν ἐπ' εὐθείας. Λέγω, ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ βδ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ γ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ γδ. Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ ε, σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εβ, εγ, εδ, καὶ διήχθω ἡ βε, ἐπὶ τὸ α, καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ, ἐστὶν ἡ βγ, πενταπλασίων ἄρα ἡ αγβ, περιφέρεια τῆς βγ, περιφερείας, πεξαπλασίων ἄρα ἡ αγ, περιφέρεια τῆς γβ, ὡς δὲ ἡ αγ, περιφέρεια πρὸς τὴν γβ, οὕτως ἡ ὑπὸ αεγ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ γεβ, πεξαπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ αεγ, τῆς ὑπὸ γεβ, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εβγ, γωνία τῇ ὑπὸ εγβ, ἡ ἄρα ὑπὸ αεγ, γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ εγβ, καὶ τὴν λβ'. τῇ α'. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ εγ, εὐθεῖα τῇ γδ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, τῷ εἰς τὸν αβγ, κύκλον ἐγγραφομένῳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γεδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γδε, διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ εγβ, τῆς ὑπὸ εδγ. ἀλλὰ τῆς μὲν ὑπὸ εγβ, διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ αεγ, τεξαπλασία ἄρα τῆς ὑπὸ εδγ, ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ βεγ, τεξαπλασία ἡ ὑπὸ αεγ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ εδγ, τῇ ὑπὸ βεγ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε βεγ, καὶ τοῦ βεδ, ἡ ὑπὸ εβδ, γωνία, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ βεδ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ εγβ, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα τὸ εβδ, τριγώνον τῷ εβγ, τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βε, οὕτως ἡ εβ, πρὸς τὴν βγ, ἴση δὲ ἡ εβ, τῇ γδ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δγ, οὕτως ἡ δγ, πρὸς τὴν γβ, μείζων δὲ ἡ βδ, τῆς δγ, μείζων ἄρα καὶ ἡ δγ, τῆς γβ, ἡ βδ, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς, ἐστὶν ἡ δγ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 8.



Πρότασις Ι'. Πρόβλημα.

Ε'αν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου, καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τὴν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένων.

Ε"στω κύκλος ὁ αβγδε, καὶ εἰς αὐτὸν πενταγώνου ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ αβγδε. Λέγω, ὅτι τοῦ αβγδε, πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξα-

γώνου,

γώνε, καὶ τὴν τε πενταγώνε τὴν εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγραφομένων. εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τε κύκλε τὸ ζ, καὶ ἐπιζεύχθεῖσα ἡ αζ, διήχθω ἐπὶ τὸ η, σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζβ, καὶ ἀπὸ τε ζ, ἐπὶ τὴν αβ, κάθετος ἐχθήτω ἡ ζθ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ακ, κβ. καὶ πάλιν ἀπὸ τε ζ, ἐπὶ τὴν ακ, κάθετος ἤχθω ἡ ζλ. καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ κν, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβγη, περιφέρεια τῇ αεδη, περιφερείᾳ, ὧν ἡ αβγ, τῇ αεδ, ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ γη, περιφέρεια λοιπῇ τῇ δη, ἐστὶν ἴση, πενταγώνε γὰρ ἡ γδ, δεκαγώνε ἄρα ἡ γη, καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ζα, τῇ ζβ, καὶ κάθετος ἡ ζθ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αζκ, γωνία τῇ ὑπὸ κζβ, ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ ακ, τῇ κβ, ἐστὶν ἴση, διπλῆ ἄρα ἡ αβ, περιφέρεια τῆς βκ, περιφερείας, δεκαγώνε ἄρα πλευρὰ, ἐστὶν ἡ ακ, εὐθεῖα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ακ, τῆς κμ, ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ αβ, περιφέρεια τῆς βκ, περιφερ: ἴση δὲ ἡ γδ, περιφέρεια τῇ αβ, περιφερείᾳ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ γδ, περιφέρεια τῆς βκ, περιφερ: ἔστι δὲ ἡ γδ, περιφέρεια τῆς γη, διπλῆ, ἴση ἄρα ἡ γη, περιφερ: τῇ βκ, περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ βκ, τῆς κμ, ἐστὶ διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ ακ, καὶ ἡ γη, ἄρα τῆς κμ, διπλῆ ἐστιν, ἴση γὰρ ἡ γβ, περιφέρεια, τῇ βα, περιφερ: καὶ ὅλη ἄρα ἡ νβ, περιφέρεια τῆς βμ, ἐστὶ διπλῆ, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ νζβ, γωνίας τῆς ὑπὸ βζμ, διπλῆ ἐστι καὶ τῶν λγ': τῆ ε': ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ νζβ, καὶ τῆς ὑπὸ ζαβ, διπλῆ, ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ζαβ, τῇ ὑπὸ αβζ, καὶ ἡ ὑπὸ βζν, ἄρα τῇ ὑπὸ ζαβ, ἐστὶν ἴση, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τῶν αβζ, καὶ τῆ βζν, ἡ ὑπὸ αβζ, γωνία ἐστί. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αζβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βνζ, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα καὶ τὸ αβζ, τρίγωνον, τῷ βζν, τριγ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ αβ, εὐθεῖα πρὸς τὴν βζ, οὕτως ἡ ζβ, πρὸς τὴν βν, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βν, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ζβ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αλ, τῇ λκ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ λν, βάσις ἄρα ἡ κν, βάσει τῇ αν, ἐστὶν ἴση, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ λκν, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ λαν, ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ λαν, τῇ ὑπὸ κβν, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ λκν, ἄρα τῇ ὑπὸ κβν, ἐστὶν ἴση, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων, τε ακβ, καὶ τοῦ ακν, ἡ ὑπὸ νακ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ακβ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ κνα, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ κβα, τρίγ: τῷ ενα, τριγ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ βα, εὐθεῖα πρὸς τὴν ακ, οὕτως ἡ κα, πρὸς τὴν αν, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βα, αν, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ακ, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῶν αβ, βν, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς αζ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βν, μετὰ τε ὑπὸ τῶν βα, αν, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς βζ, μετὰ τε ἀπὸ τῆς ακ, καὶ ἔστιν ἡ μὲν βα, πενταγώνε πλευρὰ, ἡ δὲ βζ, ἑξαγώνε, ἡ δὲ ακ, δεκαγώνε, ἡ ἄρα τε πενταγώνε πλευρὰ δυνάται τήν τε τε ἑξαγώνε, καὶ τὴν τε δεκαγώνε, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 13. Fig. 9.

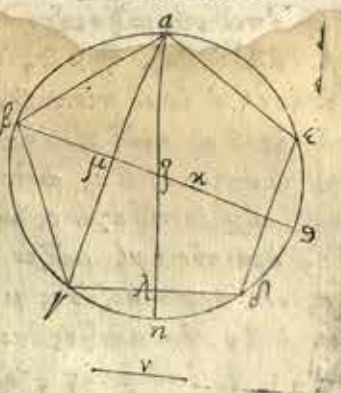
Πρό-

Πρότασις ΙΑ'. Θεώρημα.

Ε'αν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν αβγδε, ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον, πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ αβγδε. Λέγω, ὅτι ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἡ αβ, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ζ, σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αζ, ζβ, καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ η, θ, σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αγ, καὶ κείσθω τῆς αζ, τέταρτον μέρος ἡ ζκ, ῥητὴ δὲ ἡ αζ, ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ζκ, ἔστι δὲ καὶ ἡ βζ, ῥητή, ὅλη ἄρα ἡ βκ, ῥητή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αγ η, περιφέρεια τῇ αδη, περιφέρεια, ὧν ἡ αβγ, τῇ αεδ, ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ γη, λοιπῇ τῇ ηδ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν αδ, συνάγονται ὀρθαὶ, καὶ τὰ ά πόρισμ. τῆς γ'. τοῦ γ'. αἱ πρὸς τῷ λ, γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ γδ, τῆς γλ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τῷ μ, ὀρθαί εἰσι, καὶ διπλῆ ἡ αγ, τῆς γμ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ αλγ, γωνία τῇ ὑπὸ αμζ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε αλγ, καὶ τοῦ αμζ, ἡ ὑπὸ λαγ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αγλ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ μζα, ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα τὸ αγλ, τρίγωνον τῷ αμζ, τριγώνῳ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ λγ, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὴν ζα, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἄρα ἡ τῆς λγ, διπλῆ πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ τῆς μζ, διπλῆ πρὸς τὴν ζα, ἀλλ' ὡς ἡ τῆς μζ, διπλῆ πρὸς τὴν ζα, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ζα, καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆς λγ, διπλῆ πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ζα, καὶ τῶν ἑπομένων τὰ ἡμίση, ὡς ἄρα ἡ τῆς γλ, διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς γα, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ζα, καὶ ἔστι τῆς μὲν λγ, διπλῆ ἡ δγ, τῆς δὲ γα, ἡμίσεια ἡ γμ, τῆς δὲ ζα, τέταρτον μέρος ἡ ζκ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δγ, πρὸς τὴν γμ, οὕτως ἡ μζ, πρὸς τὴν ζκ. συνθέντι, ἄρα καὶ ὡς συναμφότερος ἡ δγμ, πρὸς τὴν γμ, οὕτως ἡ μκ, πρὸς τὴν ζκ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου δγμ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γμ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς μκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κζ. καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης, οἷον τῆς αγ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, τετράκι τῇ δγ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης, καπὶ τὴν ά. τοῦ παρόντος, πενταπλάσιον δύναται, τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, καὶ ἔστιν ὅλης τῆς αγ, ἡμίσεια ἡ γμ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δγμ,

Euclid. Lib. 13. Fig. 10.



δγμ, ὡς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς γμ, ὡς δὴ τὸ ἀπὸ τῆς δγμ, ὡς μιᾶς, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γμ, ὅπως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς μκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κζ, πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς μκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κζ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς κζ, ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς μκ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ μκ, λόγον γὰρ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, τὸ ἀπὸ τῆς μκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κζ. καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ βζ, τῆς ζκ, πενταπλασία ἄρα ἡ βκ, τῆς κζ, εἰκοσιπενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βκ, τοῦ ἀπὸ τῆς ζκ, πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς μκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κζ, πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κμ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κμ, λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ βκ, τῇ κμ, μήκει, καὶ εἰσὶ ῥηταὶ ἑκατέρα αὐτῶν, αἱ βκ, κμ, ἄρα ῥηταί εἰσι, δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν, ἀποτομὴ ἄρα ἡ βμ. προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ μκ. λέγω δή, ὅτι καὶ τετάρτη, ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βκ, τὸ ἀπὸ τῆς κμ, ἐκείνῳ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ν, ἡ βκ, ἄρα τῆς κμ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ κζ, τῇ ζβ, καὶ συνθέντι σύμμετρός ἐστιν ἡ κβ, τῇ ζβ. ἀλλ' ἡ βζ, τῇ βϑ, σύμμετρός ἐστι μήκει, καὶ ἡ βκ, ἄρα τῇ βϑ, σύμμετρός ἐστι. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κμ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κμ, λόγον ἔχει, ὃν πέντε πρὸς εν, ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βκ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ν, λόγον ἔχει, ὃν ὁ πέντε πρὸς τὸν τέσσαρα, οὐκ ὂν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ βκ, τῇ ν. ἡ βκ, ἄρα τῆς κμ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ βκ, τῆς προσαρμοζούσης μκ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ὅλη ἡ βκ, ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ βϑ. ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ μβ, τὸ δὲ ἀπὸ ῥητῆς, καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐλάττων, δύναται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ϑβ, βμ, ἡ αβ, διὰ τὸ, ἐπιζευγνυμένης τῆς αϑ, ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ αβϑ, τρίγωνον τῷ αβμ, καὶ εἶναι ὡς τὴν ϑβ, πρὸς τὴν βα, οὕτω τὴν αβ, πρὸς τὴν βμ, ἡ ἄρα αβ, τὴν πενταγώνου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρον, τὸ αβγ. λέγω, ὅτι ἡ τοῦ αβγ, τρι: μία πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ αδ, διήχθω ἐπὶ τὸ ε,

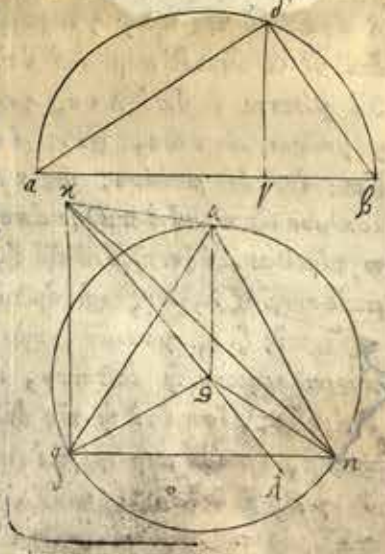
τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βε, καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ αβγ, ξίγων· ἡ βεγ, ἄρα περιφέρεια ξίπου μέρος ἐστὶ τῆς τὸ αβγ, κύκλου περιφερείας, ἡ ἄρα βε, περιφέρεια ἕκτον μέρος ἐστὶ τῆς τὸ κύκλου περιφερείας, ἑξάγωνος ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ βε, δύθεῖα, ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ ἐκ τὸ κέντρου τῇ δε· καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αε, τῆς δε, τετράπλασιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αε, τὸ ἀπὸ τῆς δε, τετράκις τὸ ἀπὸ τῆς βε, ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αε, τοῖς ἀπὸ τῶν αβ, βε, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν αβ, βε, τετράπλασιά ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βε, διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, ξιπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βε, ἴση δὲ ἡ βε, τῇ δε, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς αβ, ξιπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς δε, ἡ ἄρα τὸ ξιγώνου πλευρὰ δυνάμει ξιπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τὸ κέντρου τὸ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 13. Fig. 11.

IB΄.

Πρότασις ΙΓ΄: Πρόβλημα.

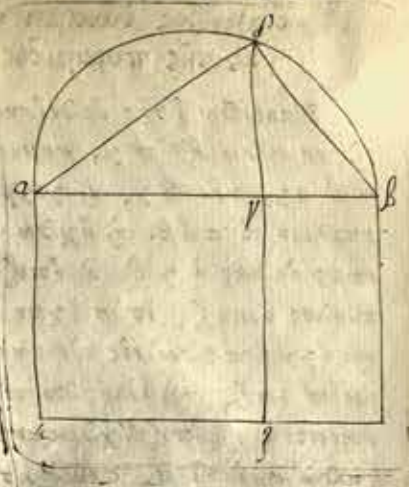
Πυραμίδα συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.



Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, σημεῖον. ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν αγ, τῆς βγ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αδβ. καὶ ἤχθω ἀπὸ τὸ γ, σημείου τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἡ γδ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δα, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ εζ, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τὸ κέντρου τῇ δγ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εηζ, κύκλον ξίγ: ἰσόπλευρον τὸ εηζ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ κύκλου τὸ θ, σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εθ, θζ, θη, καὶ ἀνεστάθω ἀπὸ τὸ θ, σημείου τῷ τὸ εζη, κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ θκ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς θκ, τῇ αγ, δυθείᾳ ἴση ἡ θκ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κε, κζ, κη, καὶ ἐπεὶ ἡ κθ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τὸ εζη, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς δυθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τὸ εζη, κύκλ: ἐπίπεδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν θε, θζ, θη, ἡ θκ, ἄρα πρὸς ἑκάστην τῶν θε, θζ, θη, ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αγ, τῇ θκ, ἡ δὲ γδ, τῇ θε, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ δα, βάσει τῇ κε, ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν κζ, κη, τῇ δα, ἐστὶν ἴση, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ κε, κζ, κη, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς γβ, τριπλῆ ἄρα ἡ αβ, τῆς βγ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν

βγ, ὕπω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται, ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ὕπω τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ, ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, ὕπω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, καὶ τὸ πόρισμα τῆς ιθ'. τῶ ε'. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται, ξιπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τῶ ἀπὸ τῆς δγ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζε, τῶ ἀπὸ τῆς εθ, ξιπλάσιον, καὶ τὴν αὐτὴν, καὶ ἔστιν ἴση ἡ δγ, τῇ εθ, ἴση ἄρα καὶ ἡ δα, τῇ εζ. ἀλλ' ἡ δα, ἑκάστῃ τῶν κε, κζ, κη, ἐδείχθη ἴση, καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν εζ, ζη, ηε, ἑκάστῃ τῶν κε, κζ, κη, ἐστὶν ἴση, πυραμὶς ἄρα συνίσταται ἐκ τεσσάρων ξιγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ εζη, ξίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ κ, σημεῖον. Δεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ θκ, εὐθεῖα ἡ θλ, καὶ κείσθω τῇ βγ, ἴση ἡ θλ, καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν γδ, ὕπως ἡ γδ, πρὸς τὴν γβ. ἴση δὲ ἡ μὲν αγ, τῇ κθ, ἡ δὲ γδ, τῇ θε, ἡ δὲ γβ, τῇ θλ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ κθ, πρὸς τὴν θε, ὕπως ἡ εθ, πρὸς τὴν θλ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν κθ, θλ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς θε. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ κθε, εθλ, γωνιῶν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς κλ, γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει διὰ τοῦ ε. ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ελ, ὀρθὴ γίνεται ἡ ὑπὸ λεκ, γωνία, διὰ τὸ ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ ελκ, ξίγ: ἑκατέρῳ τῶν ελθ, εθκ, ξιγ: ἐὰν δὲ μενούσης τῆς κλ, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν ζ, η, σημείων, ἐπιζευγνυμένων τῶν ζλ, λη, καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γινομένων τῶν πρὸς τοῖς ζ, η, γωνιῶν, καὶ ἔσται ἡ πυραμὶς σφαίρᾳ περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ, ἡ γὰρ κλ, τῆς σφαίρας διάμετρος, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ αβ, ἐπειδήπερ τῇ μὲν αγ, ἴση κεῖται ἡ κθ, τῇ δὲ γβ, ἡ θλ. Λέγω δὴ, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς γβ, ξιπλῆ ἄρα ἡ αβ, τῆς βγ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἡμιολία ἐστὶν ἡ αβ, τῆς αγ· ὡς δὲ ἡ βα, πρὸς τὴν αγ, ὕπως τὸ ἀπὸ τῆς βα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αδ. ἐπειδήπερ ἐπιζευγνυμένης τῆς βδ, ἔστιν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕπως ἡ δα, πρὸς τὴν αγ, διὰ τὸ ὁμοιότροπα τῶν δαβ, δαγ, ξιγώνων, καὶ εἶναι ὡς τὴν α: πρὸς τὴν γ: ὕπω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β': ἡμιόλιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, τῶ ἀπὸ τῆς αδ, καὶ ἔστιν ἡ μὲν βα, ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ δ, ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος, ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Eucl. Lib. 13. Fig. 12.



ΛΗ ΜΜ-

ΛΗΜΜΑ.

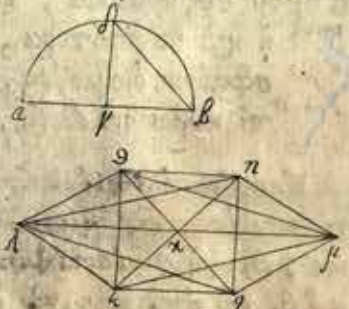
Δεικτέον δή, ὅτι ἐστὶν, ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ, ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφὴ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς αγ, τετράγωνον τὸ εγ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ζβ, παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ δαβ, τριγώνῳ τῷ δαγ, τριγώνῳ, ἔστιν ὡς ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτως ἡ δα, πρὸς τὴν αγ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αδ, καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ εβ, πρὸς τὸ ζβ, καὶ ἔστι τὸ μὲν εβ, τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἴση γὰρ ἡ εα, τῇ αγ, τὸ δὲ βζ, τῷ ὑπὸ τῶν αγ, γβ, ὡς ἄρα ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν βα, αγ, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν αγ, βγ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν βα, αγ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς αδ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν αγ, γβ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς δγ, ἡ γὰρ δγ, καθέτος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων, τῶν αγ, γβ, μέση ἀνάλογόν ἐστιν. διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ αδβ, ὡς ἄρα ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αδ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δγ.

Πρότασις ΙΔ'. Πρόβλημα.

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ἡμῖν καὶ τὴν πυραμίδα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

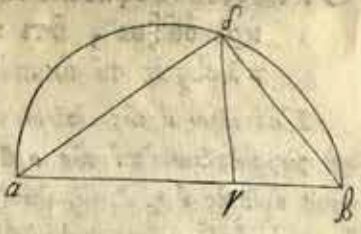
Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ γ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αδβ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ γ, τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἡ γδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ. καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ εζηϑ, ἴσον ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ βδ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ϑζ, εη. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ κ, σημείου τῷ τοῦ εζηϑ, τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς αὐθείας ἡ κλ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου, ὡς ἡ κμ, καὶ ἀφῃρήσθω ἑφ' ἑκατέρας τῶν κλ, κμ, μιᾷ τῶν κε, κζ, κη, κϑ, ἴση ἑκατέρα τῶν κλ, κμ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ λε, λζ, λη, λϑ, με, μζ, μη, μϑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ κε, τῇ κϑ, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ εκϑ, γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ϑε, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εκ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ λκ, τῇ κε, καὶ ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ λκε, γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ελ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κε, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ϑε, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς εκ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς λε, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς εϑ, ἴση ἄρα ἡ λε, τῇ εϑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ λϑ, τῇ ϑε, ἐστὶν ἴση, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ λεϑ, τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ τοῦ εζηϑ, τετραγώνου πλευραὶ, κορυφαὶ δὲ τὰ λ, μ, σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν, ὀκτάεδρον ἄρα συνέστατα

Eucl. Lib. 13. Fig. 13.



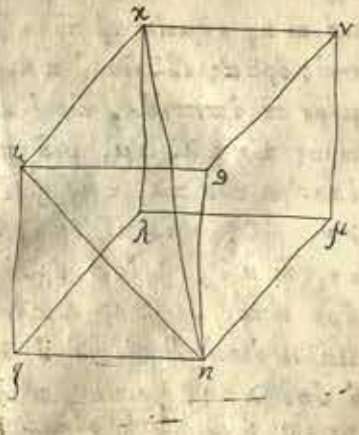
ὑπὸ ὀκτὼ ἰσογωνίων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαῖρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς. ἐπεὶ γὰρ αἱ ξε, κμ, κε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς λμ, γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ ε. καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ, ἐὰν μενούσης τῆς λμ, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν ζ, η, θ, σημείων, καὶ ἔσται σφαῖρα περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ, ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ λκ, τῇ κμ, κοινὴ δὲ ἡ κε, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ λε, βάσει τῇ εμ, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ λεμ, γωνία, ἐν ἡμικυκλίῳ γὰρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς λμ, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς λε. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ γβ, διπλασία ἐστὶν ἡ αβ, τῆς βγ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δβ, διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βδ, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς λμ, διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς λε, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς βδ, τῷ ἀπὸ τῆς λε, ἴση γὰρ κεῖται ἡ εθ, τῇ δβ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῷ ἀπὸ τῆς λμ, ἴση ἄρα ἡ αβ, τῇ λμ, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ λμ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ, περιείληπται τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ, καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

Euclid. lib. 13. Fig. 14.



Πρότασις ΙΕ'. Πρόβλημα.

Κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ἥ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

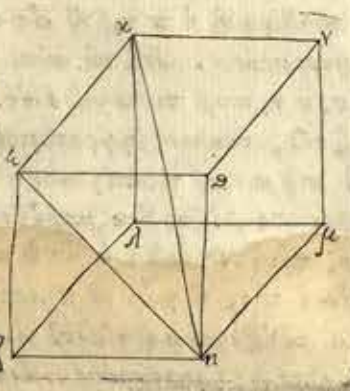


Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, ὥστε διπλοῦν εἶναι τὸν αγ, τοῦ γβ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αδβ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ, τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ γδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ εζηθ, ἴσην ἔχον ἑκάστην πλευρὰν τῇ δβ, καὶ ἀπὸ τῶν ε, ζ, η, θ, τῷ τοῦ εζηθ, τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ κε, ζλ, ημ, θν, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀφ' ἑκάστης τῶν εκ, ζλ, ημ, θν, μιᾷ τῶν εζ, ζη, ηθ, θε, ἴση ἑκάστη τῶν εκ, ζλ, ημ, θν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κλ, λμ, μν, νκ, κύβος ἄρα συνίσταται ὁ ζν, ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενος.

Δεῖ

Δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἑξαπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ κη, ηε, καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ κεη, γωνία, διὰ τὸ καὶ τὸν κε, ὀρθὸν εἶναι πρὸς τὸ εη, ἐπίπεδον, δηλ: καὶ πρὸς τὴν εη, εὐθείαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς κη, γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τῶν ε, η, σημείων. Πάλιν ἐπεὶ ἡ ζη, ὀρθὴ ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ζλ, ζε, καὶ πρὸς τὸ κζ, ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν ἡ ζη, ὥστε κἂν ἐπιζεύξωμεν τὴν ζκ, ἡ ζη, ὀρθὴ ἔσται καὶ πρὸς τὴν ζκ· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς ηκ, γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ ζ. ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς κη, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται σφαῖρα περιειλημμένος ὁ κύβος. Λέγω δὴ καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ζη, τῇ ζε, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ ζ, γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς εη, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εζ, ἴση δὲ ἡ εζ, τῇ εκ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς εη, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εκ. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ηε, εκ, τετράκις τὸ ἀπὸ τῆς κη, ἑξαπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς εκ· καὶ ἐπεὶ ἑξαπλασίων ἐστὶν ἡ αβ, τῆς βγ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, ἑξαπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βδ, ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ηκ, τοῦ ἀπὸ τῆς κε, ἑξαπλάσιον, καὶ κεῖται ἴση τῇ βδ, ἡ κε, ἴση ἄρα καὶ ἡ κη, τῇ αβ, καὶ ἔστιν ἡ αβ, τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, καὶ ἡ κη, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιείληπται ὁ κύβος, καὶ συγκατέδειχται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἑξαπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclid. Lib. 13. Fig. 15.



Πρότασις Ις΄: Πρόβλημα.

Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ἣ καὶ τὰ ἐφεξῆς σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάττων.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ. ὥστε τετραπλοῦν εἶναι τὸν αγ, τοῦ γβ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αδβ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ γ, σημείου τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ γδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ. καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ εζηθ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἐστὶ τῇ δβ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν εζηθ, κύκλον, πενταγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου τὸ εζηθκ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ εζ, ζη, ηθ, θκ, κε, περιφέρειαι

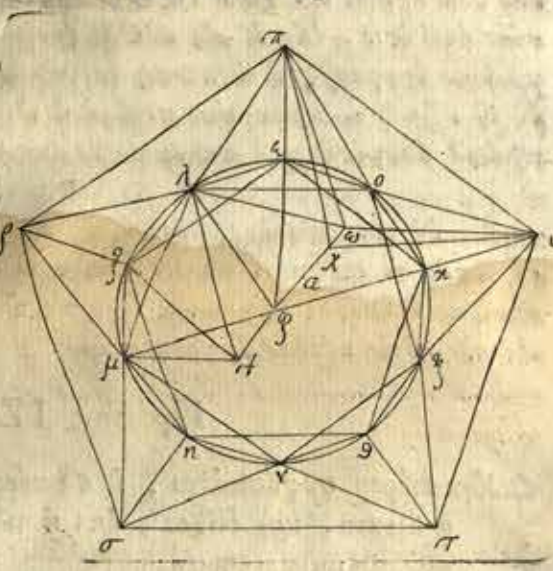
δίχα

δίχα κατὰ τὰ λ, μ, ν, ξ, ο, σημεῖα. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ελ, λζ, ζμ, μη, ηι, ιθ, θξ, ξκ, κο, οε. ὁμοίως δὴ καὶ αἱ λμ, μν, νξ, ξο, ολ, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ λμνξο πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ εο, διάμετρος. καὶ ἀνεσάθωσαν ἀπὸ τῶν ε, ζ, η, θ, κ, σημείων τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας διάμετροι αἱ επ, ζρ, ησ, θτ, κυ, ἴσαι οὖσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ εζηθκ, κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ πρ, ρσ, στ, τυ, υπ, πλ, λρ, ρμ, μσ, σν, ντ, τξ, ξυ, υο, οπ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν επ, κυ, τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ επ, τῇ κυ, ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ ἴση, καὶ αἱ τὰς ἴσας καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι, καὶ πυ, ἄρα τῇ εκ, ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, πεντάγωνον δὲ ἰσόπλευρον ἡ εκ, πεντάγωνον ἄρα ἰσόπλευρον καὶ ἡ πυ, τοῦ εἰς τὸν εζηθκ, κύκλον ἐγγραφομένου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν πρ, ρσ, στ, τυ, πεντάγωνόν ἐστιν ἰσόπλευρον τοῦ εἰς τὸν εζηθ, κύκλον ἐγγραφομένου, ἰσόπλευρον ἄρα καὶ τὸ πρστυ, πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ καθ' ἑκάτερον τῶν παράκρων, ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ πε, δεκαγώνου δὲ ἡ εο, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ πεο, πεντάγωνον ἄρα ἐστὶν ἡ πο, ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ, δύναται τὴν τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τοῖς εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένοις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ου, πεντάγωνόν ἐστι πλευρὰ, ἔστι δὲ καὶ ἡ πυ, πεντάγωνον, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ πουξ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν πλρ, ρμσ, σντ, τξυ, τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ πεντάγωνόν ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν πλ, πο, ἔστι δὲ καὶ ἡ λο, πεντάγωνον, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ πλο. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λρμ, μσν, ντξ, ξυ, τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τοῦ εζηθκ, τὸ φ, σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ φ, τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεσάθω ἡ φω, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη, ὡς ἡ φψ, καὶ ἀφῃρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ φχ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν φψ, χω. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ πω, πχ, υχ, υω, ωρ, λφ, λψ, ψμ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν φχ, πε, τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ φχ, τῇ πε, εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι, καὶ αἱ εφ, πχ, ἄρα ἴσαί τε καὶ παράλληλοί εἰσιν, ἑξαγώνου δὲ ἡ εφ, ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ πχ, καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου ἐστὶν ἡ πχ, δεκαγώνου δὲ ἡ χω, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ πχω, γωνία, πεντάγωνον ἄρα ἐστὶν ἡ πω. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ υω, πεντάγωνόν ἐστιν. Ἐπειδὴ περ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς φκ, κυ, ἴσαι καὶ ἀπεναντίον ἔσονται, καὶ ἔστιν ἡ φκ, ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα, ἑξαγώνου, ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ κυ, δεκαγώνου δὲ ἡ χω, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ υχω, πεντάγωνον ἄρα ἡ υω, ἔστι δὲ καὶ ἡ πυ, πεντάγωνον, ἰσόπλευρος ἄρα τὸ πυω, τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων,

Eucl. lib. 13. Fig. 16.

ναν, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ πρ, ρσ, στ, τυ, εὐθεῖαι, κορυφὴ δὲ τὸ ω, σημεῖον ἰσόπλευρόν ἐστι. Πάλιν ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἡ φχ, δεκαγώνου δὲ ἡ φψ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ λφψ, γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ λψ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν μφ, ἴσαν ἑξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ μψ, πενταγώνου, ἔστι δὲ καὶ ἡ λμ, πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ λμψ, τρίγωνον. ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ μν, νξ, ξο, ολ, κορυφὴ δὲ τὸ ψ, σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστι. συνίσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων περιεχόμενον. Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. Ἐπειδὴ γὰρ ἑξαγώνου μέν ἡ φχ, δεκαγώνου δὲ ἡ χω, ἡ φω, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ χ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ φχ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ωφ, πρὸς τὴν φχ, οὕτως ἡ φχ, πρὸς τὴν χω, ἴση δὲ ἡ μέν φχ, τῇ φλ, ἡ δὲ χω, τῇ φψ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ωφ, πρὸς τὴν φλ, οὕτως ἡ φλ, πρὸς τὴν φψ, καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ωφλ, λφψ, γωνίαι. ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν λω, εὐθεῖαν, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ ψλω, γωνία, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ψλφ, φλω, τριγώνων. τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ψω, γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ωφ, πρὸς τὴν φχ, οὕτως ἡ φχ, πρὸς τὴν χω, ἴση δὲ ἡ μέν ωφ, τῇ ψχ, ἡ δὲ φχ, τῇ χτ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ψχ, πρὸς τὴν χω, οὕτως ἡ πχ, πρὸς τὴν χω. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν, ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν πψ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῇ π, γωνία, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ψω, γραφόμενον ἡμικύκλιον, ἥξει καὶ διὰ τοῦ π. καὶ ἐὰν μενούσης τῆς ψω, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τοῦ π, καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ εἰκοσάεδρον. Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. Τετμήσθω γὰρ ἡ φχ, δίχα κατὰ τὸ α, καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ φω, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ χ, καὶ τὸ ἔλαττον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ ωχ, ἡ ἀπὸ - χ, τοῦ λαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν χα, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος. πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ωα, τοῦ ἀπὸ τῆς αχ, καὶ ἔστι τῆς μέν αω, διπλῆ ἡ ωψ, τῆς δὲ αχ, διπλῆ ἡ χφ. πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ωψ, τοῦ ἀπὸ τῆς χφ, καὶ ἐπεὶ τετραπλάσιόν ἐστι

Eucl. Lib. 13. Fig. 17.



ἐστὶν ἡ αγ, τῆς βγ, πενταπλασίων ἄρα ἡ αβ, τῆς βγ, ἐστὶν, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ. πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βδ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ωψ, πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς φχ, καὶ ἔστιν ἡ δβ, ἴση τῇ φχ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, τοῦ εζηθκ. ἴση ἄρα καὶ ἡ αβ, τῇ ψω, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, καὶ ἡ ψω, ἄρα τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ ἴση ἐστί. Τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον. Λέγω, ὅτι καὶ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Ἐπεὶ γὰρ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ εζηθκ, κύκλου, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ εζηθκ, κύκλου, ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητή ἐστιν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἡ δὲ τοῦ εζηθκ, πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστὶν, ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος συγκειται ἔκτε τῆς τοῦ ἑξαγώνου, καὶ τῶν δύο τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Πρότασις ΙΖ'. Πρόβλημα.

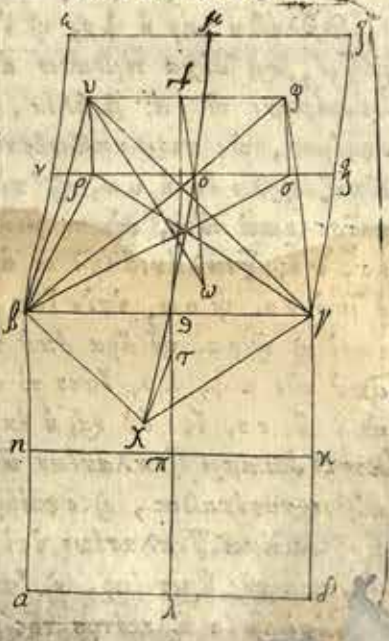
Δωδεκάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ἥ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Κείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις, τὰ αβγδ, βεζγ. καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν αβ, βγ, γδ, δα, εζ, εβ, ζγ, πλευρῶν, εἰς τὸ καὶ τὰ η, θ, κ, λ, μ, ν, ξ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηκ, θλ, μθ, νξ. καὶ τετμήσθωσαν αἱ νο, οξ, θπ, διχθεῖσαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ ρ, σ, τ, σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ ρο, οσ, τπ. καὶ ἀνεστάσθωσαν ἀπὸ τῶν ρ, σ, τ, σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς, ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ ρυ, σφ, τχ, καὶ κείσθωσαν ἴσαι ταῖς ρο, οσ, τπ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ υβ, βχ, χγ, γφ, φυ. Λέγω, ὅτι τὸ υβχγφ, πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, καὶ ἔτι ἰσογώνιόν ἐστιν. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ρβ, σβ, φβ. καὶ ἐπεὶ διχθεῖα ἡ νο, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ ρ, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ ορ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ον, νρ, ἑπτάκις ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ορ, κατὰ τὸ δ'. τοῦ παρόντος, ἴση ἡ μὲν ον, τῇ νβ, ἡ δὲ ορ, τῇ ρυ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν βν, νρ, ἑπτάκις ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ρυ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν βν,

νρ,

νρ, τὸ ἀπὸ τῆς βρ, ἐστὶν ἴσον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βρ, ἑξαπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ρυ. ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν βρ, ρυ, τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ρυ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν βρ, ρυ, ἴσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βυ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βυ, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς υρ, διπλῆ ἄρα ἡ βυ, τῆς υρ, ἔστι δὲ καὶ ἡ φυ, τῆς ρυ, διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ὅλη ἡ ρσ, τῆς ρο, τετράκις τῆς ρυ, ἐστὶ διπλῆ, ἴση ἄρα ἡ βυ, τῇ υφ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν βχ, χγ, γφ, ἑκατέρᾳ τῶν βυ, υφ, ἐστὶν ἴση, ἰσόπλευρον ἄρα τὸ βυφγχ, πεντάγωνον. Λέγω, ὅτι καὶ ἐν σὺ ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ο, ἑκατέρα τῶν ρυ, σφ, παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου ἡ οψ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ψϑ, ϑχ. Λέγω, ὅτι ἡ ψϑχ, εὐθεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ϑπ, ἄκρον καὶ μέσον τέτμηται λόγον καὶ τὸ τ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστὶν ἡ πτ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ϑπ, πρὸς τὴν πτ, οὕτως ἡ πτ, πρὸς τὴν τϑ, ἴση δὲ ἡ μὲν ϑπ, τῇ ϑο, ἡ δὲ πτ, ἑκατέρα τῶν τχ, οψ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ϑο, πρὸς τὴν οψ, οὕτως ἡ χτ, πρὸς τὴν τϑ, καὶ ἐστι παράλληλος ἡ μὲν ϑο, τῇ τχ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ βδ, ἐπίπεδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἡ δὲ τϑ, τῇ οψ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ βζ, ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο ἐπίπεδα συμπεσόντα καὶ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ ψοϑ, ϑτχ, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἔσονται, ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ψϑ, τῇ ϑχ, πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν σύ ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐν σύ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ υβχγφ, πεντάγωνον. Λέγω δή, ὅτι καὶ ἰσογώνιόν ἐστιν, ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ νο, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ ρ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ ορ. ἔστιν ἄρα ὡς σιωα, ρος ἡ νο, ορ, πρὸς τὴν ον, οὕτως ἡ νο, πρὸς τὴν οσ, ἴση δὲ ἡ ορ, τῇ ο ἔστιν ἄρα ὡς ἡ σν, πρὸς τὴν νο, οὕτως ἡ νο, πρὸς τὴν οσ, ἡ νυ, ἄρ καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἡ νι. τῶν νσ, σο, ἑξαπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ον, ἴση δὲ ἡ μὲν ον. τῇ σφ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν νσ, σφ, πεντάγωνα, καὶ τὴν ῥηθεῖσαν τοῦ ἀπὸ τῆς νβ, ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν φσ, σν, νβ, τετραπλ. νβ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν σν, νβ, ἴσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βσ, τα σφ, τετράκις τὸ ἀπὸ τῆς φβ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ φσβ, γωνία, τοῦ ἀπὸ τῆς νβ, διπλῆ ἄρα ἡ φβ, τῆς βν, ἔστι δὲ καὶ ἡ βγ, ἴση ἄρα ἡ φβ, τῇ βγ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ βυ, υφ, δυσὶ ταῖς βχ, χ,

Eucl. Lib. 13. Fig. 28.



καὶ βάσις ἡ φβ, βάσει τῇ βγ, ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ βυφ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βχγ, ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ υφγ, γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ βχγ· αἱ ἄρα ὑπὸ βχγ, βυφ, υφγ, τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν δὲ πυραμίδος ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ πυραμίδιον, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ βυφγχ, πυραμίδιον· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, ἄρα ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον, καὶ ἐστὶν ἐπὶ μιᾶς τῶν κύβου πλευρᾶς τῆς βγ, ἐὰν ἄρα ἐφ' ἑκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ καταγράψωμεν, συσταθήσεταί τι χῆμα στερεὸν, ὑπὸ δώδεκα πυραμιδίων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι, ὅτι καὶ τὰ ἑξῆς. Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ψο, καὶ ἔστω ἡ ψω, συμβάλλει ἄρα ἡ ψω, τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. πεπόνθασι γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παραπεδωταίῳ θεωρήματι τοῦ ια' βιβλίου, τεμνέτωσαν κατὰ τὸ ω, τὸ ω, ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ψω, ἡμίσεια τοῦ κύβου πλευρά. Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ υω, καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ νσ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἐστὶν ἡ ον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν νσ, σο, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νο, ἴση δὲ ἡ μὲν νσ, τῇ ψο. ἐπειδὴ περ καὶ ἡ μὲν νο, τῇ οω, ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ψο, τῇ οσ, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ οσ, τῇ ψυ. ἐπεὶ καὶ τῇ ρο, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ωψ, ψυ, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νο, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ωψ, ψυ, ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς υω, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς υω, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς νο, ἔστι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, προδέδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. εἰδὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς ἡμισείας, καὶ ἔστιν ἡ νο, ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ἡ ἄρα υω, ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἔστι τὸ κέντρον τῆς περιλαμβανούσης σφαίρας τὸν κύβον, τὸ υ, ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ περιφερείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας· περιείληπται ἄρα τὸ δωδεκάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ. Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. Ἐπεὶ γὰρ τῆς νο, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμα ἐστὶν ἡ ορ, ὅλης ἄρα τῆς νξ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ρσ, οἷον ἐπεὶ ὡς ἡ νο, πρὸς τὴν ορ, ἡ ορ, πρὸς τὴν [illegible] πλάσια, τὰ γὰρ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ἡ νξ, πρὸς τὴν ρσ, οὕτως ἡ ρσ, πρὸς συναμφότερον τὴν νξ, τῆς ρσ, μείζων δὲ ἡ νξ, τῆς ρσ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ρσ, συναμφοτέρου τῆς νξ, τῆς ρσ· ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα, ἡ ρσ, ἴση δὲ ἡ ρσ, τῇ υφ, τῆς ἄρα νξ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης,

μενης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ υφ· καὶ ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει ἑξαπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ νξ, πλευρὰ οὖσα τοῦ κύβου. ἐὰν δὲ ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή, ἡ υφ, ἄρα πλευρὰ οὖσα τοῦ δωδεκαέδρου, ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

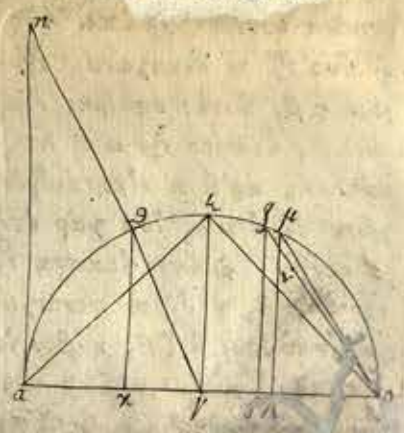
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά.

Πρότασις ΙΗ'. Θεώρημα.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι, καὶ συγκρίναι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ γ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν αγ, τῇ γβ, κατὰ δὲ τὸ δ, ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν αδ, τῆς δβ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς αβ, ἡμικύκλιον τὸ αεβ. καὶ ἀπὸ τῶν γ, δ, τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ γε, δζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αε, αζ, ζβ, εβ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αδ, τῆς δβ, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῆς βδ. ἀναστρέψαντι, ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ βα, τῆς αδ, ὡς δὲ ἡ βα, πρὸς τὴν αδ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς βα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αζ, ἰσογώνιον γὰρ ἐστὶ τὸ αζβ, τριγώνῳ τῷ αζδ, τριγώνῳ· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βα, τοῦ ἀπὸ τῆς αζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ αζ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς πυραμίδος πλευρᾷ. Πάλιν ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ δα, τῆς δβ, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῆς βδ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζβ. διπλασίων ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βζ, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος. ἡ βζ, ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ κα, ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῇ βγ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν βγ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βε, διπλάσιον· ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βε, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος. ἡ βε, ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά. τοῦ α, σημείου, τῇ αβ, εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ αη, καὶ κείσθω ἡ αη,

Euclid. Lib. 13. Fig. 19.



καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηγ, καὶ ἀπὸ τοῦ θ, ἐπὶ τὴν αβ, κάθετος ἤχθω ἡ θκ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αη, τῆς αγ, ἴση γὰρ ἡ ηα, τῇ αβ, ὡς δὲ ἡ ηα, πρὸς τὴν αγ, οὕτως τὸ δ': τὸ ε': ἔστιν ἡ θκ, πρὸς τὴν κγ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ θκ, τῆς κγ, παραλλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς θκ, τὸ ἀπὸ τῆς κγ. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν θκ, κγ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς θγ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κγ, ἡ δὲ θγ, ἴση ἐστὶ τῇ γβ, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γκ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ αβ, τῆς βγ, ὧν ἡ αδ, τῆς δβ, ἐστὶ διπλῆ. λοιπὴ ἄρα ἡ βδ, λοιπῆς τῆς δγ, ἐστὶ διπλῆ, τριπλῆ ἄρα ἡ βγ, τῆς γδ, ἐνναπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γδ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ γκ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς γκ, τοῦ ἀπὸ τῆς γδ, μεῖζων ἄρα ἡ γκ, τῆς γδ. Κείσθω τῇ γκ, ἴση ἡ γλ, καὶ ἀπὸ τοῦ λ, τῇ αβ, πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ λμ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μβ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς βγ, τοῦ ἀπὸ τῆς γκ, καὶ ἔστι τῆς μὲν βγ, διπλῆ ἡ αβ, τῆς δὲ γκ, ἡ κλ, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς κλ, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ ἔστιν ἡ αβ, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ κλ, ἄρα ἐξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ, τοῦ εἰρημένου κύκλου. καὶ ἐπεὶ τῆς σφαίρας ἡ διάμετρος σύγκειται, ἔκ τε τῆς ἐξαγώνου, καὶ δύο τῶν δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καὶ ἔστιν ἡ μὲν αβ, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ κλ, ἐξαγώνου πλευρὰ, καὶ ἴση ἡ αχ, τῇ λβ, ἑκατέρα τῶν αχ, λβ, τοῦ δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ, τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ λβ, ἐξαγώνου δὲ ἡ μλ, ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ κλ, ἐπεὶ καὶ τῇ θκ, ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν θκ, κλ, διπλασίων τῆς κγ, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ μβ, ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν, ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου, εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ μβ. καὶ ἐπεὶ ἡ ζβ, κύβου ἐστὶ πλευρὰ, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ ν, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ νβ, ἡ νβ, ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρὰ. καὶ ἐπεὶ τῆ σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν αζ, πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡ-
ς, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς βε, δυνάμει διπλασίων, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς
μει διπλασίων, οἵων ἄρα ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἓξ, τοιού-
τῆς πυραμίδος τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δὲ τοῦ κύβου δύο,
πυραμίδος πλευρὰ, τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἐπί-
κύβου δυνάμει διπλῆ. ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει
ὑπὸ εἰρημένων τριῶν τριγώνων πλευραὶ, λέγω δὴ πυραμίδος
κύβου πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς, αἱ δὲ λοιπαὶ δύο,
εἰκοσαέδρου, καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, ἄτε πρὸς ἀλλήλας, ἄτε πρὸς
ἐν ἐν λόγοις ῥητοῖς, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή. Ὅτι δὲ
εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ μβ, τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς νβ, δείξο-
γὰρ ἰσογωνίόν ἐστι τὸ ζδβ, τριγώνου τοῦ ζαβ, τριγώνῳ, ἀνάλο-
γόν

γόν εἰσιν· ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βζ, οὕτως ἡ βζ, πρὸς τὴν βα, καὶ ἐπεὶ ξεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ α: πρὸς τὴν γ: οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς β: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ δβ, πρὸς τὴν βα, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς δβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βζ. ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν βδ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ζβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βδ, διπλῆ δὲ ἡ αβ, τῆς βδ, διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ζβ, τοῦ ἀπὸ τῆς δβ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τοῦ ἀπὸ τῆς δβ, τετραπλάσιον, διπλῆ γὰρ ἡ αδ, τῆς δβ, μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αδ, τοῦ ἀπὸ τῆς ζβ, μείζων ἄρα καὶ ἡ αδ, τῆς βζ, πολλῷ ἄρα ἡ αλ, τῆς ζβ, μείζων ἐστὶ, καὶ ἡ μὲν αλ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ κ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἡ κλ, ἑπτάγωνος ἡ μὲν λκ, ἐξαγώνου ἐστὶν, ἡ δὲ κα, δεκαγώνου· τῆς δὲ ζβ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ νβ, μείζων ἄρα ἡ κλ, τῆς νβ, ἴση δὲ ἡ κλ, τῇ λμ, μείζων ἄρα καὶ ἡ λμ, τῆς νβ, τῆς δὲ λμ, μείζων ἐστὶν ἡ μβ, πλευρὰ, πολλῷ ἄρα ἡ μβ, πλευρὰ ἐστὶ τοῦ εἰκοσαέδρου μείζων ἐστὶ τῆς νβ, πλευρᾶς ἔστης τοῦ δωδεκαέδρου.

Ἄλλως δὲ, ὅτι μείζων ἡ μβ, τῆς νβ. ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστὶν ἡ αδ, τῆς δβ, διπλῆ ἄρα ἡ αβ, τῆς βδ, ὡς δὲ ἡ αβ, πρὸς τὴν δβ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς αβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς βζ, διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ζαβ, τριγώνου τοῦ ζβδ, τριγ: τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς βζ, ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τοῦ ἀπὸ τῆς κλ, πενταπλάσιον, πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς κλ, ἴσοι εἰσὶ τοῖς ἀπὸ τοῦ ζβ, ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ζβ, ἐξ ὧν ἀπὸ τῆς νβ, μείζονά ἐστιν, ὥστε καὶ δύο τὰ ἀπὸ τῆς κλ, δυσὶ τοῦ ἀπὸ τῆς νβ, μείζονά ἐστι, μείζων ἄρα ἡ κλ, τῆς νβ, ἴση δὲ ἡ κλ, τῇ λμ, μείζων ἄρα ἡ κλ, τῆς νβ, πολλῷ ἡ μβ, τῆς νβ, μείζων ἐστὶν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὅτι δὲ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ζβ, ἐξ ὧν ἀπὸ τῆς νβ, μείζονά ἐστι, δείξομεν οὕτως. Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ νβ, τῆς νζ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ζβ, νβ, μείζων ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν βζ, ζν, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς βζ, βν, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῆς βζ, ζν, μεῖζόν ἐστιν, ἢ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῆς βζ, ζν, ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς βζ, ζν, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς νβ, ἄκρον γὰρ καὶ μέσον λόγον τέτμηται ἡ βζ, κατὰ τὸ ν, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ζβ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς βν, ἢ διπλάσιον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ζβ, δυσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βν, μεῖζόν ἐστι. Λέγω, ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε χήματα. Θήσεται ἕτερον χῆμα, περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλοις, ὑπὸ μὲν γὰρ δύο τριγώνων, ἀλλ' ἐξ ἄλλων δύο ἐπιπέδων στερεὰ γωνία οὐ συναθήσεται, ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων ἡ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου, ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων πρὸς σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία, ἴσης γὰρ τῷ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς, ἔσονται αἱ ἓξ τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον, πᾶσα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπ' ἐλασσόνων, ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων, ἢ ἓξ γωνιῶν ἐπιπέδων

γωνία

γωνία συνίσταται. ὑπὸ δὲ τριγώνων ἴσων καὶ τῶν κύβου γωνία περιέχεται, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδυνάτον, ἔσονται γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαὶ, ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν, καὶ τῶν δωδεκαέδρου, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδυνάτον, ὅσης γὰρ τῆς τῶν ἰσοπλεύρου πενταγώνου γωνίας ὀρθῆς, καὶ πέμπτης ἔσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι, τεσσάρων ὀρθῶν μείζους, ὅπερ ἀδυνάτον. οὐδὲ μὴν ὑπὸ πολυγώνων ἑτέρων σχημάτων περιεχεθήσεται στερεὰ γωνία, διὰ τὸ ἄτοπον. οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα σχήματα ἕτερον στερεὸν συσταθήσεται ὑπὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περεχόμενον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. *Eucl. Lib. 13. Fig. 20.*

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ ἡ τῶν ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθῆς ἐστι καὶ πέμπτον, οὕτω δεικτέον. Ἐστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ αβγδε, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ αβγδε, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζα, ζβ, ζγ, ζδ, ζε, δίχα ἄρα τέμνουσι τὰς πρὸς τοῖς α, β, γ, δ, ε, πενταγώνου γωνίας. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ ζ, πέντε γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι, μία ἄρα αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὸ αζβ, μιᾶς ὀρθῆς ἐστι παρὰ πέμπτον, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ζαβ, αβζ, μιᾶς εἰσιν ὀρθῆς καὶ πέμπτης, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ζαβ, τῇ ὑπὸ ζβγ, καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς ὀρθῆς ἐστι καὶ πέμπτης. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τῆς Δεκάτης τρίτης τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΟΥ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΟΥ ΤΕΤΑΡΤΟΥ, ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ,

Ὡς τισι δοκεῖ, ὡς ἄλλοις δὲ, Ὑψικλέους Ἀλεξανδρέως περὶ τῶν πέντε σωμάτων πρῶτον.

ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ.

Βασιλείδης ὁ Τύριος, ὦ Πρόπαρχε, παραγενηθεὶς εἰς Ἀλεξάνδρειαν, καὶ συγγενηθεὶς τοῖς περὶ ἡμῶν διὰ τοῦ ἀπὸ τῶν μαθήματος συγγένειαν σωδιέ-ξιφεν αὐτοῖς τὸν πλεῖστον τῆς ἐπιδημίας χρόνον. καί ποτε διατελοῦντες τὸ ὑ-πὸ Ἀπολλωνίου γραφὲν περὶ τῆς συγκρίσεως τῶν δωδεκαέδρου, καὶ εἰκοσαέδρου, τοῖς εἰς τοῦ αὐτοῦ σφαῖραν ἐγγραφομένων, τίνα λόγον ἔχει ταῦτα πρὸς ἄλληλα, ἔδο-ξαν ταῦτα μὴ ὀρθῶς γεγράφθαι τὸν Ἀπολλώνιον. αὐτοὶ δὲ ταῦτα διακαθάραντες ἔγραψαν, ὡς ἐφικνεῖσθαι τῶν ἀξιῶν. ἐγὼ δ' ὕστερον περιέπεσον ἑτέρῳ βιβλίῳ ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδεδομένῳ, καὶ περιέχοντι ἀπόδειξιν ὑγιεῖς περὶ τοῦ ὑποκειμένου, καὶ μεγάλως ἐψυχαγωγήθην ἐπὶ τοῦ προβλήματος ζητήσει. τὸ μὲν ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκ-δοθὲν ἔοικε κοινῇ σκοπεῖν, καὶ γὰρ περιφέρεται, τὸ δ' ὑφ' ἡμῶν δοκοῦν ὕστερον γε-γράφθαι φιλοπόνως, ὅσα δοκεῖν ὑπομνηματισάμενος ἔκεινα προσφωνῆσαί σοι διὰ τοῦ ἐν ἅπασι Μαθήμασι, μάλιστα ἐν Γεωμετρίᾳ προκοπτῶν, ἐμπείρως κείνου ἀ-ρηθησόμενα. διὰ τοῦ πρὸς τὸν παρὰ σωμήθειαν, καὶ τοῦ πρὸς ἡμᾶς [illegible] μενῶς ἀκουομένῳ τῆς πραγματείας. καιρὸς δ' ἂν εἴη προοιμίου μὲν παύ[illegible] τῆς δὲ συντάξεως ἄρξασθαι.

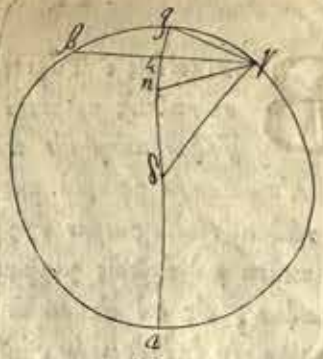
Πρό-

Πρότασις Α'. Θεώρημα.

Η' ἀπὸ κέντρου κύκλου τινὸς, ἐπὶ τινὶ τῶν πενταγώνου πλευρᾶς, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου, κάθετος ἀγομένη, ἡμίσεια ἐστὶ σωμφοτέρου, τῆς τε ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου, τῆς εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου.

Ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ ἐν αὐτῷ πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ ἡ βγ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ, καὶ ἐπὶ τινὶ βα, κάθετος ἤχθω ἡ δε, καὶ ἐκβεβλήθω ἐπ' εὐθείας τῇ δε, εὐθεῖα ἡ αεζ. Λέγω, ὅτι ἡ δε, ἡμίσειά ἐστι τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δεκαγώνου πλευρᾶς τῆς εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ἐπεζεύχθωσαν αἱ δγ, δζ, καὶ κείσθω τῇ εζ, ἴση ἡ νε, καὶ ἀπὸ τοῦ ν, ἐπὶ τὸ γ, ἐπεζεύχθω ἡ νγ. Ἐπεὶ πενταπλασία ἐστὶν ὅλου τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια τῆς βζγ, περιφερείας, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὅλου τοῦ κύκλου περιφερείας ἡμίσεια ἡ αγζ, τῆς δὲ βζγ, ἡμίσεια ἡ ζγ, καὶ ἡ αγζ, ἄρα περιφέρεια πενταπλασία ἐστὶ τῆς ζγ, περιφερείας, πεξαπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ αγ, τῆς ζγ, ὡς δὲ ἡ αγ, πρὸς τὴν ζγ, οὕτως ἡ ὑπὸ αδγ, πρὸς τὴν ὑπὸ ζδγ, γωνίαν, πεξαπλῆ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ αδγ, τῆς ὑπὸ ζδγ, διπλῆ δὲ ἡ ὑπὸ αδγ, τῆς ὑπὸ εζγ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ εζγ, τῆς ὑπὸ νδγ. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ εζγ, ἴση τῇ ὑπὸ ενγ, διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ ενγ, τῆς ὑπὸ νδγ, ἴση ἄρα ἡ δν, τῇ νγ. ἀλλ' ἡ νγ, τῇ ζγ, ἴση, ἄρα καὶ ἡ δν, τῇ ζγ, ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ νε, τῇ εζ, ἴση, ἴση ἄρα καὶ ἡ δε, σωμφοτέρῳ τῇ εζ, ζγ, κοινὴ προσκείσθω ἡ δε, σωμφότερος ἄρα ἡ δζ, ζγ, διπλῆ ἐστὶ τῆς δε· καὶ ἔστιν ἡ μὲν δζ, ἴση τῇ τοῦ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ζγ, ἴση τῇ τοῦ δεκαγώνου, ἡ δε, ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς τοῦ ἑξαγώνου, καὶ δεκαγώνου, τῆς εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου. φανερὸν δὲ ἐκ τῆς ἐν τῷ ἑπτακαιδεκάτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων, (πόρισμα β'· ἔστι γὰρ) ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τινὶ πλευρὰν τοῦ ἑπταγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου καθετος ἀγομένη, ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Euclid. Lib. 14. Fig. 1.

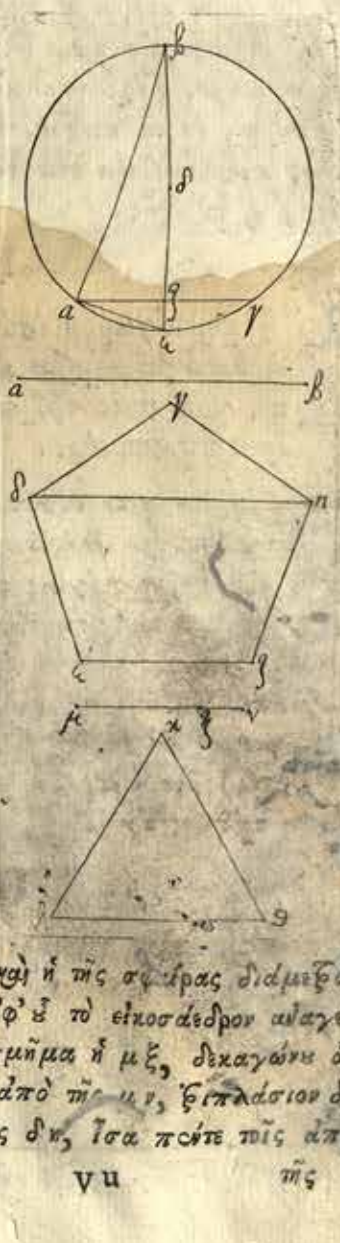


Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Περὶ αὐτὸν κύκλον περιλαμβάνει τὸ, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῆς αὐτῆς σφαίρας ἐγγραφομένου.

Τοῦτο δὲ γράφεται ὑπὸ μὲν Ἀελιέρου, ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ, πέντε σχημάτων συγκρίσεις, ὑπὸ δὲ Ἀπολλωνίου ἐν τῇ β' ἐκδόσει τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου

δρα πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τῦ δωδεκαέδρα ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῦ εἰκοσαέδρα ἐπιφάνειαν, οὕτω καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκάεδρον, πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον. διὰ δὲ τῦτο αὐτῦ εἶναι κάθετον ἀπὸ τῦ κέντρα τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρα πεντάγωνον, καὶ τὸ τῦ εἰκοσαέδρα τρίγωνον. Γραπτέον δὲ καὶ ἡμῖν αὐτοῖς, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τῦ δωδεκαέδρα πεντάγωνον, καὶ τὸ τῦ εἰκοσαέδρα τρίγωνον, τὴν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. Προγεγραφέντος τοῦδε. ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ὑπὸ δύο πλευρῶν τῦ πενταγώνα ὑποτεινούσης δυνάμεως, πενταπλάσ: ἔσαι τῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τῦ κέντρα τῦ κύκλα. Euclid. lib. 14. Fig. 2.



Ἔστω κύκλος ὁ αβγ, καὶ ἐν τούτῳ πενταγώνα πλευρὰ ἔστω ἡ αγ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῦ κύκλα τὸ δ, καὶ ἐπὶ τῆς αγ, κάθετος ἡ δζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ β, καὶ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αβ. Λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῆς βα, αγ, τεσσάγωνα πενταπλάσια εἶναι τῦ ἀπὸ τῆς δε, τεσσαγώνα. ἐπεζεύχθω ἡ αε, πλευρὰ δεκαγώνου ἄρα ἡ αε. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ βε, τῆς δε, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς βε, τῦ ἀπὸ τῆς δε, τῇ δὲ ἀπὸ τῆς βε, ἴσα ἐστὶ τὰ ὑπὸ τὴν βα, αε, τετραπλάσια ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τὴν βα, αε, τῦ ἀπὸ τῆς δε, πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τὴν αβ, αε, καὶ δε, τῦ ἀπὸ τῆς δε, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν δε, αε, ἴσα τῇ ἀπὸ τῆς αγ, ἡμιόλιος: τῦ ιγ': πενταπλ: ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τὴν βα, αγ, τῦ ἀπὸ τῆς δε. Τέτε δεδειγμένε, δεικτέον, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος λαμβάνει τότε τῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τῦ εἰκοσαέδρα τρίγωνον τὴν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. Κείσθω ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡ αβ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν δωδεκαέδρου καὶ εἰκοσάεδρον, καὶ ἔστω μὲν τὸ τῦ δωδεκαέδρα πεντάγωνον τὸ γδεζη. εἰκοσαέδρα δὲ τρίγωνον τὸ κλθ. Λέγω, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε γδεζη, πενταγ: καὶ τὸ κλθ, τρίγ: Ἐπεζεύχθω ἡ δη, κύβα ἄρα πλευρὰ ἡ δη. ἐκκείσθω δή τις εὐθεῖα ἡ μν, ὥστε πενταπλάσιον εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῦ ἀπὸ τῆς μν, ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος διωάμει πενταπλασία τῆς ἐκ τῦ κέντρα τῦ κύκλα, ἀφ' ἧς τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται· τμηθήτω ἡ μν, κατὰ τὸ ξ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ μξ, δεκαγώνα ἄρα ἡ μξ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ τῆς αβ, τῦ ἀπὸ τῆς μν, τριπλάσιον δὲ τῦ ἀπὸ τῆς δη, ἡμιόλιος: τοῦ ιγ': τρία ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς δη, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπ

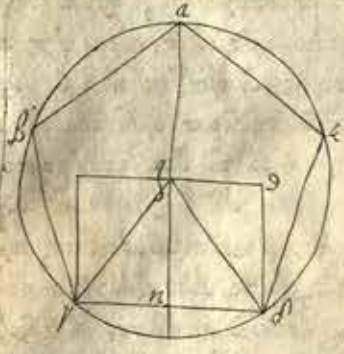
τῆς μν, ὡς δὲ ξία τὰ ἀπὸ τῆς δη, οὕτως πέντε τὰ ἀπὸ τῆς μν, οὕτως ξία τὰ ἀπὸ τῆς γη, οὕτως πέντε τὰ ἀπὸ τῆς μξ. ξία τοι γάρ τοι τὰ ἀπὸ τῆς γη, πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς μξ, ἴσά ἐστι, πέντε δὲ τὰ ἀπὸ τῆς κλ, πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς μν, καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς μξ, ἐστὶν ἴσα, πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς κλ, ἴσά ἐστι ξισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς δη, καὶ ξισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς γη, ξία δὲ ἀπὸ τῆς δη, καὶ ξία ἀπὸ τῆς γη, ἴσά ἐστι δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου κύκλου περὶ τὸ γδεζη, προεδείχθη γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς δη, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς γη, πενταπλάσια τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ πεντάγωνον τὸ γδεζη. ἀλλὰ πέντε μὲν τὰ ἀπὸ τῆς κλ, ἴσά ἐστι δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ κλθ, ξίγωνον κύκλου. ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τῆς κλ, ξιπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ κλθ, ξίγ. κύκλου, δεκαπέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα εἰσὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. ἡ ἄρα διάμετρος, ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ, ὁ αὐτὸς ἄρα κύκλος περιλαμβάνει τότε τὸ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου ξίγωνον, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

Εἰς τὴν δοθεῖσαν πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, καὶ περὶ τὸν αὐτὸν κύκλος, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν ἀχθῇ, τὸ ριακοντάκις ὑπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τῆς καθέτου, ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

Εἰς τὸν πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ αβγδε, καὶ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλος, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦτο τὸ ζ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τινὰ γδ, κάθετος ἤχθω ἡ ζη. Λέγω, ὅτι τὸ ξιακοντάκις ὑπὸ τῶν γδ, ηζ, ἴσον δώδεκα πενταγώνοις τοῖς αβγδε. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ γζ, ζδ. ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν γδ, ηζ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ γδζ, (1) ξιγώνου, τὸ ἄρα πεντάκις ὑπὸ τῶν γδ, ηζ, δέκα ξιγωνά ἐστιν ἴσα, τὰ δὲ δέκα ξίγωνα, δύο ἐστὶ πεντάγωνα, * καὶ πέντε ἐστὶν ἴσα, τὸ ἄρα ξιακοντάκις ὑπὸ τῶν γδ, ηζ, ἴσόν ἐστι δώδεκα πενταγώνοις, δώδεκα δὲ πεντάγωνα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνειά ἐστι, τὸ ἄρα ξιακοντάκις ὑπὸ τῶν γδ, ηζ, ἴσόν ἐστι τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

Euclid. Lib. 14. Fig. 3.



Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐὰν ᾖ ξίγωνον ἰσόπλευρον, ὡς τὸ αβγ, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος, καὶ τὸ κέντρον τοῦτο τὸ δ, κάθετος ἡ δε, τὸ ξιακοντάκις ὑπὸ τῶν βγ,

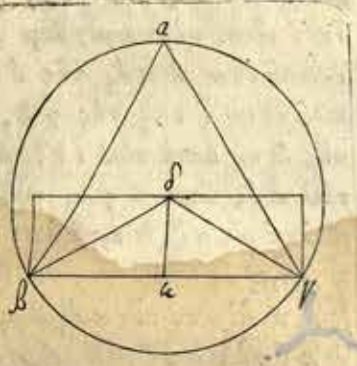
(1) Οἷον τὸ γθ, καὶ τὴν μά. τοῦ α.

βγ, δε, ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ. ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν δε, βγ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ δβγ, τῇ αὐτῇ δύο ἄρα ἴσα ἐστὶ τὰ ὑπὸ τῶν δε, βγ, δεκαπέντε ἴσα. ἓξ ἄρα ἰσόγωνα τὰ δβε, ἴσα ἐστὶ ἴσοι τοῖς ὑπὸ τῶν δε, βγ, ἓξ δὲ ἰσόγωνα, ὡς τὰ δεβ, ἴσα ἐστὶ δύο τοῖς αβγ, καὶ πενταδεκάκις, τὸ ἄρα ἑξακοντάκις ὑπὸ τῶν δε, βγ, ἴσόν ἐστιν εἴκοσι τοῖς αβγ, ἰσογώνοις, ἴσοις τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ. ὥστε ἔσαι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν γδ, ζη, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν βγ, δε,

ΠΟΡΙΣΜΑ.

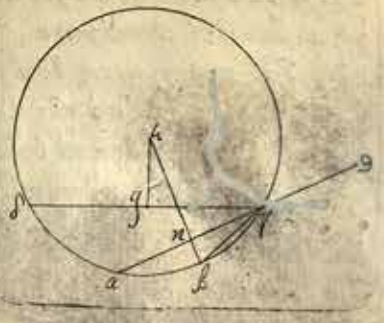
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτω τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ ἰσόγωνον κύκλου, ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, εἰκοσαέδρου καὶ δωδεκαέδρου.

Eucl. Lib. 14. Fig. 4.



Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

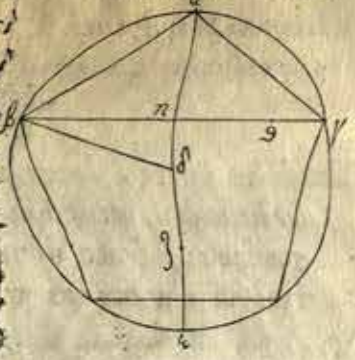
Τούτων δὴ οὕτως, δεικτέου, ὅτι ἔσαι, ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.



Ἐκκείσθω κύκλος περιλαμβάνων τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πενταγώνου, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου ἰσόγωνον, τῇ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, ὁ δα,βγ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν ἰσογώνου μὲν ἰσοπλεύρου πλευρὰ ἡ γδ, πενταγώνου δὲ ἡ αγ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ ε, ἐπὶ τὰς γδ, γα, κάθετοι ἤχθωσαν αἱ εζ, εη, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ εη, εὐθεῖα ἡ ηθ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ, καὶ ἐκκείσθω κύβου πλευρὰ ἡ αϑ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτως ἡ αϑ, πρὸς τὴν γδ. ἐπεὶ γὰρ συναμφοτέρου τῆς εβγ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ βε, καὶ ἔτι συναμφοτέρου μὲν τῆς εβγ, ἡμίσεια ἡ εη, τῆς δὲ βε, ἡμίσεια ἡ εζ, καὶ τῆς εη, ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμα, ἐστὶν ἡ εζ, ἔτι δὲ καὶ τῆς ϑγα, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμα ἡ γα, ὡς ἐν τῇ δωδεκαέδρῳ ἐδείχθη, ὡς ἄρα ἡ ϑα, πρὸς πρὸς τὴν γα, οὕτως ἡ εη, πρὸς τὴν εζ, ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῆς ϑα. γε, τῇ ὑπὸ τῆς γα. εη, καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ϑα, πρὸς τὴν γδ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῆς ϑα, εζ, πρὸς τὸ ὑπὸ τ

γ δ, ζ ε, τῷ δὲ ὑπὸ θ α, ε ζ, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν γ α, η ε, ὡς ἄρα ἡ θ α, πρὸς τὴν γ δ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῆς γ α, η ε, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς γ δ, ζ ε, τουτέστιν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ θ α, πρὸς τὴν γ δ.

Ἄλλως. Δεῖξαι, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ, πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. Προγεγραφέντος τοῦδε. Ἔστω κύκλος ὁ α β γ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς αὐτὸν πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ α β, α γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ β γ. καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ δ. καὶ ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ δ, ἐπεζεύχθω διάμετρος ἡ α δ, καὶ ἐκβεβλήθω ἐπ' εὐθείας τῇ α δ, εὐθεῖα ἡ δε. καὶ κείσθω τῆς μὲν ο δ, διάμετρος ἡμίσεια ἡ δ ζ. ἡ δὲ η γ, τῆς γ θ, ἕκτη ἔστω. Λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν α ζ, β θ, ἴσον εἶναι τῷ πενταγώνῳ, ἀπὸ γὰρ τοῦ β, ἐπὶ τὸ δ, ἐπεζεύχθω ἡ β δ. ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ α δ, τῆς δ ζ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶ τῆς α δ, ἡ α ζ. πάλιν ἐπεὶ ἕκτη ἐστὶν ἡ η γ, τῆς γ θ, διπλῆ δὲ ἡ η θ, τῆς θ γ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ η γ, τῆς θ η. καὶ τῷ ις′: ἄρα τοῦ ς′: ὡς ἡ ζ α, πρὸς τὴν α δ, οὕτως ἡ γ η, πρὸς τὴν η θ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν α ζ, θ η, τῷ ὑπὸ τῶν δ α, γ η, ἡ δὲ γ η, ἴση ἐστὶ τῇ β η, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α δ, β η, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν α ζ, θ η. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν α δ, β η, δύο ἐστὶ ἕξαγωνα: ὡς τὸ α β δ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν α ζ, η θ, ἄρα δύο ἐστὶν, ὡς τὸ α β δ. πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ τῶν α ζ, η θ, δέκα ἑξάγωνά ἐστι, δέκα δὲ ἑξάγωνα δύο ἐστὶ πενταγώνα, πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ τῶν α ζ, η θ, δύο πενταγώνοις ἴσα ἐστί. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ η θ, τῆς θ γ, τὸ ὑπὸ τῶν α ζ, η θ, διπλοῦν ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν α ζ, θ γ, δύο ἄρα τὰ ὑπὸ τῶν α ζ, θ γ, ἴσα ἐστὶν ἑνὶ τῷ ὑπὸ τῶν α ζ, θ η, πέντε τοῖς ὑπὸ τῶν α ζ, η θ, τουτέστι δύο πενταγώνοις. ὥστε πέντε τὰ ὑπὸ τῶν α ζ, θ γ, ἴσα ἐστὶν ἑνὶ πενταγώνῳ, πενταπλάσιον δὲ τὰ ὑπὸ τῶν α ζ, θ γ, ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς α ζ, θ β. ἐπειδὴ πενταπλοῦν ἐστιν ἡ θ β, τῆς θ γ, καὶ κοινὸν ὕψος ἐστὶν ἡ α ζ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν α ζ, β θ, ἴσον ἐστὶ τῷ πενταγώνῳ. Τούτου δείξεως ὄντος, τοῦ ἐκκειμένου κύκλου, ὁ περιλαμβάνῃ τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον, καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου ἑξάγωνον τῷ εἰς τὸν αὐτὸν σφαῖραν ἐγγραφομένου, καὶ ἐγγεγράφθωσαν εἰς τὸν α β γ, κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ β α, α γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ β γ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ ε, ἐπεζεύχθω ἡ α ε, καὶ ἐκβεβλήθω ἡ α ε, ἐπὶ τὸ ζ. καὶ ἔστω ἡ ε η, τῆς ε ν, διπλῆ, ἕκτη δὲ ἡ κ γ, τῆς γ θ, καὶ ἀπὸ τοῦ ν, τῇ α ζ, πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ δ μ, ἑξαγώνου ἄρα ἐστὶν ἰσοπλεύρου ἡ δ μ, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ α δ μ, ἑξάγωνον. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν α ν, θ β, ἴσόν ἐστι τῷ πενταγ: τὸ δὲ ὑπὸ τῶν α ν, ν δ, τῷ α δ μ, ἑξαγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν α ν, θ β, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δ ν, ν α, οὕτω τὸ πενταγ: πρὸς τὸ ἑξάγων. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν β θ, α ν, πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δ ν, ν α, ἡ β θ.

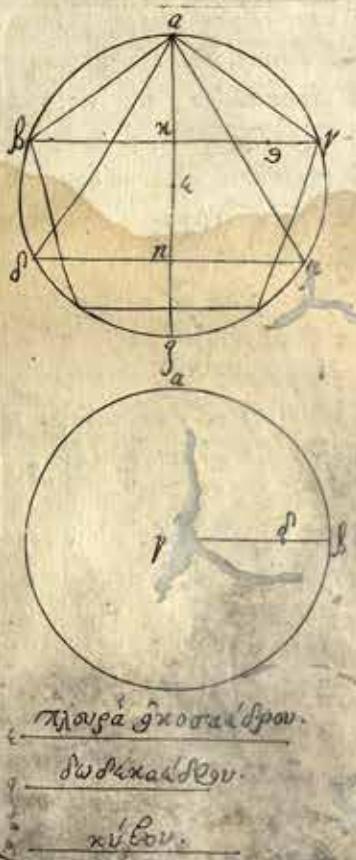


Eucl. Lib. 14. Fig. 5.

πρὸς

πρὸς τὴν δη, καὶ ὡς ἄρα δώδεκα αἱ Θβ, πρὸς εἴκοσι γδ, οὕτω δώδεκα πενπάγωνα, πρὸς εἴκοσι τρίγωνα, τουτέστιν ἡ τῆ δωδεκαέδρε ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῆ εἰκοσαέδρε. καὶ ἔστι δώδεκα μὲν αἱ βΘ, δέκα δὲ αἱ βγ, ἡ μὲν γὰρ βΘ, τῆς Θγ, ἐστὶ πενταπλῆ, ἡ δὲ βγ, τῆς Θγ, ἑξαπλῆ, δώδεκα ἄρα αἱ βΘ, ἴσαι εἰσὶ δέκα ταῖς βγ, εἴκοσι δὲ αἱ δη, δέκα εἰσὶν αἱ δμ, διπλῆ γὰρ ἡ δμ, τῆς δη. ὡς ἄρα δέκα αἱ βγ, πρὸς δέκα τὰς δμ, τουτέστιν ὡς ἡ βγ, πρὸς τὴν δμ, οὕτως ἡ τῆ δωδεκαέδρε ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῆ εἰκοσαέδρε ἐπιφάνειαν. καὶ ἔστιν ἡ μὲν βγ, ἡ τῆ κύβε πλευρὰ, ἡ δὲ δμ, ἡ τῆ εἰκοσαέδρε πλευρὰ, καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆ δωδεκαέδρε ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῆ εἰκοσαέδρε ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ βγ, πρὸς τὴν δμ, τουτέστιν ἡ τῆ κύβε πλευρὰ πρὸς τὴν τῆ εἰκοσαέδρε πλευράν. Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ δύθεῖα, οἱασδηποτοῦν τμηθείσης ἄκρον καὶ μέσον λόγον, οὗ λόγον ἔχει ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ τοῦ κύβε πλευρὰ πρὸς τὴν τῆ εἰκοσαέδρε πλευράν. Ἐκ-

Euclid. Lib. 14. Fig. 6.



πλευρὰ εἰκοσαέδρου.
δωδεκαέδρου.
κύβου.

κτίθω κύκλος ὁ αβ, περιλαμβάνων τό, τε τῆ δωδεκαέδρου πενπάγωνον, καὶ τὸ τῆ εἰκοσαέδρε τρίγωνον: τῷ δὲ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, καὶ ἐπιφθω τὸ κέντρον τῆ κύκλε τὸ γ, καὶ προσεκβεβλήθω τις δύθεῖα, ὡς ἔτυχε, ἀπὸ τοῦ γ, ἡ βγ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ δ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα ἔστω ἡ γδ, δεκαγώνε ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἡ γδ, τῆ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένε. Ἐκβεβλήθω δὴ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ ε, δωδεκαέδρε δὲ ἡ ζ, κύβε δὲ ἡ η. ἡ μὲν ἄρα ε, τριγώνε ἰσοπλεύρε ἐστὶ πλευρὰ, ἡ δὲ ζ, πενταγώνε, τῆ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένε. ἡ δὲ ζ, τῆς η, μεῖζόν ἐστι τμῆμα, καὶ ἐπεὶ ἡ ε, ἴση ἐστὶ τῷ τῆ ἰσοπλεύρε τριγώνε: πλευρᾷ, ἡ δὲ τῆ τριγώνε τῆ ἰσοπλεύρε πλευρὰ δυναμένη τριπλασία ἐστὶ τῆς βγ, τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ε, τοῦ ἀπὸ τῆς βγ, ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν βγ, βδ, τριπλάσια τοῦ ἀπὸ γδ, καὶ συναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ε, πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν γβ, βδ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς γβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γδ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς γβ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γδ, οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς η, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζ, μεῖζον γάρ ἐστι τμῆμα ἡ ζ, τῆς η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ε, πρὸς τὸ ἀπὸ τῶν γβ, βδ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς η, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ζ, καὶ συναλλὰξ καὶ ἀνάπαλιν, ὡς ἄρα τὸ

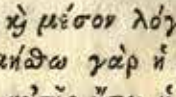
ἀπὸ τῆς η, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς γβ, βδ, τῆς δὲ ἀπὸ τῆς ζ, ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ βγ, γδ, ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου πλευράν, καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς η, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε, οὕτω τὰ ἀπὸ τῶν βγ, γδ, πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν γδ, δβ, ὡς δὲ τὰ ἀπὸ τῶν βγ, γδ, πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν γδ, δβ, οὕτως διῄρηται, οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς η, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ε, οὕτως διῄρηται, οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος, πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, καὶ ἔστιν ἡ μὲν η, κύβου πλευρά, ἡ δὲ ε, εἰκοσαέδρου. Ἐὰν ἄρα διῄρηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἔσται ὡς ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλασσον τμῆμα, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν σφαῖραν ἐγγραφομένων. Δεικτέον δή, ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. Ἐπεὶ γὰρ ἴσοι κύκλοι περιλαμβάνουσι τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πενταγώνου καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὸν αὐτὸν σφαῖραν ἐγγραφομένων, ἐν δὲ ταῖς σφαίραις οἱ ἴσοι κύκλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι τε εἰσὶ, καὶ ἐπὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων πίπτουσιν. ὥστε αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τό, τε τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον καὶ τοῦ δωδεκαέδρου πενταγώνου, ἴσαι εἰσί, πίπτουσι δὲ κάθετοι, ἰσοῦψεῖς ἄρα εἰσὶν αἱ πυραμίδες, αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ δωδεκαέδρου πενταγώνα, καὶ αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνα. αἱ δὲ ἰσοῦψεῖς πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ὡς ἄρα τὸ πενταγώνον πρὸς τὸ τρίγωνον, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πενταγώνον, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας πρὸς τὴν πυραμίδα ἧς βάσις μὲν τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ὡς ἄρα δώδεκα πενταγώνα πρὸς εἴκοσι τρίγωνα, οὕτω δώδεκα πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας· καὶ δώδεκα πενταγώνα, ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνειά ἐστιν, εἴκοσι δὲ τρίγωνα ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνεια, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτω δώδεκα πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, καί εἰσι δώδεκα μὲν πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου. εἴκοσι δὲ πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου, ὡς δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου

σαέ-

σαέδρε, καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ κύβε πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρε πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρε.

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ, ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῶσιν, ἐν αὐταλογίᾳ εἰσὶ τῇ ὑποκειμένῃ, δείξομεν οὕτω. Τετμήθω γὰρ ἡ μὲν αβ, εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ γ, μείζον δὲ τμῆμα αὐτῆς ἔστω ἡ αγ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ δε, ἄκρον καὶ μέσον τετμήσθω λόγον κατὰ τὸ ζ, τὸ δὲ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἔστω ἡ δζ. Λέγω, ὅτι ὡς ἡ ὅλη αβ, πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν αγ, οὕτως ἡ ὅλη δε, πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν δζ. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν αβ, βγ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς αγ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν δε, εζ, τῷ ἀπὸ τῆς δζ, ἔστι δ' ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ αβ, βγ, πρὸς τὸ ἀπὸ αγ, οὕτω τὸ ὑπὸ δε, εζ, πρὸς τὸ ἀπὸ δζ, καὶ ὡς τὸ τεσσάκις ἄρα ὑπὸ τῶν αβ, βγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, οὕτω τὸ τεσσάκις ὑπὸ τῆς δε, εζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ. καὶ συνθέντι, ἔστιν, ὡς τὸ τεσσάκις ὑπὸ τῶν αβ, βγ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ, οὕτω τὸ τεσσάκις ὑπὸ τῆς δε, εζ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς δζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ. ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ συναμφοτέρε τῆς δε, εζ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ, οὕτω τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς αβ, βγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς αγ. καὶ μήκει ὡς συναμφότερος ἡ αβ, βγ, πρὸς τὴν αγ, οὕτω συναμφότερος ἡ δε, εζ, πρὸς τὴν δζ. συνθέντι, ὡς συναμφότεροι αἱ αβ, βγ, μετὰ τῆς αγ, πρὸς τὴν αβ, οὕτω συναμφότεροι αἱ δε, εζ, μετὰ τῆς δζ, πρὸς τὴν δζ, τουτέστι δύο αἱ αβ, δε, πρὸς τὴν αγ, δζ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἥμισυ, τουτέστιν ὡς ἡ αβ, πρὸς τὴν αγ, οὕτως ἡ δε, πρὸς τὴν δζ. Δεδείγμενον, ὅτι εὐθείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον τμηθείσης λόγον, ὃν ἔχει λόγον ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τοῦτον ἔχει ἡ τοῦ κύβε πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. Δεδείγμεθα δὴ τόδε, ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβε πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν σφαῖραν ἐγγραφομένων. Προσκείσθω δὲ καὶ τόδε, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκαέδρον πρὸς αὐτὸ τὸ εἰκοσαέδρον, διὰ τὸ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ κύκλου περιλαμβάνεσθαι τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Δῆλον, ὅτι ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκαέδρόν τε καὶ εἰκοσάεδρον, λόγον ἔξουσιν εὐθείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Τούτων δὴ πάντων γνωρίμων ἡμῖν γενομένων, δῆλον, ὅτι ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖ-

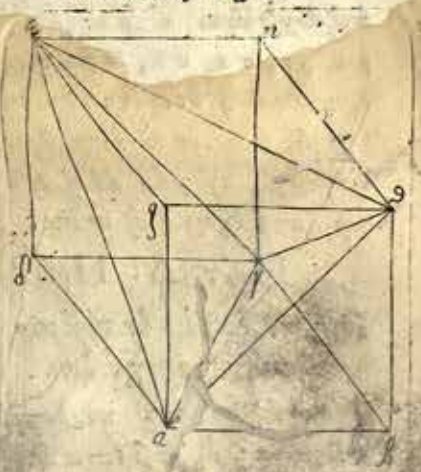
σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρον καὶ εἰκοσάεδρον, τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον λόγον ἔχει, ὃν ἡ θείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης ἡ δυναμένη τοῦ ὅλου καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τοῦ δυναμένου τοῦ ὅλου καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τοῦ τοῦ εἰκοσαέδρου, τουτέστιν ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τοῦ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, ὡς δὲ ἡ τοῦ κύβου πρὸς τοῦ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, οὕτως ἐστὶν ἡ θείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης ἡ δυναμένη τοῦ ὅλου καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, πρὸς τοῦ δυναμένου τοῦ ὅλου καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα, ὡς ἄρα τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, τῶν εἰς τοῦ αὐτοῦ σφαῖραν ἐγγραφομένων, οὕτως ἡ θείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης ἡ δυναμένη τοῦ ὅλου καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα, πρὸς τοῦ δυναμένου τοῦ ὅλου καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ Δεκάτου τεπάρτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ
ΤΟΥ ΔΕΚΑΤΟΥ ΠΕΜΠΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΤΟΥ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΟΥ ΠΕΜΠΤΟΥ,
ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ,

Ὡς τισι δοκεῖ, ὡς δ' ἄλλοις, Ὑψικλέους Ἀλεξανδρέως περὶ τῆς πέμπτε σωμάτων δεύτερον.

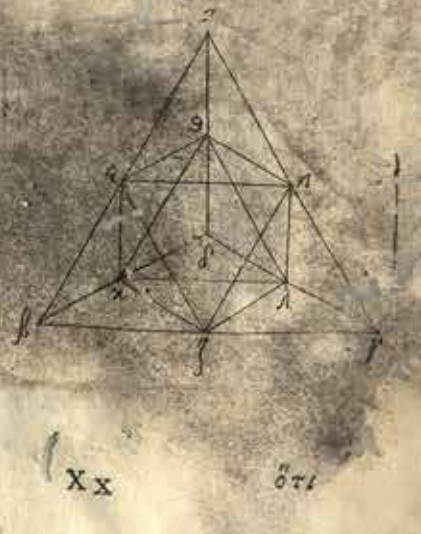
Euclid. lib. 15. Fig. 1.



Πρότασις Α': Πρόβλημα.

Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα ἐγγράψαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα πυραμὶς ἡ αβγδεζηθ, εἰς ἣν δεῖ πυραμίδα ἐγγράψαι. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, γε, αθ, εθ, θγ, φανερὸν δή, ὅτι τὰ αεγ, αθε, αθγ, γθε, ἑξάγωνα ἰσόπλευρά ἐστι, πεξαγώνων γὰρ εἰσὶ διάμετροι αἱ πλευραὶ, πυραμὶς ἄρα ἐστὶν ἡ αεγθ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα.



Πρότασις Β': Πρόβλημα.

Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα πυραμὶς ἡ αβγδ, καὶ τετμήσθω δίχα ἑκάστη τῶν αὐτῆς πλευρῶν τοῖς ε, ζ, η, θ, κ, λ, σημείοις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θκ, θλ, εζ, ζη, καὶ αἱ λοιπαὶ, καὶ ἐπεὶ ἡ αβ, διπλῆ ἐστιν ἑκατέρας τῶν θκ, κζ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ θκ, τῇ κζ, καὶ παράλληλος. ὁμοίως δὴ ἡ θη, τῇ ζκ, ἴση τε ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ θκζη. Λέγω,

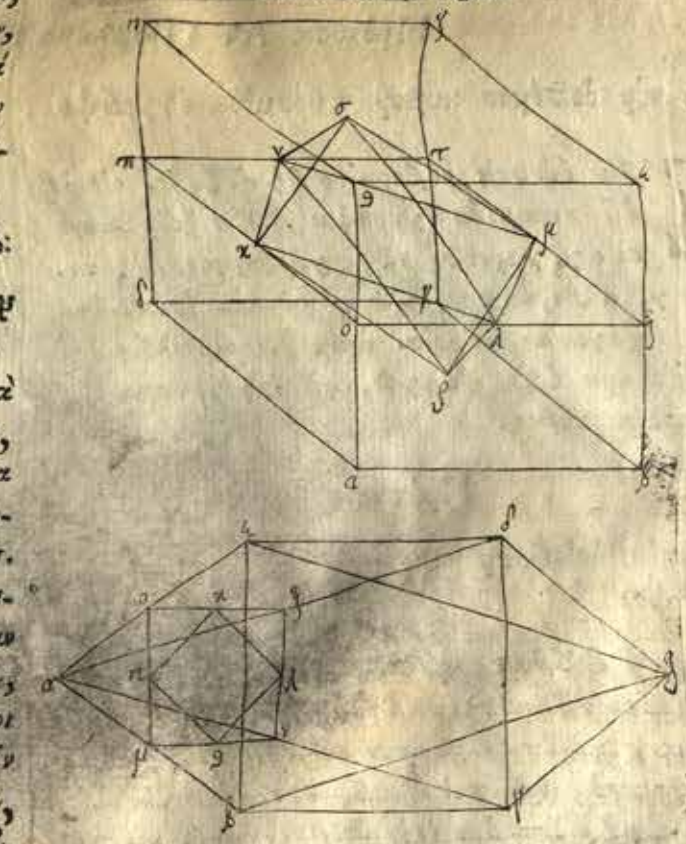
καὶ ὀρθογώνιον, ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῆς κλ, καθεποι ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ εβζη, ζγεη, εζαη, θκζη. ὁμοίως δείξομεν καὶ τὰ παρὰ τὸ θκζη, τετράγωνα ἰσόπλευρα εἶναι, καὶ ὀρθογώνια.

Πρότασις Γ': Πρόβλημα.

Εἰς τὴν δοθεῖσαν κύβον ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ αβγδεζηθ, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν ἐφεστώτων τετραγώνων τὰ κ, λ, μ, ν. Λέγω, ὅτι τὸ κλμν, τετράγωνόν ἐστιν. Ἤχθω διὰ τῶν κ, λ, μ, ν, παραλλήλογραμμον τὸ ξοπτ. ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστιν, ἡ μὲν πο, τῆς κο, ἡ δὲ ξο, τῆς ολ, ἴση ἐστὶν ἡ οπ, τῇ ξο, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ οκ, τῇ ολ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κλ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ολ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς μλ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς λξ, ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς κλ, τοῖς ἀπὸ τῶν μλ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ κν, νμ, τῆς πν, ντ, διπλάσιαι, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ κλμν, καὶ φανερὸν ὅτι καὶ ὀρθογώνιον, εἰλήφθω τῶν βδ, εη, δύο πέρατα τὰ κέντρα τὰ ρ, σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ρλ, ρμ, ρκ, ρν, σκ, σλ, σμ, σν, καὶ φανερὸν, ὅτι ἰσόπλευρά ἐστι τὰ ποιοῦντα τὸ ὀκτάεδρον βίγωνα, τοῖς γὰρ αὐτοῖς λόγῳ ἀποδείξομεν καὶ ταῦτα.

Eucl. Lib. 15. Fig. 2.



Πρότ: Δ': Πρόβ:

Εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγράψαι.

Εἰλήφθω τῶν περὶ τὰ αβγ, αγδ, καβε, αδε, βίγωνα κύκλων τὰ κέντρα τὰ κ, θ, κ, λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κθ, κκ, λκ, λθ. Λέγω, ὅτι τὸ κθκλ, τετράγωνόν ἐστιν. Ἤχθωσαν διὰ τῶν κ, θ, κ, λ, τοῖς βγ, βε, γδ, δε, παράλληλοι αἱ μν, νξ, ξο, ομ. ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ αβγ, βίγωνον, καὶ ἀπὸ τοῦ α, ἐπὶ τὸ θ, κέντρον τοῦ περὶ τὸ αβγ, βίγωνον κύκλου, δίχα τέμνει τὴν πρὸς τῇ τοῦ αβγ, βιγώνε, ἴση ἄρα καὶ ἡ θν, τῇ μθ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ μκ,

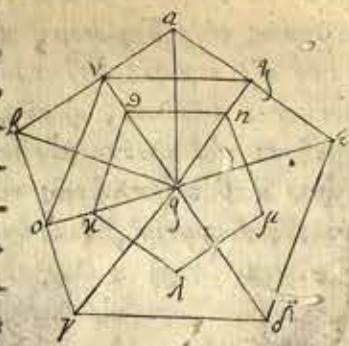
μη, τῇ νο, ἐπειδὴ δὲ ἡ μν, τῇ μο, καὶ τῇ οξ, ἔστιν ἴση. ἴση ἄρα καὶ ἡ νϑ, τῇ μη, καὶ ἡ ϑμ, τῇ νο, καὶ ἡ μη, τῇ οκ, αἱ δὲ ὑπὸ ϑμη, καὶ νοκ, ὀρθαὶ, ἐξ ἃ φανερὸν, ὅτι ἡ νϑ, ἴση ἐστὶ τῇ νκ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ λοιπαί. Ἐπεὶ ἓν παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ νϑκλ, ἐν σὶ ἐπιπέδῳ ἐστὶ, καὶ ἐπεὶ ἥμισύ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ μνϑ, ονκ, ὀρθῆς, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ϑνκ, ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως καὶ αἱ λοιπαὶ, πεντάγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ νϑκλ, δυνατὸν δὲ τῇ ἐξ ἀρχῆς λαμβάνοντι τὸ νϑκλ, κύκλα, καὶ παραλλήλους ἀγαγόντι τὰς μν, νξ, ξο, ομ, ἐπιζευξαι τὰς νϑ, ϑλ, λκ, κν, καὶ εἰπεῖν τὸ νϑκλ, πεντάγωνον. ἐὰν δὴ λάβωμεν καὶ τῶν λοιπῶν ζιγώνων τὰ κύκλα, καὶ ἐπιζεύξωμεν καὶ αὐτὰ, δείξομεν τὰ λοιπὰ πεντάγωνα, καὶ ἔξομεν εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις Ε'. Πρόβλημα.

Εἰς τὸ δοθὲν εἰκοσάεδρον δωδεκάεδρον ἐγγράψαι.

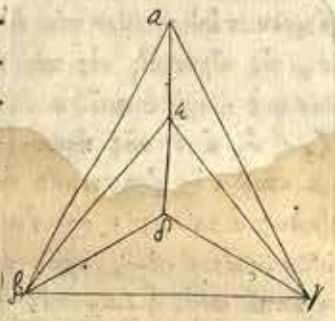
Ἐκκείσθω πενταγώνου τὸ εἰκοσαέδρου τὸ αβγδε, καὶ τὰ κύκλα τῶν κύκλων τῶν περὶ τὰ αζε, αζβ, βζγ, ζγδ, δζε, ζίγωνα, τὰ ν, ϑ, κ, λ, μ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ νϑ, ϑκ, κλ, λμ, μν. καὶ πάλιν ἐπιζεύχθεῖσαι αἱ ζν, ζϑ, ζκ, ἐκβεβλήϑωσαν ἐπὶ τὰ ξ, ο, π, δίχα δὴ τμηθήσονται αἱ εα, αβ, βγ, τοῖς ξ, ο, π, σημείοις, καὶ ὡς ἡ νξ, πρὸς τὴν ο, οὕτως ἡ νϑ, πρὸς τὴν ϑκ, ἴση ἄρα ἡ ϑν, κο. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ λοιπαὶ τῆ νϑκλμ, πενταγώνῳ πλευραὶ ἴσαι δειχθήσονται. Λέγω, ὅτι καὶ ἰσογώνια. ἐπεὶ γὰρ δύο αἱ νξ, ο, περὶ δύο τὰς νϑ, ϑκ. ἴσας γωνίας περιέχουσι, καὶ τὰ λοιπὰ φανερόν. Νενοήϑω ἀπὸ τῆ ζ, ἐπὶ τὸ τῆ αβγδε, πενταγώνῳ ἐπίπεδον κάθετος ἠγμένη, ἥτις πεσεῖται ἐπὶ τὸ κέντρον τῆ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου. ἐὰν δὴ ἀπὸ τῆ ν, σημείῳ, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τῆ ζ, κάθετον ἐπιζεύξωμεν, καὶ διὰ τῆ ϑ, παράλληλον αὐτῇ ἀγάγωμεν, φανερὸν ὅτι συμβάλλει τῇ ἀπὸ τῆ ζ, καθέτῳ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆ ε, παράλληλος ὀρθὴν γωνίαν περιέξει, μετὰ τῆς ἀπὸ τῆ ζ, καθέτου. Πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τῶν ζν, ἐπὶ τὸ κέντρον τὶ περὶ τὸ αβγδε, πενταγώνου κύκλου, καὶ ἐπὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τῆ ϑ, τῇ ἀπὸ τῆ ν, ἐπιζευγνυμένη ὀρθὴ, ᾧ περιέξει μετὰ τῆς αὐτῆς, ἐξ οὗ φανερὸν, ὅτι ἐν σὶ ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ νϑκλμ, πεντάγωνον. Δεῖ εἰδέναι ἡμᾶς, ὅτι ἑαυτῆς ἐρῇ ἡμῖν, πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ εἰκοσάεδρον, φήσομεν ἔτος, φανερὸν, ὅτι ὑπὸ εἴκοσι ζιγώνων περιέχεται, καὶ ὅτι ἕκαστον ζίγωνον ὑπὸ ζιῶν εὐθειῶν περιέχεται. δεῖ ἓν ἡμᾶς πολλαπλασιάσαι τὰ εἴκοσι ζίγωνα ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆ ζι-

Eucl. Lib. 15. Fig. 1.



γώνε, γίνεται δὲ ἑξήκοντα, ὧν ἥμισυ γίνεται τριάκοντα. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ τῆ δωδεκαέδρου. Πάλιν ἐπεὶ δώδεκα πενταγωνα περιέχει τὸ δωδεκάεδρον, πάλιν δὲ ἕκαστον πενταγώνου ἔχει πέντε διθείας, ποιοῦμεν δωδεκάκις πέντε, γίνονται ἑξήκοντα. πάλιν τὸ ἥμισυ γίνεται τριάκοντα, διὰ τί δὲ τὸ ἥμισυ ποιοῦμεν; ἐπεὶ ἑκάστη πλευρὰ, κἄν τε ᾖ τρίγωνον, ἢ πενταγωνον, ἢ τετράγωνον (ὡς ἐπὶ κύβε ἐκ δευτέρε λαμβάνεται.) ὁμοίως δὲ τῇ αὐτῇ μεθόδῳ καὶ ἐπὶ κύβου, καὶ πυραμίδος, καὶ ὀκταέδρε τὰ αὐτὰ ποιήσας εὑρήσεις τὰς πλευράς. Εἰδὲ βεληθείης πάλιν ἑκάστου τῶν πέντε σχημάτων εὑρεῖν τὰς γωνίας, πάλιν τὰ αὐτὰ ποιήσας, μείζε παρὰ τὰ ἐπίπεδα τὰ περιέχοντα μίαν γωνίαν τῆ στερεᾶ. οἷον ἐπεὶ τοῦ τῆ εἰκοσαέδρε γωνίαν περιέχουσι πέντε τρίγωνα, μείζε παρὰ τὰ πέντε γίνονται δώδεκα γωνίαι τῆ εἰκοσαέδρε, ἐπὶ δὲ τῆ δωδεκαέδρε τρία πενταγωνα περιέχουσι τοῦ γωνίαν, μείζονα παρὰ τὰ τρία, καὶ ἕξεις εἴκοσι γωνίας ἴσας τῆ δωδεκαέδρε. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εὑρήσεις τὰς γωνίας. ἐξηπόθη πως ἑκάστε τῶν πέντε στερεῶν σχημάτων ἑνὸς ἐπιπέδου τῶν περιεχόντων ὁποιονοῦν δοθέντος, εὑρητέα καὶ ἡ κλίσις, ἐν ᾗ κέκλινται πρὸς ἄλληλα τὰ περιέχοντα ἐπίπεδα ἕκαστον τῶν σχημάτων. Ἡ δὲ εὕρεσις ὡς Γεμῖνος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατο μέγας διδάσκαλος, ἔχει τὸν τρόπον τοῦτον. Ὅτι μὲν ἐπὶ τῆ κύβε κατ' ὀρθὰς πίπτουσι γωνίαν τὰ περιέχοντα αὐτὸν ἐπίπεδα ἄλληλα, φανερόν. ἐπὶ δὲ τῆς πυραμίδος ἐκτεθέντος ἑνὸς τριγώνου, κοίλοις τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τοῦ βάσιν καθέτῳ ἀγομένῃ, περιφέρειαι γραφεῖσαι, τεμνέτωσαν ἀλλήλας, καὶ αἱ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κοῖλα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι, περιέξουσι τοῦ κλίσιν τῶν περιεχόντων τοῦ πυραμίδα ἐπιπέδων, ἐπὶ δὲ τῆ ὀκταέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τῆ τριγώνε ἀναγραφέντος τετραγώνε, κοίλοις τοῖς πέρασι τῆς διαγωνίε, διαστήματι δ' ὁμοίως τῇ τῆ τριγώνε καθέτῳ, γεγράφθωσαν περιφέρειαι, καὶ πάλιν αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κοῖλα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν λειφθεῖσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζευγνυμένης κλίσεως, ἐπὶ δὲ τῆ εἰκοσαέδρε ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τῆ τριγώνε ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπιζεύχθω ἡ δυὸ δυὸ πλευρὰς ὑποτείνουσα εὐθεῖα, καὶ κοίλοις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ τῆ τριγώνε καθέτῳ, γραφεισῶν περιφερειῶν, αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κοῖλα ἐπιζευγνύμεναι περιέξουσι τοῦ λειφθεῖσαν, ὁμοίως εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῇ τῆ εἰκοσαέδρε ἐπιπέδων. Ἐπὶ δὲ τῆ δωδεκαέδρε, ἑκατέρου ἑνὸς πενταγώνου ἐπιζευχθείσης, ὁμοίως τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης εὐθείας, κοίλοις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ ἀγομένῃ καθέτῳ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τοῦ παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τῆ πενταγώνε γεγράφθωσαν περιφέρειαι, καὶ ἀπὸ τῆ σημείε, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις ἐπὶ τὰ κοῖλα ἐπιζευγνύμεναι, ὁμοίως περιέξουσι τοῦ λειφθεῖσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῇ ἐπιπέδων τῆ δωδεκαέδρε. Οὕτω μὲν ἓν ὁ εἰρημένος ἐξελείσατο ἀνὴρ τὸν περὶ τῶν εἰρημένων ἀποδείδωκε λόγον, σαφῶς ἐφ' ἑκάστῳ φαινομέ-

νομένης αὐτῷ τῆς ἀποδείξεως, ἐπὶ δὲ τὸ πρόδηλον γενέσθαι τῷ ἐν αὐτοῖς ἀποδεικτικῷ θεωρίαν, τὸν λόγον ἐφ' ἑκάστῳ σαφωτέρον, καὶ πρότερον ἐπὶ τῆς πυραμίδος. Νοησάσθω πυραμὶς ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων περιεχομένη, ἧς ἡ αβγδ, τὸ αβγ, βάσεως νοουμένου, κορυφῆς δὲ τὸ δ. καὶ τμηθείσης τῆς αδ, πλευρᾶς δίχα κατὰ τὸ ε, ἐπεζεύχθωσαν αἱ βε, εγ. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρά ἐστι τὰ αδβ, αδγ, τρίγωνα, καὶ δίχα τέτμηται ἡ αδ, αἱ βε, γε, ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν αδ. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ βεγ, γωνία ὀξεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ αγ, τῆς αε, τετραπλάσιον ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς αγ, τοῦ ἀπὸ τῆς αε, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς αγ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν αε, εγ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς αγ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δε, λόγον ἔχει, ὃν τέσσαρα πρὸς τρία, καὶ ἔστιν ἴση ἡ γε, τῇ εβ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βγ, ἐλάττων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῶν βε, εγ, ὀξεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ βεγ. Ἐπεὶ οὖν δύο ἐπιπέδων τῶν αβδ, αδγ, κοινὴ τομή ἐστιν ἡ αδ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ εἰσὶ πρὸς ὀρθὰς ἄρα καὶ ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἡμμένα αἱ βε, εγ, καὶ ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν, ἡ ὑπὸ βεγ, ἄρα γωνία ἡ κλίσις τοῦ ἐπιπέδου ἐστί, καὶ ἔστι δεδομένη, δίδοται γὰρ ἡ βγ, πλευρὰ ὑπὸ τὸ τρίγωνον, καὶ ἑκατέρα τῶν εβ, εγ, κάθετος ὑπὸ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, κέντροις τοίνυν τοῖς βγ, πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γραφόμεναι περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ ε, σημεῖον, καὶ αἱ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ βγ, ἐπιζευγνύμεναι δίθειαι περιέξουσι τὴν κλίσιν τοῦ ἐπιπέδου. τοῦτο δ' ἦν τὸ εἰρημένον. καὶ ὅτι μὲν κέντροις τοῖς βγ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ γραφόμενοι κύκλοι τέμνουσιν ἀλλήλους, φανερόν, ἑκατέρα γὰρ τῶν βε, εγ, μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς βγ, οἱ δὲ κέντροις τοῖς βγ, διαστήματι δὲ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βγ, γραφόμενοι κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων, εἴθ' ἐλάττων ᾖ, εἴθ' ἐφάπτονται, εἴθ' τέμνουσιν, εἴθ' μείζων πάντως τέμνουσι, καὶ ὅπως ὁ περὶ τῆς πυραμίδος σαφής τε καὶ ἀκόλουθος ταῖς ἀποδείξεσι φαίνεται λόγος.



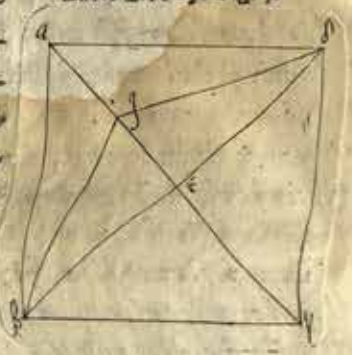
Eucl. Lib. 15. Fig. 4.

Σημειώσομαι πάλιν ἐπὶ τετραγώνου τοῦ αβγδ, πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ ε, καὶ τὰ περιέχοντα αὐτὴν δίχα τῆς βάσεως τρίγωνα ἰσόπλευρα. ἔστω δὲ ἡ αβγδε, πυραμὶς ἥμισυ ὀκταέδρου. Τετμήσθω μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου ἡ αε, δίχα κατὰ τὸ ζ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βζ, δζ, ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ βζ, δζ, καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν αε. Λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ βζδ, γωνία ἀμβλεῖά ἐστιν. Ἐπεζεύχθω ἡ βδ, καὶ ἐπεὶ τετράγωνόν ἐστι τὸ αγ, διάμετρος δὲ ἡ βδ, τὸ ἀπὸ τῆς βδ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς δα, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δα, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ, λόγον ἔχει, ὡς ἐν τοῖς πρὸ τούτου εἴρηται, ὃν τέσσαρα πρὸς τρία, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς βδ, ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δζ, λόγον ἔχει, ὃν ὀκτὼ πρὸς τρία, ἴση δὲ ἡ δζ, τῇ ζβ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δβ, τῶν ἀπὸ τῶν βζ, ζδ, μείζονί ἐστιν, ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ

βζδ,

βζδ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπιπέδων τῶν αβε, αδε, τεμνόντων ἀλλήλας, κοινὴ τομή ἐστιν ἡ αε, πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἤγμέναι εἰσὶν, αἱ δὲ βζ, ζδ, περιέχουσαι ἀμβλεῖαν, ἡ ὑπὸ βζδ, ἄρα γωνία λείπουσά ἐστιν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν αβε, αδε, ἐπιπέδων. ἐὰν ἄρα δοθῇ ἡ ὑπὸ βζδ, δέδοται καὶ ἡ εἰρημένη κλίσις. Ἐπεὶ ἓν δέδοται τὸ ξίγωνον τὸ ὀκταέδρου, καὶ μία πλευρά ἐστι τοῦ ὀκταέδρου ἡ αδ, καὶ ἀπ' αὐτῆς πεντάγωνον ἀναγέγραπται τὸ αγ, δέδοται καὶ ἡ βδ, διάμετρος ἴσα τοῖς πεντάγωνα, ἀλλὰ μὴν καὶ αἱ βζ, ζδ, καθετος τοῦ ξιγώνου. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ βζε, γωνία δέδοται. ἀναγραφόντος ἄρα τοῦ πενταγώνου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ ξιγώνου, ὡς τὸ αγ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς διαμέτρου, ὡς τῆς βδ, ἐὰν κέντροις τοῖς βδ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ ξιγώνου καθέτῳ κύκλους ἐγγράψωμεν, τέμνουσιν ἀλλήλους καὶ τὸ ζ, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ ζ, ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέχουσι τὴν κλίσιν τὴν ὑπὸ βζδ, ἥτις ἐστὶν ἡ λείπουσα, ὡς εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως. καὶ ἐναῦθα δὲ σαφὲς μὲν, ὡς ἑκατέρα τῶν βζ, ζδ, ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς βδ, μείζων, καὶ διὰ τοῦτο ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀνάγκη τέμνειν τοὺς κύκλους ἀλλήλους. καὶ ἐκ τῆς ἀποδείξεως δὲ δῆλον γέγονεν, ὡς ἡ βδ, πρὸς τὴν δζ, δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν ὀκτὼ πρὸς ξία, τῆς δὲ ἡμισείας τῆς βδ, δυνάμει πεντάπλασία ἐστὶν, ὥστε διὰ τοῦτο μείζονα γίνεσθαι ἑκατέραν τῶν βζ, ζδ, τῆς ἡμισείας τῆς βδ, καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ ὀκταέδρου.

Euel. Lib. 15. Fig. 5.



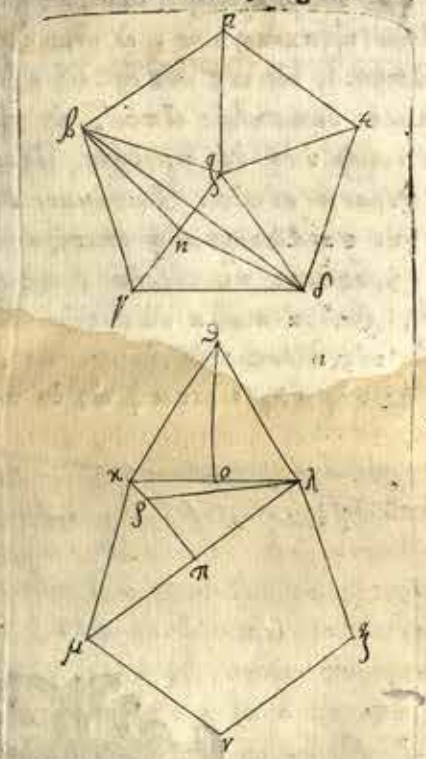
Ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου νενοήσθω πενταγώνου ἰσόπλευρον τὸ αβγδε, ἐπὶ δὲ τούτου πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ ζ, ὥστε τὰ περιέχοντα αὐτὴν ξίγωνα ἰσόπλευρα εἶναι. ἔστω δὴ ἡ αβγδεζ, πυραμὶς μὲν εἰκοσαέδρου κήμματος, τετμήσθω δὲ μία πλευρὰ σύος ξιγώνου ἡ ζγ, δίχα κατὰ τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ βη, ηδ, ἴσαι τε ἄρα καὶ καθετοι γινόμεναι ἐπὶ τὴν ζγ. λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ βηδ, γωνία ἀμβλεῖά ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτόθι φανερόν. Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ βδ, ἀμβλεῖαν μὲν ὑποτείνει τὴν ὑπὸ βγδ, τοῦ πενταγώνου γωνίαν, ταύτης δὲ μείζων ἡ ὑπὸ βηδ, ἐλάττονες γὰρ αἱ βη, δη, τῶν βγ, γδ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρὸ τούτου, ὅτι ἡ ὑπὸ βηδ, γωνία ἡ λείπουσά ἐστιν εἰς τὰς δύο τῆς κλίσεως τῶν βζγ, γζδ, τριγώνων, ταύτης δοθείσης δεδομένη ἔσται καὶ ἡ κλίσις τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων. ἀπὸ γὰρ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου τοῦ εἰκοσαέδρου ἀναγραφόντος πενταγώνου, ἐπιζευχθείσης τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης τὸ πενταγώνου, ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς τῆς βδ, δεδομένης. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν βη, ηδ, καθέτων, τῶν τριγώνων, δέδοται καὶ ἡ ὑπὸ βηδ. εἰ γὰρ κέντροις τοῖς πέρασι τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης τὸ πενταγώνου, ὡς τῆς βδ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, κύκλοι γραφῶσι, τέμνουσιν ἀλλήλους, ὡς καὶ τὸ η, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ η, ἐπὶ

τὰ

τὴ βδ, ἐπιζευγνύμεναι δύθεῖαι περιέξουσι τὴν λειπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς τῦ ἐπιπέδων κλίσεως, καὶ ἐπαῦθα δὲ ἐκ μὲν τῆς καταγραφῆς δῆλόν ἐστιν, ὅτι ἑκατέρα τῦ βκ, κδ, μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς βδ, εἶναι δὲ, καὶ ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀποδειχθῆναι. Νενοήθω χωρὶς ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲν τὸ θκλ, ἀπὸ δὲ τῆς κλ, πενταγωνον ἀναγεγράφθω τὸ κμνξλ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ μλ, καὶ ἤχθω κάθετος τῆ θκλ, τριγώνυ ἡ θο. Λέγω, ὅτι ἡ θο, μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς μλ, ὑποτεινούσης τὴν κλίσιν τῦ ἐπιπέδων. Ἀχθείσης ἀπὸ τῦ κ, ἐπὶ τὴν μλ, καθέτυ τῆς κπ. Ἐπεὶ ἡ ὑπὸ κλπ, μείζων ἐστὶ τρίτυ ὀρθῆς, ταῖς ὑπὸ κθο. Συνεστάθω τῆ ὑπὸ κθο, ἴση ἡ ὑπὸ πλρ, ἡ ἄρα πλ, κάθετός ἐστιν ἰσοπλεύρυ τριγώνυ, ἑκατέρα πλευρὰ ἡ ρλ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ρλ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λπ, λόγον ἔχει, ὃν τέσσαρα πρὸς τρία, μείζων δὲ ἡ κλ, τῆς λρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς κλ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λπ, μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν τέσσαρα πρὸς τρία, ἔχει δὲ καὶ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς θο, ὃν τὰ τέσσαρα πρὸς τρία, ἡ ἄρα κλ, πρὸς τὴν λπ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὴν θο, μείζων ἄρα ἡ θο, τῆς λπ.

Ἐπὶ δὲ τῦ δωδεκαέδρυ ἔτι. Νενοήσθω σὺν τετράγωνον τῦ κύβυ, ἀφ' ὗ τὸ δωδεκαέδρον ἀναγράφεται, τὸ αβγδ, καὶ δύο ἐπίπεδα τῦ δωδεκαέδρυ, τὰ αεβζη, ηγθδζ. Λέγω δὴ ἐπαῦθα δεδομένην εἶναι τὴν κλίσιν τῶν δύο πενταγώνων. Τετμήσθω ἡ ζη, δίχα κατὰ τὸ κ, καὶ ἀπὸ τῦ κ, τῆ ζη, πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων αἱ κλ, κμ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ μλ. Λέγω δὴ πρῶτον, ὅτι ἡ ὑπὸ μκλ, γωνία ἀμβλεῖά ἐστι, δέδεικται γὰρ ἐν τῷ ιγ΄. βιβλίῳ τῶν στοιχείων, ἔτι τῆς σάσεως τῦ δωδεκαέδρυ, ὅτι ἡ ἀπὸ τῦ κ, κάθετος ἀγομένη, ἐπὶ τὸ αβγδ, τετράγωνον ἡμίσειά ἐστι τῆς πλευρᾶς τῦ πενταγώνυ. ὥστε ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς μλ, καὶ διὰ τῦτο ἡ ὑπὸ μκλ, γωνία ἀμβλεῖά ἐστι· συναποδέδεικται δὲ ἐν τῷ αὐτῷ θεωρήματι, ὅτι καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς κλ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς

Eucl. lib. 13. Fig. 6.



τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου, καὶ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου· ὥστε τὴν αὐτῶν κλ, καὶ τῶν κμ, ἴσας οὔσας, μείζονας εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς μλ, τῆς ἄρα ὑπὸ μκλ, γωνίας δοθείσης ἡ λειπουσα εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἔκκλισις ἔσται τῶν ἐπιπέδων, δηλονότι δεδομένη. Ἐπεὶ οὖν ἡ πλευρὰ τοῦ αβγδ, πέραγ: ὑποτεινουσάσι τὰς δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου, δέδοται δὲ τὸ πενπάγωνον, δέδοται ἄρα ἡ μλ, δέδοται δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν μκ, κλ, κάθετοι γαρεῖσιν ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς αβ, ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης, ἐπὶ τῶν παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου, ὡς τῶν ζη, δέδοται ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ λκμ, ἡ λειπουσα, ὡς εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζευγνυμένης κλίσεως· καλῶς ἄρα ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς εἴπον, ὡς χρὴ δοθέντος τοῦ πενταγώνου, ἐπιζεῦξαι τῶν ὑποτείνουσαν ὑπὸ δύο πλευράς, ἥτις ἴση γίνεται τῇ πλευρᾷ τοῦ κύβου, καὶ κοίλοις τοῖς πέρασιν αὐτοῖς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς διχοτομίας ἀγομένῃ καθέτῳ, ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πενταγώνου πλευρὰν, ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, αἱ κλ, κμ, γραφεῖσαι περιφέρειαι, καὶ ἀπὸ τοῦ τῆς συμβολῆς τῶν περιφερειῶν σημείου, ἐπὶ τὰ κοίλα ἐπιζεῦξαι εὐθείας περιεχούσας τῶν λειπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων, ὅτι γὰρ ἡ κλ, καθάπερ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς μλ, εἴρηται, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις σωαποδέδεικται πρό.

Τέλος τοῦ Δεκάτου πέμπτου τῶν τοῦ Εὐκλείδου Στοιχείων.

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑ ΘΕΟΔΟΣΙΟΝ ΤΟΝ ΤΡΙΠΟΛΙΤΗΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΡΟΟΙΜΙΟΝ.

Ἐπειπερ δύο τῆς Ἐπιφανείας τὰ εἴδη, ἐπίπεδός φημι καὶ σφαιρικὴ, ὡς ἐν τῇ τῶν ὅρων Ἑρμηνείᾳ τῷ α: τῷ τὰ στοιχειωτὰ εἰρηται βιβλίων, καὶ ἡ μὲν ἐπίπεδος βάσις ἐστὶ καὶ ὑποκείμενον τῶν ἐπιπέδων παντὸς σχημάτων, ἧς αὖθ ἑδὲν τῶν πιπτῶν ὑφισανάι δυνάται, καὶ τῇ αἰσθήσει ὑποπίπτειν, ἡ δὲ σφαιρικὴ τῶν σφαιρικῶν. πρὸς γνῶσιν μὲν τῶν ἐν ἐπιπέδοις προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων ἱκανά εἰσι τὰ τῶ Εὐκλ: ἓξ βιβλία, ὡς εἰς λόγον στοιχείων τούτοις ὅτι μάλισα συμβάλλοντα, καὶ τὰ ἐν τῷ α: τμήματι τῆς Γεωμετρίας. πρὸς δὲ τὴν τῶν σφαιρικῶν κατάληψιν, εἰ καὶ πολλοὶ τῶν πάλαι Ἑλλήνων διμεθόδως στοιχειώδη τινὰ θεωρήματα καὶ προβλήματα ἐξέθεντο, καὶ πληρεςάτην περὶ αὐτῶν πεποιήκασιν Ἑρμηνείαν, ὧν εἷς καὶ Θεοδόσιος ὁ φιλόσοφος. Ὁ μακρὸς μέντοι χρόνος, καὶ αἱ τῶν φραγμάτων μέγισαι μεταβολαὶ, καὶ αὐτὴ ἡ τῶ γένους τοιαύτη κατάπτωσις, καὶ ταῦτα πάντα σὺν τοῖς ἄλλοις, κατέωαλώσαντό τε καὶ ἐξηφάνισαν, ὡς μηδὲ εἰ ὅλως ποτὲ γεγόνασι πιςεύεσθαι. Ἀνὴρ δέ τις τῶν ἐλλογίμων, καὶ τὰ ἱερὰ τῶν καθ' ἡμᾶς καταλόγω ἐκ τῆς αὐτῆς ὁρμώμενος, ἐν ᾗ καὶ τὴν Ἑλλάδα φωνὴν ἐξέμαθεν, εἰς Ἑνετίας παρεγένετο, κἀκεῖ διὰ τῆς λατινίδος ἀνεμέσως τὴν μαθηματικὴν ἐκδιδαχθεὶς ἐπιςήμην, καὶ πολλὴν περὶ αὐτὴν τὴν σπουδὴν καταβαλόμενος, πρὸς τοῖς ἄλλοις αὐτῶ φιλοπονήμασι, καὶ τὰ παρὰ Θεοδοσίῳ περὶ σφαιρικῶν προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων ἓξ βιβλία ἐκ τῆς Λατινίδος εἰς τὴν Ἑλλάδα μετήνεγκεν, ἐξ ἀλλοδαπῶν τὰ οἰκεῖα ἐρασμισάμενος. Ἐπεὶ δὲ μετὰ τῆς ἔχεται συχνῆς ἀσαφείᾳ πολλῇ ἐπισκιάζεται, ἔδοξέμοι καὶ ταῦτα ἀνακαλύψαι τε καὶ εἰς φῶς ἀγαγεῖν, ὥσπερ δὴ καὶ τ' ἄλλα τῶν αὐτῶ φιλοπονημάτων, καὶ τοῦτο γέ τοι πρὸς χάριν τῶν φιλομαθῶν, καὶ γνησίων τῆς μαθηματικῆς ἐπιςήμης ἐραςῶν. Τῇ γὰρ Ἀςρονομίᾳ, καὶ ἄλλοις τισὶ, περί τε τῆς οὐρανίου καὶ ἐπιγείου καταγινομένοις σφαίρας, ἡ τέτων προθεωρία οὐχ ἧττον ἀναγκαία, ἢ τοῖς ἄλλοις τὰ τῶ Εὐκλ: στοι-

χεῖα. ἡμεῖς δὲ καὶ περὶ τῶν δυνατὸν προβαλλόμεθα πόνον πρὸς ἀκριβῆ ἑκάστων ἐν αὐτοῖς προβλημάτων τε καὶ θεωρημάτων ἀνάπτυξιν, τῷ ὑπεροχὴν ἑκατέρᾳ, τῷ τε γραφώδους ἕξιν, καὶ οἱονεὶ συνεσφιγμένῃ, καὶ αἰνιγματώδους συντομίας χάριν, καὶ τῷ λίαν ἀνειμένῃ τε καὶ ἐφαπλωμένῃ ἀποφεύγοντες, καὶ μέσῳ τινὰ τρόπῳ ὁδὸν βαδίζοντες. ὅσοι δὲ τῶν ἑραστὰι ἀσμενέως καὶ παῦπα ὀφείλουσιν ἀποδέχεσθαι, καὶ τρόπῳ δυνατῷ περὶ αὐτῶν καταβάλλεσθαι σπουδῶ, ὁ γὰρ ἐν αὐτοῖς ἀκριβῶς προγυμνασθεὶς, ἀχρειότερον δυνήσεται τῶν ἄλλων ἀντιλαμβάνεσθαι, ὅσα τῶν σφαίρᾳ ἁπλῶς θεωρημένων προβάλλονται.

Οἱ Ὅροι.

Α′: Σφαῖρα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ μιᾶς ἐπιφανείας περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἅπασαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τῆς σφαίρας κειμένων ἴσαι εἰσί.

Β′. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας, τὸ αὐτὸ σημεῖον καλεῖται.

Γ′: Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖα γραμμὴ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἠγμένη, καὶ περατουμένη, ἑφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, περὶ ἣν ἠρεμοῦσαν ἡ σφαῖρα περιφέρεσθαι δυνάται.

Δ′: Πόλοι δὲ τῆς σφαίρας εἰσὶ τὰ τοῦ ἄξονος πέρατα.

Ε′: Πόλοι δὲ κύκλου ἐν σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένου ἐστὶ σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας κειμένου τῆς σφαίρας, ἀφ' οὗ πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ς′: Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἐγγεγραμμένοι ἴσοι τοῦ κέντρου ἀφίστανται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τοῦ κύκλου ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι.

Ζ′: Κύκλοι μέγιστοί εἰσιν ἐν σφαίρᾳ, οἱ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχόμενοι καὶ δίχα τὴν σφαῖραν τέμνοντες.

Η′: Κύκλοι ἐλάσσονές εἰσιν, οἱ μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχόμενοι τῆς σφαίρας, καὶ εἰς δύο ἀνίσα τὴν σφαῖραν τέμνοντες.

Θ′: Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἐξ ἴσου τοῦ οἰκείου ἀφιστάμενοι πόλου, καὶ ὧν ἐπὶ τῆς περιφερείας αἱ ἀπὸ τοῦ πόλου ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσί, μείζων δὲ ὁ μᾶλλον τοῦ οἰκείου ἀφιστάμενος πόλου.

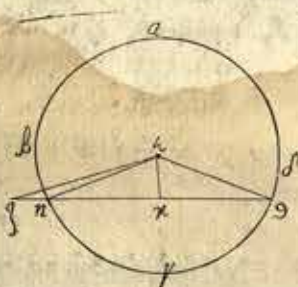
Πρό-

Πρότασις Α': Θεώρημα.

Ε'αν σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένῳ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀχθῇ, ἐντὸς πεσεῖται τῆς σφαίρας.

Τμηθήτω σφαῖρα ἡ αβγδ, ἧς κέντρον τὸ ε, ταῖς τυχούσῃ ἐπιπέδῳ. Λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἀγομένη κάθετος ἐντὸς πίπτει τῆς σφαίρας. εἰ γὰρ μή, πιπτέτω ἐκτὸς, ὡς ἡ εζ, συμβαλλουσα ταῖς τέμνοντι τὴν σφαῖραν ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ ζ. διήχθω γὰρ διὰ τοῦ ζ, ἡ ζηθ, διὰ δὲ τέμνουσα τὴν σφαῖραν κατὰ τὸ η, κθ. κατὰ τῆς ηθ, δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ κ, ἐπεζεύχθω ἡ ηε, καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸν ά. ὅρον τοῦ παρ: αἱ εη, εθ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ηκ, τῇ κθ, ἴση κατὰ τὴν κατασκευήν, τῶν ἄρα εηκ, εθκ, ζιγώνων αἱ εη, ηκ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς εθ, θκ, κοινὴ δὲ ἡ εκ, πάντως καὶ αἱ γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι κατὰ τὴν ἡ: τοῦ ά: τοῦ στοιχειωτοῦ, ὥστε ἡ ὑπὸ εκη, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ εκθ, ἐστὶ δὲ καὶ τὴν ὑπόθεσιν καὶ ἡ ὑπὸ εζκ, ὀρθή, ἄρα αἱ δύο τοῦ εζκ, ζιγ: γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὴν ιζ: τοῦ αὐτοῦ, οὐκ ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται, ἀλλ' ἐντὸς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 1.



Πρότασις Β': Θεώρημα.

Ε'αν σφαῖρα οἱῳδήποτε τμηθῇ ἐπιπέδῳ, ἡ κοινὴ τομὴ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου κύκλος ἐστί.

Τμηθήτω σφαῖρα ἡ αβγδ, ἧς κέντρον τὸ ε, ἐπιπέδῳ τῳ τυχόντι, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῆς τε αβγδ, σφαίρας καὶ τοῦ τέμνοντος αὐτὴν ἐπιπέδου τὸ βζδη, χῆμα. Λέγω δὴ τὸ βζδη, κύκλον εἶναι. ἐπεὶ δὲ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἡ διὰ τοῦ κέντρου διέρχεται τῆς σφαίρας, ἡ ἐκτὸς τοῦ κέντρου, κείσθω ά: διὰ τοῦ κέντρου διέρχεσθαι, ὡς τὸ βζδη. ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ε, ἀχθήτωσαν δὴ εἶναι ἐπὶ τῆς βζδη, κοινῆς τομῆς, αἱ εζ, εθ, εη, καὶ γὰρ τὸν ά: ὅρον τοῦ παρόντος αἱ εζ, εη, εθ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ὥστε καὶ τὸν ιέ: ὅρον τοῦ ά: τοῦ στοιχ: καὶ τὸν θ': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ ἡ βζδη, κοινὴ τομὴ, κύκλός ἐστι.

Κείσθω β': διέρχεσθαι τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐκτὸς τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω κοινὴ αὐ-

αὐτῶ τε καὶ τῆς σφαίρας τομὴ τὸ ζηθκ, κῆμα, λέγω τοῦτο, κύκλον εἶναι· πίπτέτω γὰρ ἀπὸ τοῦ ε, κέντρου καθετος ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, ἥτις καὶ τῶν αὐτοῦ ἐντὸς πίπτει τῆς σφαίρας, ἔστω δὴ αὕτη ἡ ελ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν, αἱ εζ, εη, εθ, λζ, λη, λθ. καὶ ἐπεὶ ἡ ελ, καθετός ἐστι πρὸς τὸ τέμνον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας καὶ τὸν γ'· ὅρον τοῦ ια'· τοῦ σοιχ· ἅπτονται δὲ αὐτῆς, αἱ λζ, λη, λθ, ἄρα ἑκάστη τῶν ὑπὸ ελζ, ελη, ελθ, γωνιῶν ὀρθή ἐστι, καὶ καὶ τῶν μζ'· τοῦ α'· τοῦ αὐτοῦ, τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ελ, λζ, τετράγ· ἴσα εἰσὶ τῷ ἀπὸ τῆς εζ, τετραγ· τὰ δὲ ἀπὸ τῷ ελ, λη, τῷ ἀπὸ τῆς εη, καὶ τὰ ἀπὸ τῷ ελ, λθ, τῷ ἀπὸ τῆς εθ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῷ εζ, εη, εθ, τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ, διὰ τὸ καὶ τὰς εζ, εη, εθ, ἴσας εἶναι καὶ τὸν α'· ὅρον τοῦ παρόντος, ἄρα τὰ ἀπὸ τῷ ελ, λζ, ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῷ ελ, λη, καὶ τοῖς ἀπὸ τῷ ελ, λθ, κοινοῦ ἄρα ἀφαιρεμένου τοῦ ἀπὸ τῆς ελ, συναπολείπονται τὰ ἀπὸ τῷ λζ, λη, λθ, ἴσα, ὥστε καὶ αἱ λζ, λη, λθ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ κατὰ τὸν ῥηθέντα ια'· ὅρον ἡ ζηθκ, κοινὴ τομὴ τῆς τε αβγδ, σφαίρας, καὶ τοῦ τέμνοντος αὐτὴν ἐπιπέδου κύκλος ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Λ': Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ποιῆσαι, ὅτι τὸ αὐτὸ ἐστι κέντρον τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ κύκλου, τοῦ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένου, ὡς ἐπὶ τοῦ α': δέδεικται κήματος.

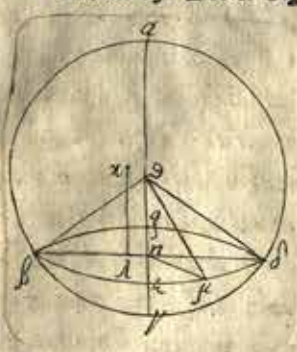
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Β': Ἔτι ἐὰν ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, τοῦ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένου, ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου πίπτει, ὡς ἐπὶ τοῦ β': κήματος.

Πρότασις Γ': Πρόβλημα.

Τῆς δοθείσης σφαίρας τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 2.



Ζητείσθω τὸ κέντρον τῆς αβγδ, δοθείσης σφαίρας, εἰς εὕρεσιν δὲ τούτου τμηθήτω ἡ αβγδ, σφαῖρα ἐπιπέδῳ τινί· καὶ ἐπεὶ ἡ κοινὴ τομὴ τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ τέμνοντος αὐτὴν ἐπιπέδου, κύκλος ἐστὶ, καὶ τοῦ α'· τοῦ παντὸς, καὶ τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἡ βεδζ, κοινὴ τομὴ τῆς τε αβγδ, δοθείσης σφαίρας, καὶ τοῦ τέμνοντος αὐτὴν ἐπιπέδου κύκλος ἐστίν. Εὑρεθήτω δὴ καὶ τοῦ α': τοῦ γ': τοῦ σοιχ: τὸ κέντρον τοῦ βεζδ, κύκλου, καὶ ἔστω τοῦτο τὸ η, ἀφ' οὗ ἀνεσάθω κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ βεδζ, κύκλου ἡ ηα, περατωμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ α, καὶ γ. εἶτα τμηθήτω ἡ αγ, δίχα καὶ τὸ θ, καὶ τὸ θ, σημ-

σημεῖον, ἔσαι κέντρον τῆς αβγδ, σφαίρας. ἡ γὰρ ἐκτὸς ἐστὶ τῆς αγ. εἰδὲ δυνατὸν, ἔστω τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ, πίπτετω κάθετος ἐπὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἡ κλ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βλ: πόρισμα τῆς ιγ' τοῦ β': πόρισμα τῆς αὐτῆς τοῦ λ, ἐστὶ κέντρον τοῦ βεδζ, κύκλου, ὅπερ ἄτοπον, εὕρηται γὰρ τὸ η, οὐκ ἄρα ἐκτὸς τῆς αγ, τὸ κέντρον ἐστὶ τῆς αβγδ, σφαίρας, ὁτι δὲ τὸ θ, δῆλον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ θβ, θδ, θμ, ημ. καὶ ἐπεὶ ἡ θη, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ βεδζ, κύκλου, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας, καὶ τὸν γ': ὅρον τοῦ ια' τοῦ στοιχείου, αἱ ἄρα ὑπὸ θηβ, θηδ, θημ, ὀρθαί εἰσιν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ηβ, ηδ, ημ, ἴσαι, ἄρα τῶν θηβ, θηδ, θημ, τριγώνων αἱ θη, ηβ, θη, ηδ, θη, ημ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν. ἄρα καὶ τὸν δ': τοῦ α': τοῦ στοιχείου αἱ θβ, θδ, θμ, ἴσαι εἰσὶ, καὶ καὶ τὸν α': ὅρον τοῦ παρόντος, τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τῆς αβγδ, σφαίρας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος ἐν αὐτῇ κύκλου ἀγομένης καθέτου ἐστί.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Β': Ἐὰν ἡ τομὴ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, δύο εἰσὶν τῆς αγ, συμπέσῃ τῇ κέντρῳ τοῦ κύκλου, τὸ αὐτὸ ἔσαι κέντρον τῆς τε σφαίρας καὶ τοῦ κύκλου.

Πρότασις Δ': Θεώρημα.

Ἡ σφαῖρα οὐκ ἅπτεται τοῦ ἐπιπέδου κατὰ πλείονα σημεῖα, ἢ ἓν.

Σφαῖρα ἡ αβγ, ἁπτέσθω τοῦ τυχόντος ἐπιπέδου. Λέγω, ὅτι ἅπτεται αὐτοῦ κατὰ ἓν μόνον σημεῖον. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἁπτέσθω κατὰ δύο τὰ β, καὶ γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βγ, καὶ ἀπὸ τοῦ δ, κέντρου τῆς σφαίρας πίπτετω κάθετος ἐπὶ τὴν βγ, ἡ δε. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ δβ, δγ, καὶ ἐπεὶ ἑκάτερον τῶν δεβ, δεγ, τριγώνων ὀρθογώνιόν ἐστι καὶ τὸ ε, πάντως ἄρα ἡ εδ, ἐλάττων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν δβ, δγ, κατὰ γὰρ τὸν ια': τοῦ α': τοῦ στοιχείου πάντα τρίγωνα μείζονα πλευρὰ μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. ὥστε ἡ δε, ἐντὸς πίπτει τῆς σφαίρας, ἀλλ' ἡ βγ, ἐν τῷ ἁπτομένῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ καὶ τοῦ α': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα καὶ τὸ ἁπτόμενον ἐπίπεδον ἐντὸς τῆς σφαίρας πίπτει, ὥστε πέμπει τοῦ σφαίραν, καὶ οὐκ ἅπτεται, ὑπετέθη δὲ ἅπτεσθαι πάντως, ἄτοπον ἄρα. ὥστε δῆλον, ὅτι οὐ καὶ πλείονα, ἢ ἓν σημεῖον ἡ σφαῖρα τοῦ ἐπιπέδου ἅπτεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 3.

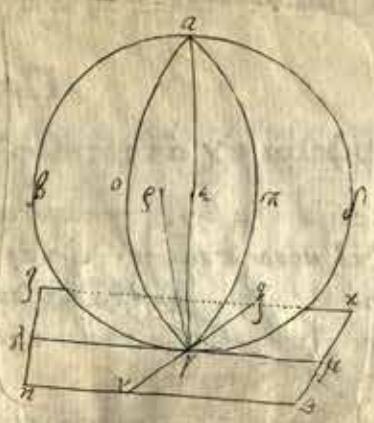
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Δῆλον ἐκ τούτου, ὅτι ἡ δύο τινὰ σημεῖα τῆς σφαίρας ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα, ἐντὸς ὅλη τῆς σφαίρας πίπτει.

Πρότασις Ε'. Θεώρημα.

Ἐὰν σφαῖρα ἅπτηται ἐπιπέδου, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἁφὴν εὐθεῖα ἀχθῇ, κάθετος ἔσται ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὸ ἁπτόμενον ἐπίπεδον.

Ἁπτέσθω ἡ αβγδ σφαῖρα, ἧς κέντρον τὸ ε, τοῦ ζηθκ, ἐπιπέδου κατὰ τὸ γ σημεῖον, ἀπὸ δὲ τοῦ ε, κέντρου ἀχθήτω ἐπὶ τὸ γ, ἡ εγ. Λέγω, ὅτι ἡ εγ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ ηκ, ἐπίπεδον. Τμηθήτω ἡ σφαῖρα δυσὶν ἐπιπέδοις διὰ τῆς εγ, διερχομένοις, ὥστε τὸν αγ, κοινὸν αὐτῶν εἶναι τομέα· μὴ δὲ τοῦ ἁπτομένου ἐπιπέδου κοιναὶ εἶναι τομαὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδων τὰς λμ, νξ. καὶ ἐπεὶ κέντρον τοῦ β': τοῦ παρόντος ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ τεμνόντος ἐπιπέδου τὸν σφαῖραν, καὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας κύκλος ἐστί, παντὸς γε τοῦ, τε αβγδ, καὶ αογπ, κύκλος ἐστίν. ἐπεὶ δὲ πάλιν ἑκάτερος τῶν αβγδ, αογπ, κύκλων διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, δῆλον, ὅτι τὸ ε, κέντρον τῆς σφαίρας, κέντρον ἐστὶ τοῦτε αβγδ, καὶ αογπ, κύκλου καὶ τοῦ α: πόρισμα τοῦ β': τοῦ παρόντος, καὶ ἡ εγ, ἡμιδιάμετρός ἐστιν ἑκατέρου, ἅπτεται δὲ ἡ σφαῖρα τοῦ ηκ, ἐπιπέδου καὶ τοῦ γ, καὶ διὰ τοῦ γ, διέρχονται αἱ λμ, νξ, κοιναὶ τομαὶ τοῦτε ἁπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας, καὶ τῶν τεμνόντων αὐτὸν, ἄρα ἡ μὲν λμ, ἅπτεται τοῦ αβγδ, κύκλου, ἡ δὲ νξ, τοῦ αογπ· εἰ γὰρ μὴ ἅπτονται, ἀλλὰ τεμοῦσι τὸν κύκλον, ἐντὸς πίπτουσι τῆς σφαίρας καὶ τὸ πόρισμα τοῦ ὑστέρου, καὶ ἑπομένως καὶ τὸ ηκ, ἐπίπεδον ἅπτεται τοῦ κύκλου, ὅπερ ἐναντίον ἐστὶ τῇ ὑποθέσει· ἅπτονται ἄρα ἡ μὲν λμ, τοῦ αβγδ, κύκλου, ἡ δὲ νξ, τοῦ αογπ· καὶ καὶ τῷ ι ἡ: τοῦ γ: τοῦ στοιχείου, ἡ εγ, κάθετός ἐστιν ἐφ' ἑκατέρας τῶν λμ, νξ. ὥστε καὶ τῷ δ': τοῦ ια: τοῦ αὐτοῦ ἡ εγ, κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ζηθκ, ἁπτόμενον ἐπίπεδον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 4.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι καὶ πάλιν, ἐὰν δηλονότι ἀπὸ τῆς ἁφῆς τοῦ ἁπτομένου ἐπιπέδου τῆς σφαίρας κάθετος πρὸς τὸ αὐτὸ ἀνασταθῇ ἐπίπεδον, ἐντὸς ἔσται τῆς σφαίρας ὡς ἡ γα, τοῦ τῆς σφαίρας κέντρον ἐπὶ τῆς ἀνασταθείσης ἔσαι κάθετος. εἰ γὰρ μὴ, ἀλλ' ἐκτὸς εἴη ταύτης, ὥσπερ τὸ ρ, ἐπιζευχθεῖσα ἡ ργ, κάθετος

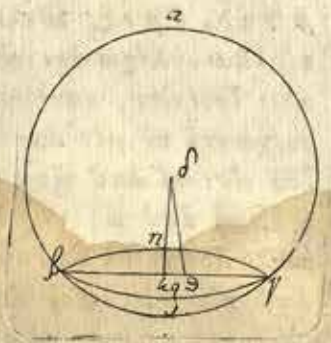
θεπος ἔσαι, καὶ τὰ ἤδη εἰρημένα, ἐπὶ τὸ η κ, ἐπίπεδον, ὑπεπέθη δὲ καὶ ἡ ε γ, ἄτοπον ἄρα καὶ τῷ ι γ': τὸ ι ά:

Πρότασις ς': Θεώρημα.

Ε'αμ' ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸν κέντρον τοῦ ἐλάσσονος τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων γραμμὴ ἀχθῇ, ὀρθὴ ἔσαι ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον.

Λ'χθήτω ἀπὸ τοῦ δ, κέντρου τῆς α β γ, σφαίρας ἐπὶ τὸ ε, κέντρον τοῦ β ζ γ η κύκλου ἐλάσσονος ἡ δ ε. Λέγω τῷ δ ε, κάθετον εἶναι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ζ γ η, κύκλου, εἰ γὰρ μὴ, πίπτετω ἡ δ θ. καὶ ἐπεὶ ἡ δ θ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ζ γ η, κύκλου ἀπὸ τοῦ δ, κέντρου τῆς σφαίρας ἠγμένη, δῆλον, ὅτι τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ β ζ γ η, κύκλου, καὶ τὸ β': πόρισμα τῆς β': τοῦ παρόντος, ἀλλ' ὑπετέθη τὸ ε, κέντρον εἶναι τοῦ β ζ θ η, κύκλου, ἄτοπον ἄρα. ὥστε ἡ δ θ, οὐκ ἔστι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ζ γ η, κύκλου ἐλάσσονος. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλη τις, ἡ δ ε, ἄρα ἡ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύουσα τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κύκλου κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ β ζ γ η, κύκλου ἐπίπεδον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 5.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ε'κ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου ἀχθῇ, διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διέρχεται.

Πρότασις Ζ': Θεώρημα.

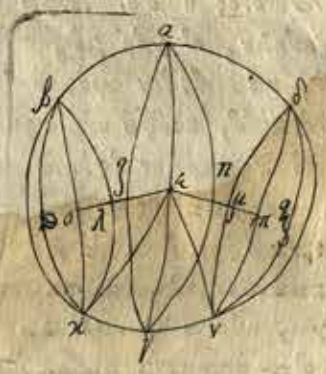
Τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων οἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου, διερχόμενοι τῆς σφαίρας μέγιστοί εἰσι, καὶ ἀνάπαλιν, οἱ μέγιστοι διὰ τοῦ κέντρου διέρχονται τῆς σφαίρας, οἱ δὲ ἐξ ἴσου ἀφιστάμενοι τοῦ κέντρου ἴσοι εἰσὶ, καὶ ἀνάπαλιν, οἱ ἴσοι ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου ἀφίστανται, ἐλάσσονες δὲ οἱ ἀπώτερον τοῦ κέντρου τῷ ἐγγυτέρω.

Ε'στωσαν ἐν σφαίρᾳ τῇ α β γ δ, κύκλοι οἱ α ζ γ η, β θ κ λ, δ μ ν ξ, ὧν ὁ μὲν α ζ γ η, διὰ τοῦ ε, κέντρου διερχέσθω τῆς σφαίρας, οἱ δὲ β θ κ λ, δ μ ν ξ, ἐκτὸς τοῦ κέντρου ἔστωσαν. Λέγω, ὅτι ὁ α ζ γ η, κύκλος μέγιστός ἐστιν. Ε'στωσαν γὰρ κέντρα τῶν β θ κ λ, δ μ ν ξ, κύκλων τὰ ο, π, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ε ο, ε π, ε κ, ε ν, ε γ. καὶ ἐπεὶ καὶ τῶν αὐωτέρω, ἑκατέρα τῶν ε ο, ε π, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, παίπως γε αἱ ὑπὸ ε ο κ, ε π ν, γωνίαι ὀρθαί εἰσιν, ὥστε ἡ μὲν ε κ, μείζων ἐστὶ τῆς κ ο, ἡ δὲ ε ν, τῆς ν π, καὶ τῷ ι θ: τοῦ δ: τοί-

ςοι-

στοιχειωτῶ. ἀλλ' ἑκατέρα τῆς ε κ, ε ν, ἴση ἐστὶ τῇ ε γ, καὶ τὰ ά: ὅρον, ἄρα καὶ ἡ ε γ, μείζων ἐστὶ τῆς τε κ ο, καὶ ν π. ἔστι δὲ ἡ μὲν ε γ, ἡμιδιάμετρος τῆ α ζ γ κ, κύκλε, ἡ δὲ κ ο, τῆ β θ κ λ, καὶ ἡ ν π, τῆ δ μ ν ξ, ἄρα ὁ α ζ γ κ, κύκλος ὁ διὰ τῶ ε, κέντρε διερχόμενος μείζων ἐστὶν ἑκατέρε τῶν β θ κ λ, δ μ ν ξ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὁ αὐτὸς α ζ γ κ, μείζων καὶ παντὸς ἄλλε, μέγιστος ἄρα ὁ διὰ τοῦ κέντρε. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ α ζ γ κ, κύκλος μέγιστος, λέγω ὅτι διὰ τῶ κέντρε τῆς σφαίρας διέρχεται. εἰ γὰρ μή, ὁ διὰ τῶ κέντρε διερχόμενος μείζων ἔσαι τοῦ α ζ γ κ, καὶ τὰ ἤδη εἰρημένα, ἀλλ' ὑπετέθη καὶ μέγιστος, ἄτοπον ἄρα, οἱ μέγιστοι ἄρα κύκλοι διὰ τῶ κέντρε τῆς σφαίρας διέρχονται.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 6.



Ἔστωσαν δὲ αἱ ε ο, ε π, ἴσαι, ὥστε τοὺς β θ κ λ, δ μ ν ξ, κύκλες ἐξ ἴσε τῶ κέντρε ἀφίσασθαι. Λέγω ὅτι οἱ β θ κ λ, δ μ ν ζ, κύκλοι ἴσοί εἰσι, κατὰ γὰρ τὰ μζ': τῶ ά: τοῦ στοιχειωτῶ τὰ μὲν ἀπὸ τῆς κ ο, ο ε, τετράγωνα ἴσά εἰσι τῇ ἀπὸ τῆς ε κ, τὰ δὲ ἀπὸ τῆς ν π, π ε, τῇ ἀπὸ τῆς ε ν, ἀλλ' αἱ ε κ, ε ν, ἴσαί εἰσιν, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῆς κ ο, ο ε, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ν π, π ε, ἀφαιρεμένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν ο ε, π ε, ἴσων τετραγώνων, ὑπολείπονται ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν κ ο, ν π, καὶ ἑπομένως ἡ κ ο, τῇ ν π, ὁμοίως ἴση ἐστὶν, ἀλλ' ἡ μὲν κ ο, ἡμιδιάμετρός ἐστι τοῦ β θ κ λ, κύκλε, ἡ δὲ ν π, τοῦ δ μ ν ξ, ἄρα οἱ β θ κ λ, δ μ ν ξ, κύκλοι ἴσοί εἰσιν. ὅτι δὲ καὶ ἀνάπαλιν, δῆλον, ἔσωσαν γὰρ ἴσοι οἱ β θ κ λ, δ μ ν ξ, κύκλοι. Λέγω, ὅτι ἑκάτερος ἐξ ἴσε τῶ ε, κέντρε ἀφίσαται, τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ κατὰ τὰ ρηθεῖσαν μζ': τὰ ἀπὸ τῶν κ ο, ο ε, τετράγωνα ἴσά ἐστι τῇ ἀπὸ τῆς ε κ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ν π, π ε, τῇ ἀπὸ τῆς ε ν, αἱ δὲ ε κ, ε ν, ἴσαί εἰσι, παντως γε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν κ ο, ο ε, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ν π, π ε. ἀφαιρεμένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν κ ο, ν π, ἴσων, ἡμιδιάμετροι γὰρ ἴσων κύκλων, ὑπολείπονται τὰ ἀπὸ τῶν ο ε, π ε, τετράγωνα ἴσα, καὶ ἑπομένως αἱ ο ε, π ε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἄρα καὶ τὸν ς': ὅρον τῶ παρόντος οἱ β θ κ λ, δ μ ν ξ, κύκλοι ἐξ ἴσε τῶ ε, κέντρε ἀφίσανται.

Ἔστω πάλιν ὁ μὲν β η γ θ, ἀπώτερον τῶ ζ, κέντρε τῆς α β γ δ ε, σφαίρας, ὁ δὲ ε λ δ μ, ἐγγύτερον, ἤτοι ἔστω ἡ ζ κ, μείζων τῆς ζ ν. Λέγω, ὅτι ὁ β η γ θ, ἐλάττων ἐστὶ τῶ ε λ δ μ, καὶ γὰρ κατὰ τὰ ρηθεῖσαν μζ': τὰ ἀπὸ τῶν γ κ, κ ζ, τετράγωνα ἴσά ἐστι τῇ ἀπὸ τῆς γ ζ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν δ ν, ν ζ, τῇ ἀπὸ τῆς ζ δ, ἴσαι δὲ αἱ ζ γ, ζ δ, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν γ κ, κ ζ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν δ ν, ν ζ. ἀφαιρεμένων δὲ τῶν ἀπὸ τῶν ζ κ, ζ ν, ἀνίσων, ὑπολείπεται καὶ τὰ ἀπὸ τῶν γ κ, δ ν, ἄνισα, μείζων δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ἡ ζ κ, τῶ ἀπὸ τῆς ζ ν, μείζων

ζων ἄρα ἀντιπεπονθότως καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δν, τῷ ἀπὸ τῆς γκ, καὶ ἑπομένως ἡ δν, τῆς γκ, μείζων ἐστίν. ἀλλ' ἡ μὲν δν, ἡμιδιάμετρός ἐστι τοῦ ελδμ, ἡ δὲ γκ, βηγθ, ἄρα ὁ ελδμ, κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ βηγθ, τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἄρα κύκλων οἱ μὲν διὰ τοῦ κέντρου διερχόμενοι τῆς σφαίρας μέγιστοι κεῖνται, καὶ τὰ ἑξῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Ἐκ τούτου ῥᾴστα σωάγεται, ὅτι πάντες οἱ ἐν τῇ σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι ἴσοι εἰσὶν, ἡ γὰρ τοῦ μεγίστου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλου ἡμιδιάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιδιαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ὡς δέδεικται.

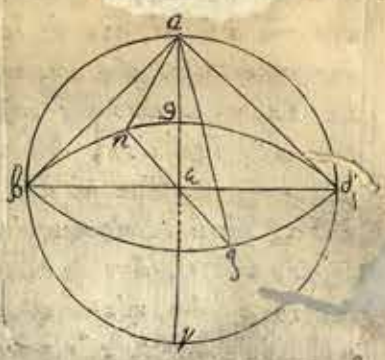
Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 7.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Β': Ἔτι ἑκατέρωθεν τοῦ οἱασδήποτε τῶν σφαίρᾳ μεγίστου κύκλου αἱ πλείους, ἢ δύο μόνον ἴσας εἶναι τῶν ἐλασσόνων ἐν αὐτῇ κύκλων.

Πρότασις Η': Θεώρημα.

Ἐὰν παρὰ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐν αὐτῇ κύκλου καθετος ἀχθῇ, διὰ τῶν πόλων τοῦ κύκλου διελεύσεται, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν ἀπὸ τοῦ πόλου τοῦ ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ κάθετος ἀχθῇ, διά τε τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διελεύσεται, καὶ τοῦ ἀπεναντίον πόλου τοῦ κύκλου.

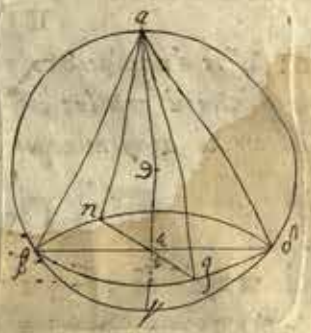


Ἔστω σφαῖρα ἡ αβγδ, ἧς κέντρον τὸ ε, κύκλος δὲ ἐν αὐτῇ ὁ βζδη. ἐπεὶ δὲ οἱ κύκλοι ἐν τῇ σφαίρᾳ ἢ μέγιστοί εἰσιν, ἢ ἐλάσσονες, ἔστω ἀ: ὁ βζδη, μέγιστος, ὡς καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται καὶ τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἀνεσάθω κάθετος πρὸς τὸ αὐτοῦ ἐπίπεδον ἡ εθ, Λέγω ὅτι ἡ εθ, ἐκβαλλομένη διὰ τῶν πόλων τοῦ βζδη, διελεύσεται κύκλου. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βδ, ηζ, διάμετροι τοῦ κύκλου, καὶ ἀπὸ τοῦ α, πόλου ἀχθήτωσαν αἱ αβ, αη, αδ, αζ, καὶ ἐπεὶ ἡ εθ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βζδη, κύκλου ἐπίπεδον, πάντως γε καὶ τὸν γ': ὅρον τοῦ ι ά: τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ πρὸς τὰς βδ, ηζ, ἀπομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ ὅσας ἐν τῷ τοῦ βζδη, κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ εβ, εζ, εδ, εη, ἴσαι, ἡμιδιάμετροι γὰρ τοῦ κύκλου εἰσὶ, καὶ κοινὴ ἡ αε, ἄρα τῶν αεβ, αεη, αεδ, αεζ, ἰσογώνων κατὰ τὸν δ': τοῦ ά: τοῦ στοιχειωτοῦ αἱ αβ, αη, αδ, αζ, ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσαι εἰσὶ, καὶ κατὰ τὸν ε: ὅρον τοῦ παρόντος τὸ

α, πόλος ἐστὶ τοῦ βζδη, κύκλου, τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ τὸ γ, πόλος τοῦ αὐτοῦ εἶναι κύκλου.

Εἰδὲ ὁ κύκλος ἐλάσσων ἔστω, ἀχθήτω ἀπὸ τοῦ θ, κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ βζδη, κύκλου κάθετος ἡ θε. Λέγω ὅτι ἡ θε, ἐκβαλλομένη ἑκατέρωθεν, διὰ τῶν πόλων τοῦ κύκλου διέρχεται. τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἡ αθ, διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βζδη, κύκλου διέρχεται καὶ τὸ β′: πόρισμα τῆς β′: τοῦ παρόντος, δίχα δειχθήσεται καὶ τὰ ὠὠτέρω, αἱ αβ, αη, αδ, αζ, ἴσαι. ὥστε τὸ α, πόλος ἐστὶ τοῦ βζδη, κύκλου.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 8.



Ἀλλὰ δὴ ἀχθήτω ἀπὸ τοῦ α, πόλου τοῦ βζδη, κύκλου κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτοῦ ἐπίπεδον ἡ αε. Λέγω ὅτι ἡ αε, διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, καὶ τοῦ ἀπεναντίον πόλου τοῦ αὐτοῦ κύκλου, τῶν γὰρ αβ, αη, αδ, αζ, ἀγομένων, καὶ τῶν βε, εζ, ἐπιζευγνυμένων, ἐπεὶ ἡ αε, καθέτος ἐστὶν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ βζδη, κύκλου, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ βζδη, κύκλου οὔσας εὐθείας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τοῦ βζδη, κύκλου ὀρθὰς ποιήσει γωνίας: ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ ε, γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ αεβ, γωνία τῇ ὑπὸ αεζ, ἡ δὲ ὑπὸ αεδ, τῇ ὑπὸ αεη, ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ ὑπὸ βεδ, ζεη, γωνίαι. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ αεβ, γωνία τῇ ὑπὸ αεζ, ἡ δὲ ὑπὸ βεδ, τῇ ὑπὸ ζεη, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αεδ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αεη, ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ αεδ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αεη, ἐστίν. ἡ αε ἄρα καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται καὶ τοῦ ἀπεναντίον πόλου τοῦ αὐτοῦ κύκλου. ὅτι δὲ καὶ τὸ ε, κέντρον ἐστὶ τοῦ βζδη, κύκλου καὶ τὸν εἰ: ὅρον τοῦ ἀ: τοῦ στοιχειωτοῦ. ἡ αὐτὴ δεῖξις ἐφαρμόζει ἐφ' ἑκατέρου τῶν σχημάτων. ἐπὶ μὲν γὰρ τοῦ ἀ: ἐπεὶ τὸ ε, κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου, ὁ δὲ κύκλος μεγιστός ἐστι, δῆλον, ὅτι τὸ ε, κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ ὠὠτέρω. ἐπὶ δὲ τοῦ β′: ἐπεὶ ἡ αε, διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βζδη, κύκλου διέρχεται, καὶ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ αὐτοῦ ἐπίπεδον, πρώτως γε τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐστὶ τῶν α, ε, ἐστὶ καὶ τὸ ἀ: πόρισμα τῆς γ′: τοῦ παρόντος. Ὅτι δὲ ἡ αε, καὶ διὰ τοῦ γ, ἕτερα διέρχεται πόλου, δέδεικται μικρὸν πρόσθεν. Ἐὰν ἄρα παρὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἐν αὐτῇ κύκλου κάθετος ἀχθῇ διὰ τῶν πόλων, καὶ τὰ ἑξῆς.

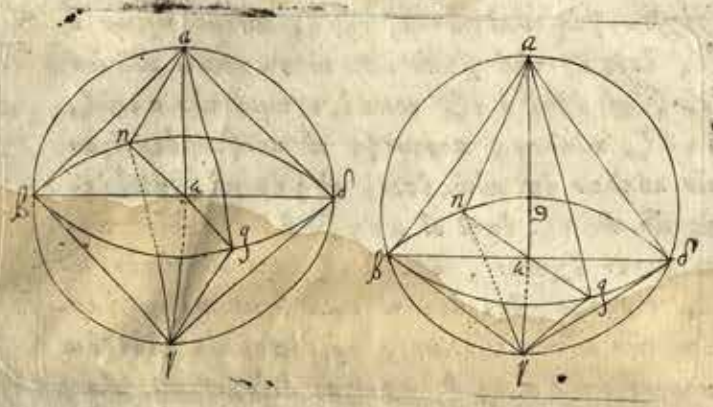
Πρό-

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Ε'αν διὰ τῆς πόλου τινὸς τῆς ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλου δίθετα ἀχθῇ, κάθετος ἔσται ἐπὶ τὸ τοῦ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ τῇ α β γ δ, κύκλος ὁ β ζ δ η, οὗ πόλοι τὰ α, καὶ γ, σημεῖα, καὶ διήχθω διὰ τῶν α, καὶ γ, σημείων ἡ α γ. Λέγω ὅτι ἡ α γ, κάθετός ἐστι, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς α β γ δ, σφαίρας διέρχεται. Συμβαλλέτω γὰρ ἡ α γ, τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ β ζ δ η, κύκλου κατὰ τὸ ε, καὶ διὰ τοῦ ε, διήχθωσαν αἱ β δ, η ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ὡς πρότερον αἱ α β, α η, α δ, α ζ, καὶ ἔτι αἱ γ β, γ ζ, γ δ, γ η. καὶ ἐπεὶ αἱ α β, α η, α δ, α ζ, ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸν ε: ὅρον τοῦ παρόντος, εἰσὶ δὲ ἴσαι κατὰ τὸν αὐτὸν, καὶ αἱ γ β, γ ζ, γ δ, γ η, καὶ κοινὴ αἱ α γ. ἄρα κατὰ τὴν ἡ: τοῦ ά: τοῦ στοιχειώδους, τὰ α β γ, α η γ, α ζ γ, καὶ α δ γ, τρίγωνα ἴσα ἐστὶ, καὶ πᾶσαι γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴσας ἔχουσιν, ὥστε αἱ ὑπὸ β α ε, η α ε, δ α ε, καὶ ζ α ε, γωνίαι ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ α β, α η, α δ, καὶ α ζ, ἴσαι, ὡς δέδεικται, καὶ κοινὴ ἡ α ε, ἄρα κατὰ τὴν δ': τοῦ ά: τοῦ αὐτοῦ, αἱ β ε, η ε, δ ε, ζ ε, ἴσαι εἰσὶ, καὶ τὸ ε, κέντρον ἐστὶ τοῦ β ζ δ η, κύκλου, κατὰ τὸν ιέ: ὅρον τοῦ αὐτοῦ. ἄρα κατὰ τὴν ἀνωτέρω κάθετός ἐστιν ἡ α ε, πρὸς τὸν [illegible] κύκλου, καὶ κατὰ τὸ πόρισμα τῆς γ': τοῦ παρόντος, τὸ τῆς σφαίρας κέντρον ἐστὶ τῆς α γ, ἐστὶν, ἀλλ' μὲν ὁ β ζ δ η, μέγιστός ἐστι, τὸ ε, κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ά: πορίσματος τῆς β': τοῦ παρόντος, εἰδὲ ἐλάσσων εἴη, ἔσται δὸς εἰπεῖν, τὸ Θ. ὡς ἐπὶ τοῦ β': κήματος. Ἐὰν ἄρα διὰ τοῦ πόλου τινὸς τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων δίθετα ἀχθῇ, κάθετος, καὶ τὰ ἑξῆς.

Tbeod: Sf: Lib. 1. Fig. 9.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ πόλου τινὸς κύκλου κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ ἀχθῇ, ἐπὶ τοῦ κέντρου πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ ἀνάπαλιν.

Πρότασις Γ': Θεώρημα.

Οἱ μέγιστοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι δίχα ἀλλήλοις τέμνονται, καὶ αἱ ἀπάλιν, οἱ δίχα ἐν σφαίρᾳ ἀλλήλοις τεμνόμενοι κύκλοι, μέγιστοί εἰσιν.

Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ τῇ α β γ δ, μέγιστοι κύκλοι οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ. Λέγω ὅτι οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ, μέγιστοι κύκλοι τέμνονται ἀλλήλοις, ἑκάτερος γὰρ τῶν ζ': τὸ παρόντος διὰ τὸ κέντρον τῆς α β γ δ, διέρχεται σφαίρας, ἀδυνάτον ἄρα παράλληλον πρὸς ἀλλήλους τμεῖν θέσιν, καὶ μὴ τέμνεσθαι. Ὅτι δὲ καὶ δίχα, δῆλον. διήχθω γὰρ διὰ τῶν ε, καὶ ζ, κοινῶν τομῶν ἡ ε ζ, ἥτις καὶ τῶν γ': τὰ ι ά: τὰ στοιχειώτα· εὐθεῖά ἐστιν, καὶ ἐπεὶ ἡ ε ζ, κοινή ἐστι τομὴ τῶν α ε γ ζ, β ε δ ζ, κύκλων, παντὸς γε τοῦ κέντρον ἑκατέρου τῶν κύκλων ἐπ' αὐτῆς ἐστιν. εἰ γὰρ μή, ἀλλ' ἐκτὸς εἴη τῆς ε ζ, ἐπεὶ οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ, οὐδὲν ἄλλο κοινὸν ἔχουσιν, ἢ τὴν ε ζ, κοινὴν αὐτῶν τομήν· δῆλον, ὅτι οὐδὲ τὸ αὐτὸ ἔσται κέντρον ἑκατέρου τῶν αὐτῶν κύκλων, καὶ ἐπομένως οὐδὲ διὰ τοῦ κέντρου τῆς α β γ δ, σφαίρας διέρχονται, ὅπερ ὑπόκειται τῇ ζ': τὸ παρόντος. οὐκ ἄρα τὰ κέντρα τῶν α ε γ ζ, β ε δ ζ, ἐκτός εἰσι τῆς ε β, κοινῆς τομῆς, ἀλλ' ἐπ' αὐτῆς, καὶ κοινὸν ἑκατέρου. Ἔστω δὴ τοῦτο τὸ η, τὸ η, ἄρα ἔσται κέντρον τῆς σφαίρας, καὶ τῶν α ε γ ζ, β ε δ ζ, μεγίστων κύκλων, καὶ ἡ ε ζ, διάμετρός ἐστιν ἑκατέρου, ὥστε δίχα ἀλλήλοις τέμνονται, ὅπερ ἐδεῖ τὸ α':

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 10.

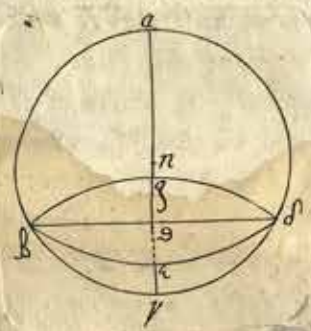
Ἀλλὰ δὴ τεμνέσθωσαν ἀλλήλοις δίχα οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ, κύκλοι. Λέγω, ὅτι μέγιστοί εἰσιν, ἤτοι διὰ τὸ κέντρον τῆς α β γ δ, σφαίρας διέρχονται. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ε ζ, κοινὴ τομὴ αὐτῶν, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ η. καὶ ἐπεὶ κατὰ τοῦ ὑπόθεσιν δίχα ἀλλήλοις οἱ κύκλοι τέμνονται, παντὸς γε ἡ ε ζ, διάμετρός ἐστι, καὶ [illegible] διέρχεται. ὥστε τὸ η, κέντρον ἐστὶ τοῦ α ε γ ζ, β ε δ ζ, κύκλων, ἡμικύκλιον γὰρ ἑκατέρου ἐστὶ τοῦτο, καὶ η ζ, ὡς δίχα τῆς ε ζ, διαμέτρου διαιρουμένης. Λέγω, ὅτι τὸ η, κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς α β γ δ, σφαίρας. εἰ γὰρ μή, ἀνεστάτω ἡ μὲν η θ, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ α ε γ ζ, κύκλου, ἡ δὲ η κ, ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ β ε δ ζ, καὶ κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς β': τοῦ παρόντος ἑκατέρα τῶν η θ, η κ, διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, τῆς ἄρα α β γ δ, σφαίρας τὸ κέντρον ἐπί τε τῆς η θ, καὶ η κ, ἐστίν, ὅπερ ἄτοπον, τὸ η, ἄρα κέντρον ἐστὶ καὶ τῆς α β γ δ, σφαίρας, καὶ κατὰ τοῦτο τῶν ζ': τοῦ παρόντος οἱ α ε γ ζ, β ε δ ζ, κύκλοι μέγιστοί εἰσιν, ὅπερ ἔδει τὸ β':

Πρό-

Πρότασις ΙΑ′: Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλον ἐλάσσονα πρὸς ὀρθὰς γωνίας τέμνῃ, δίχα αὐτὸν τέμνει, καὶ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, καὶ ἀνάπαλιν, ἐὰν δίχα αὐτὸν τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς γωνίας τέμνει.

Τεμνέτω δὴ ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος τὸν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ἐλάσσονα, τὸν βεδζ, πρὸς ὀρθάς, τετέσιν ἔστω τὸ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, ἐπίπεδον. Λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὸν τέμνει. Ἔστω δὴ κοινὴ τομὴ ἀμφοτέρων τῶν κύκλων ἡ βδ, διὰ δὲ τοῦ η, κέντρου τῆς σφαίρας διήχθω κάθετος ἐπὶ τῆς βδ, ἡ ηθ, περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς περιφερείας τῆς σφαίρας, καὶ ἐπεὶ τὸ η, σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας, παντως ἐστὶ κατὰ τὴν ζ′: τοῦ παρόντος τὸ αὐτὸ σημεῖόν ἐστι κέντρον καὶ τοῦ αβγδ, κύκλου. ἐπεὶ δὲ πάλιν ἡ ηθ, πρὸς ὀρθὰς πέπτωκεν ἐπὶ τὴν βδ, καὶ τὸ αβγδ, ἐπίπεδον πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ βεδζ. δῆλον, ὅτι ἡ ηθ, πρὸς ὀρθάς ἐστι καὶ εἰς τὸ τοῦ βεδζ, ἐπίπεδον καὶ τὸν δ′: ὅρον τοῦ ια′: τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ καὶ τὸ β′: πορ: τῆς β′: τοῦ παρόντος, τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τοῦ βεδζ, κύκλου, ὥστε ἡ βδ, διάμετρός ἐστι. φανερὸν ἓν ὅτι ὁ αβγδ, κύκλος δίχα τέμνει τὸν βεδζ. ὅπερ ἦν τὸ α′: Ὅτι δὲ καὶ διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, δῆλον, κατὰ γὰρ τὴν η′: τοῦ παρόντος ἡ αηθ, διὰ τῶν πόλων τοῦ βεδζ, κύκλου διέρχεται· ὥστε τὰ α, καὶ γ, σημεῖα πόλοι εἰσὶ τοῦ αὐτοῦ βεδζ, κύκλου, ἀλλ' ὅλη ἡ αγ, ἐστὶ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστὶ κατὰ τὴν ά: τοῦ ια′: τοῦ στοιχειωτοῦ, ἄρα ὁ αβγδ, κύκλος διὰ τῶν πόλων τοῦ βεδζ, κύκλου διέρχεται, ὅπερ ἦν τὸ β′:



Theod: Sf: Lib. 1. Fig. 11.

Ἀλλὰ δὴ τεμνέτω ὁ αβγδ, κύκλος τὸν βεδζ, δίχα κατὰ τὰ β, καὶ δ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτόν. [illegible] ἡ βδ, ἥτις διάμετρός ἐστι τοῦ βεδζ, κύκλου, καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν. [illegible] διὰ [illegible], ὃ αὐτῇ [illegible] χεται. ἔστω δὴ κέντρον τοῦ μὲν βεδζ, κύκλου τὸ θ, τῆς δὲ σφαίρας τὸ η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηθ, περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη [illegible]. καὶ ἐπεὶ ὁ αβγδ, μέγιστός ἐστι, δῆλον, ὅτι τὸ η, σημεῖον κέντρον ὂν τῆς σφαίρας, κέντρον ἐστὶ καὶ αὐτοῦ τοῦ αβγδ, κύκλου, καὶ κατὰ τὴν ζ′: τοῦ παρόντος, ἔστι δὲ καὶ τὸ θ, σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ αὐτοῦ αβγδ, κύκλου, ὅτι ἐπὶ τῆς κοινῆς ἐστι τομῆς, ἄρα ὅλη ἡ ηθ, ἐν ᾗ τοῦ αβγδ, ἐστὶν ἐπιπέδῳ. καὶ δὲ κατὰ τὴν ς′: τοῦ παρόντος ἡ ηθ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, κύκλου ἐπίπεδον. ἄρα καὶ κατὰ τὴν ιη′: τοῦ ια′: τοῦ στοιχ: καὶ τὰ δι' αὐτῆς πάντα ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, ἐπίπεδον, ὥστε ὁ αβγδ,

ὡς

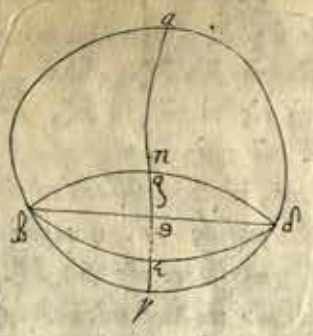
ὡς δὶ αὐτῆς διερχόμενος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, ἐπίπεδον. ὅπερ ἔδει τὸ ἐχάπως ὑποχεθεν.

Πρότασις ΙΒ': Θεώρημα.

Ε'αμ' κύκλος μέγιςος ἐμ σφαίρᾳ διὰ τῆς πόλων ἑτέρυ κύκλυ διέρχεται, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸμ τέμνει.

Διελθέτω ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν α, καὶ γ, πόλων τοῦ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ βεδζ, κύκλυ. Λέγω, ὅτι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει. Ε'πεζεύχθω γὰρ ἥπτε αγ, ἡ τῶν πόλων συνδέουσα, συμβαλλέτω τῷ τοῦ βεδζ, κύκλυ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ θ, σημεῖον, καὶ ἔτι ἡ βδ, κοινὴ αὐτῶν τομή. καὶ ἐπεὶ ἡ αγ, διὰ τῶν πόλων τοῦ βεδζ, διέρχεται κύκλυ, πάντως γε κατὰ τινὰ θ': τοῦ παρόντος κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, κύκλυ ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ η, κέντρυ τῆς σφαίρας διέρχεται. ὥστε κατὰ τὴν ι η: τοῦ ι ά: τοῦ στοιχειώτου, καὶ παντὸς τοῦ δι' αὐτῆς ἐπιπέδου ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βεδζ, κύκλου ἐπίπεδον. ὀρθὸς ἄρα ἐστὶν ὁ αβγδ, κύκλος, πρὸς τὸν βεδζ, κατὰ τινὰ αὐτινά. ἐπεὶ δὲ πάλιν κατὰ τὸ β': πόρισμα τῆς β': τοῦ παρόντος ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρυ τῆς σφαίρας πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μὴ διὰ τινὸς κέντρυ κύκλυ, διὰ τοῦ κέντρυ τοῦ αὐτοῦ κύκλυ διέρχεται, δῆλον, ὅτι τὸ θ, κέντρον ἐστὶ τοῦ βεδζ. καὶ ἐπομένως ἡ βδ, διάμετρος τοῦ αὐτοῦ, ἡ γὰρ ν, καὶ τὸν δ': ὅρον τοῦ ι ά: τοῦ στοιχ: ἐπὶ τῆς κοινῆς πίπτει τομῆς, ὥστε ὁ βεδζ, δίχα τέμνεται παρὰ τοῦ αβγδ, δέδεικται δὲ καὶ πρὸς ὀρθάς. ἄρα ἐὰν κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 12.



ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Ε'ν [illegible] μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος διὰ τῶν πόλων μέ[illegible] κύκλου τινὸς [illegible] σφαίρα διέρχεται, κἀκεῖνος διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, καὶ ἑκάτερος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ἕτερον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

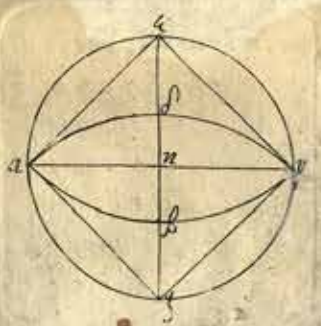
Β': Ε'τι κύκλος ἐν σφαίρᾳ δι' ἑκατέρυ τῶν πόλων ἑτέρυ κύκλυ διερχόμενος μέγιστός ἐστιν, ὅτι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνων, διὰ τοῦ κέντρυ τῆς σφαίρας διέρχεται.

Πρό-

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ε'αν ἀπὸ τῆς πόλου μεγίστου τινὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσιν, ἴσαι ἐστὶ τῇ τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ τετραγώνου πλευρᾷ τῇ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς πόλου τινὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ ἀγομένη δύο εὐθείαις ἴσαι ἢ τῇ τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ τετραγώνου πλευρᾷ, μέγιστός ἐστιν ἐκείνος.

Ἔστω κύκλος μέγιστος ἐν σφαίρᾳ ὁ αβγδ, πόλοι οἱ ε, ζ. καὶ ἀχθήτω ἀπὸ τοῦ ε, πόλου ἐπὶ τὴν αὐτοῦ περιφέρειαν δύο εὐθεῖαι αἱ εα. Λέγω, ὅτι αἱ εα, ἴσαι ἐστὶ πλευρᾷ τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ἐγγραφομένου τετραγώνου. Κείσθω γὰρ διὰ τῶν ε, καὶ ζ, πόλων τοῦ αβγδ, μεγίστου κύκλου τὸν αζγε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εγ, αζ, γζ, εζ, αγ. καὶ ἐπεὶ αἱ εζ, διὰ τῶν πόλων τοῦ αβγδ, κύκλου διέρχεται, παύσης γε καὶ τῆς θ': τοῦ παρόντος ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸν τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται. ἀλλὰ καὶ ὁ μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διέρχεται, καὶ τῆς ζ': τὸ αὐτό, ἄρα τὸ η, σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει αἱ εζ, τῷ τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπιπέδῳ, κέντρον ἐστὶ καὶ τοῦ αβγδ, κύκλου, καὶ ἑπομένως αἱ αγ, διάμετρός ἐστιν αὐτοῦ. ἐπεὶ δὲ πάλιν αἱ εζ, ὀρθαί εἰσιν, ὡς δέδεικται, πρὸς τὸν τοῦ αβγδ, κύκλου ἐπίπεδον. δῆλον, ὅτι καὶ πρὸς τὴν αγ, ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ ια: τοῦ ια στοιχ: ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν υπὸ αηε, γηε, καὶ αἱ τέσσαρες καὶ κορυφὴν, αἱ ἄρα αγ, εζ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλας τέμνονται, καὶ αἱ αε, εγ, γζ, ζα, περιφέρειαι τεταρτημόρια εἰσὶ, καὶ ἑπομένως αἱ αε, εγ, γζ, ζα, ὑποτείνουσαι ἴσαι, καὶ τὸ αεγζ, τετράγωνόν ἐστιν ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αεγζ, κύκλον, καὶ αἱ ηα, ηε, ηγ, ηζ, ἴσαι εἰσὶν, ὡς δὲ τεμνομένων ἀλλήλας τῶν αγ, εζ. ὥστε τὸ η, κέντρον ἐστὶ καὶ τοῦ αε ζ, κύκλου, μέγιστος ἄρα ἐστὶν ὁ αεγζ, κύκλος, καὶ ἴσος τῷ αβγδ, καὶ τὸ εἰκοσάπλευρον τῆς ζ': τοῦ παρόντος, ἄρα ἡ αε, πλευρά ἐστι τετραγώνου ἐγγραφομένου εἰς μέγιστον κύκλον τὸν ἐν ᾧ καὶ ὁ αβγδ, κύκλος σφαίρᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ α':



Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 13.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ αε, ἴση τῇ τοῦ ἐν μεγίστῳ κύκλῳ ἐγγραφομένου τετραγώνου πλευρᾷ. Λέγω ὅτι ὁ αβγδ, κύκλος μέγιστός ἐστι. τῇ αὐτῇ γὰρ κατασκευαθησόμενον, ἐπεὶ ὁ αζγε, κύκλος διὰ τῶν πόλων τοῦ αβγδ, κύκλου διέρχεται, παύσης γε δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει καὶ τοῦ ἀνωτέρω, ἡ αγ, ἄρα κοινὴ τομὴ διάμετρός ἐστι

τοῦ

τῶ α β γ δ, κύκλω, ἀλλ' ἡ α ε, ἴση ἐστὶ καὶ τιὼ ὑποθεσιν τῇ τῶ τετραγώνου πλευρᾷ τῶ ἐν μείζονι ἐγγραφομένου κύκλω, καὶ αὐτῇ ἴση ἐστὶν ἡ ε γ, καὶ τὸν ε: ὅρον τῶ παρόντος, ἄρα τὸ α ε γ, ἡμικύκλιόν ἐστι, καὶ ἡ α γ, διάμετρος τῶ α β γ δ, κύκλω, διάμετρος ἔτι ἐστὶ καὶ τῶ α ε γ ζ. οἱ ἄρα α β γ δ, α ε γ ζ, κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ ὄντες σφαίρᾳ δίχα ἀλλήλοις τέμνονται, καὶ καὶ τιὼ ί: τῶ παρόντος μέγιστοί εἰσι, μέγιστος ἄρα ὁ α β γ δ, κύκλος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ β'.

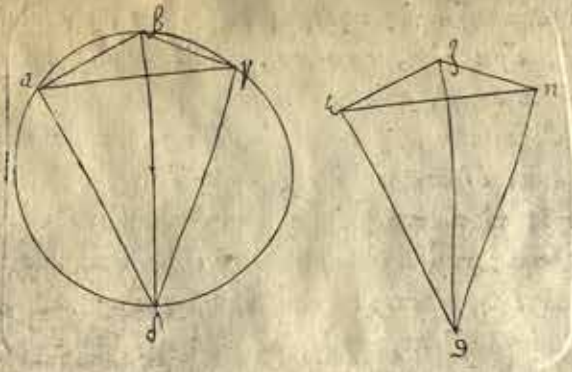
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι οἱ μέγιστοι κύκλοι τεταρτημορίῳ ἀφίστανται τῆς ἰδίων πόλων, καὶ οἱ τεταρτημορίῳ ἀφεστῶτες τῆς ἰδίων πόλων, μέγιστοί εἰσι.

Πρότασις ΙΔ': Πρόβλημα.

Τῇ διαμέτρῳ παντὸς ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἴσην εὐθεῖαν εὑρεῖν.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος τυχὼν ὁ α β γ δ. καὶ ζητεῖται εὐθεῖα ἴση τῇ αὐτοῦ διαμέτρῳ. Ληφθήτωσαν ἐπὶ τῆς τῶ α β γ δ, κύκλου περιφερείας σημεῖα, ὡς ἔτυχε, τὰ α, β, γ, καὶ συνεστάσθω ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ, εἰσὶν ἴσαι ταῖς τρισὶν διαστήμασιν α β, β γ, γ α, τρίγωνον τὸ ε ζ η. καὶ πρὸς μὲν τῷ ε σημείῳ συνεστάθω κάθετος ἐπὶ τῆς ε ζ, ἡ ε θ, πρὸς δὲ τῷ η, συνεστάθω ὁμοίως κάθετος ἐπὶ τῆς ζ η, ἡ η θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζ θ, καὶ αὕτη ἔσται ἡ ζητουμένη. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ β, σημείου ἡ β δ, διαμέτρος τῶ α β γ δ, κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ α δ, γ δ, α γ. καὶ ἐπεὶ τῷ α β γ τριγώνων αἱ πλευραὶ ἴσαι εἰσὶ, πάντως γε καὶ αἱ γωνίαι ὁμοίως ἴσαι τοῖς ὑπὸ τῶν ς': τοῦ ά: τῶ στοιχείωτῶ, ὥστε ἡ ὑπὸ ζ ε η, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ β α γ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ζ ε θ, ἴση τῇ ὑπὸ β α δ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα ἡ μὲν καὶ τιὼ κατὰ τὸ ἀλλὰ, ἡ δὲ καὶ τιὼ λά: τῶ γ': τῶ αὐτῶ, ἄρα καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ η ε θ, λοιπῇ τῇ γ α δ, ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ε η θ, τῇ ὑπὸ α γ δ, ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ ε η, πλευρὰ τῇ α γ, ἴση, ἄρα καὶ τὴν κς': τῶ ά: τῶ αὐτῶ καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ε θ, θ η, ἴσαι εἰσὶ ταῖς λοιπαῖς α δ, δ γ. ὥστε ὅλον τὸ ε θ η, τρίγωνον ὅλῳ τῷ α δ γ, τριγώνῳ ἴσόν ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ τὸ ε ζ η, ἴσον τῷ α β γ, τριγώνῳ, ὡς δέδεικται, ἄρα τὸ ε ζ η θ, παραλληλόγραμμον ἴσόν ἐστι τῷ α β γ δ, παραλληλογράμμῳ, ἐφαρμοττομένης οὖν τῆς ε θ, ἐπὶ τῆς α δ, ἐφαρμοσθήσεται παν-



Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 14.

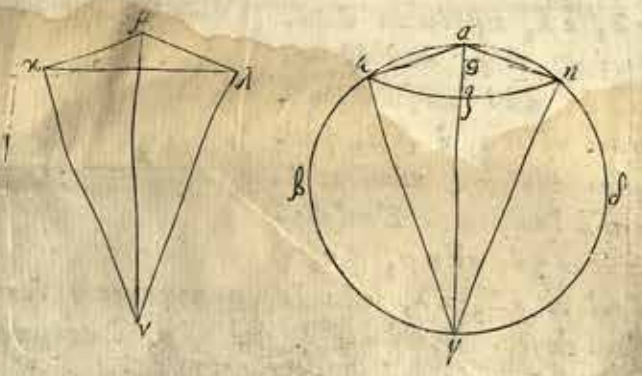
παντὸς καὶ ἡ εζ, τῇ αβ, καὶ ἡ ζη, τῇ βγ, καὶ ἡ ηθ, τῇ γδ, ἴσα γὰρ, καὶ τὰς πλευρὰς καθ' μίαν ἴσας ἔχουσιν, ὡς δέδεικται, ὥστε ἐφαρμοστομένων τῶν ζ, η, θ, σημείων τοῖς β, γ, δ, ἐφαρμοδήσεται καὶ ἡ ζθ, τῇ βδ, ἡ ζθ, ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ αβγδ, κύκλου διαμέτρῳ. ὅπερ ἔδει τὸ ζητούμενον.

Πρότασις ΙΕ'. Πρόβλημα.

Τὴν διαμέτρῳ τῆς δοθείσης σφαίρας ἴσην εὑρεῖν.

Ἔστω σφαῖρα ἡ αβγδ, καὶ ζητεῖται ἡ παντὸς διάμετρος. Ληφθήτω δὲ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, δοὺς εἰπεῖν τὸ α, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι γραφήτω κύκλος ὁ εζηθ. ἔστινος εὑρεθήτω διὰ τῶν ἀνωτέρω ἡ διάμετρος, καὶ ἔστω αὐτοῦ ἡ κλ. ληφθέντων δὲ δύο τυχόντων σημείων, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ εζηθ, κύκλου φερ' εἰπεῖν, τὰ ζ, καὶ θ, διαιρεθήτω ἑκάτερον τῶν ζεθ, ζηθ, τόξων δίχα κατὰ τὰ ε, καὶ η, σημεῖα, καὶ διαιρεθήσεται ὁ εζηθ, δίχα. ὥστε τινὰ τὰ ε, η, ἐπιζευγνύουσαν σημεῖα διάμετρον εἶναι. εἰπὰ συνεστάσθω ἐπὶ τῆς κλ, ξίγωνον τὸ κμλ. ὥστε τινὰ μὲν κμ, ἴσην εἶναι τῇ εα, διαστήματι, τινὰ δὲ μλ, τῇ αη, καὶ πρὸς μὲν τῇ κ, συνεστάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς κμ, ἡ κν, πρὸς δὲ τῇ λ, ὁμοίως συνεστάσθω κάθετος ἐπὶ τῆς μλ, ἡ λν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ μν, καὶ αὕτη ἔσται ἡ ζητουμένη. Κείσθω γὰρ τὸν αβγδ, κύκλον, εἶναι τὸν διὰ τῶν ε, α, η, διὰ τῶν τριῶν σημείων τῆς δοθείσης σφαίρας, καὶ διήχθω διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἡ α[illegible] ἐπὶ τὸ αὐτὸ μέρος αη, εη, εγ, ηγ. καὶ ἐπεὶ τὸ κμλν, ξαπέζιον ἰσόπλευρόν ἐστι μὲν ὅμοιον τῷ εαηγ, ξαπεζίῳ καὶ τινὰ αὐτῷ, συνέστηκε γὰρ τό, τε κμλ, ξίγωνον καὶ ὅμοιον τῷ εαη, καὶ τὸ κλν, τῷ εηγ, πάντως ἐστὶ μὲν, διάμετρός ἐστι τοῦ αβγδ, κύκλου, κατὰ τινὰ αὐτῶν, ἀλλ' ὁ αβγδ, κύκλος μέγιστός ἐστι καὶ τὸ β': πόρισμα τῆς ιβ': τοῦ παρόντος, ὅτι δίχα τέμνων τὸν εζηθ, κύκλον καὶ τὰ ε, καὶ η, σημεῖα διὰ τῶν πόλων αὐτοῦ διέρχεται, ἡ δὲ τοῦ μεγίστου κύκλου διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς σφαίρας διαμέτρῳ, ἄρα ἡ μν, ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. ὅπερ ἔδει τὸ προσαχθέν.

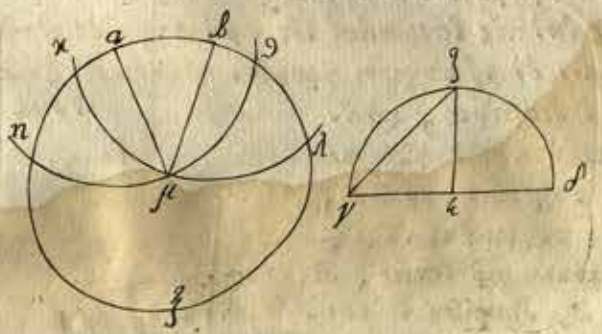
Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 15.



Πρότασις Ις': Πρόβλημα.

Δύο, ὡς ἔτυχε, σημείων δοθέντων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸν δι' αὐτῶν διερχόμενον μέγιστον κύκλον εὑρεῖν.

Ἔστωσαν ἐπὶ τῆς δοθείσης σφαίρας τυχόντα σημεῖα τὰ α, β, καὶ ζητηθήτω ὁ δι' αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος. Εὑρεθήτω δὴ καὶ τοῦ ἀνωτέρω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστω αὕτη ἡ γδ. διαιρεθείσης δὲ τῆς γδ, δίχα κατὰ τὸ ε, σημεῖον, ἀνεξάσθω ἐπ' αὐτῆς κάθετος ἡ εζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γζ. εἶτα κέντροις τοῖς α, καὶ β, δοθεῖσι σημείοις, καὶ διαστήματι τῷ γζ, γραφήτωσαν τόξα τὰ ηθ, κλ, τεμνόμενα ἀλλήλοις κατὰ τὸ μ, ἀπὸ δὲ τοῦ μ, ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῷ μα, ἢ μβ, γραφήτω κύκλος, καὶ ἔστω ἐκεῖνος ἔστω ὁ ζητούμενος. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αμ, βμ, καὶ ἐπεὶ τὰ ηθ, κλ, τόξα ἴσῳ κατεγράφησαν διαστήματι, παντὸς γε αἱ αμ, βμ, ἴσαι εἰσίν. ὥστε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ μ, διαστήματι δὲ τῷ μα, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ β. ἐπεὶ δὲ ἑκατέρα τῶν αμ, βμ, ἴση ἐστὶ τῇ γζ, ἡ δὲ γζ, ἴση τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τοῦ ἐν μείζονι ἐγγραφομένου κύκλῳ. ὁ ἄρα αβξ, κύκλος ἁφίσεται τοῦ μ, αὐτοῦ πόλου διαστήματι ἴσῳ τῇ πλευρᾷ τοῦ ἐν μείζονι κύκλῳ ἐγγραφομένου τετραγώνου, καὶ ἐπομένως μέγιστός ἐστι καὶ τοῦ ιγ': τοῦ παρόντος. δύο ἄρα, ὡς ἔτυχε, δοθέντων σημείων ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, εὕρηται ὁ δι' αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος.



Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 16.

Πρότασις ΙΖ': Πρόβλημα.

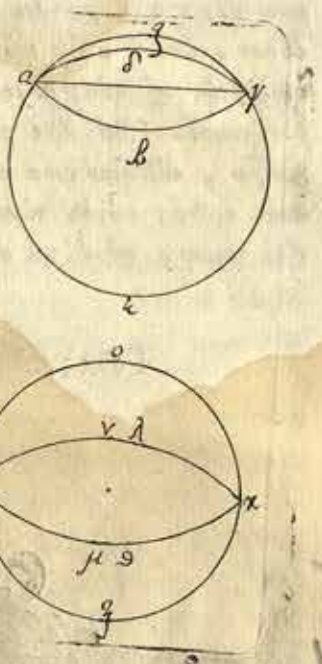
Παντὸς τῆς σφαίρας κύκλου τοὺς πόλους εὑρεῖν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ἐν τῇ τυχούσῃ σφαίρᾳ ὁ αβγδ, ἐλάσσων, καὶ ζητηθήτωσαν οἱ τοῦ κύκλου πόλοι. Ληφθήτωσαν δὴ τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῆς τοῦ αβγδ, δοθέντος κύκλου περιφερείας τὰ β, δὸς εἰπεῖν, καὶ δ. τμῆμα δὲ βαδ, βγδ, τόξων δίχα διαιρεμένων κατὰ τὰ α, καὶ γ, σημεῖα, εὑρεθήτω διὰ τῶν ἀνωτέρω ὁ διὰ τῶν α, καὶ γ, διερχόμενος κύκλος, καὶ ἔστω ἔστω ὁ αεγζ, τμῆμα δὲ αεγ, αζγ, τόξων διαιρεμένων δίχα κατὰ τὰ ε, καὶ ζ, τὰ αὐτὰ σημεῖα ε, καὶ ζ, πόλοι ἔσονται τοῦ αβγδ,

κύ-

κύκλε. ἐπεὶ γὰρ τὰ α β, α δ, πόξα ἴσα ἐστίν, ὥσπερ καὶ τὰ γ β, γ δ, παύπως γε κατὰ τὸ β': ἀξίωμα, τὰ α δ γ, α β γ, ἴσα ἐστίν, καὶ ὁ α ε γ ζ, κύκλος δίχα τὸν α β γ δ, τέμνει κύκλον. ὥστε καὶ τλὼ ι β': τῆ παρόντος ὁ α ε γ ζ, διὰ τῆ πόλων τῆ α β γ δ, διέρχεται κύκλε. ἀλλὰ τὰ ζ, καὶ ε, ἐξ ἴσε τῆ α, καὶ γ, ἀφίσανται, κατέστι τὰ α ζ, ζ γ, διασήματα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν, ὥσπερ καὶ τὰ α ε, ε γ· τὰ ζ, ἄρα καὶ ε, πόλοι εἰσὶ τῆ α β γ δ, κύκλε, καὶ τὸν ε: ὅρον τῆ παρόντος.

Theod. Sf. Lib. I. Fig. 17.



Ἔστω β': κύκλος ἐν σφαίρᾳ μέγιστος ὁ η θ κ λ, καὶ ζητηθήτωσαν οἱ τέτε πόλοι. Ληφθήτωσαν, ὡς καὶ πρότερον, ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆ η θ κ λ, κύκλου δύο τυχόντα σημεῖα, φερ' εἰπεῖν, τὰ θ, καὶ λ, τῆ δὲ θ κ λ, θ κ λ, δίχα τεμνομένων, τῆ μὲν καὶ τὸ η, τῆ δὲ καὶ τὸ κ· δῆλον, ὅτι τὰ η θ κ, η λ κ, ἡμικύκλια ἐστίν, ὧν ἑκάτερον δίχα τμηθήτω τὸ μὲν καὶ τὸ μ, τὸ δὲ καὶ τὸ ν. εἶτα κοινῆ τῆ μ, καὶ τῆ ν, καὶ διαστήματι τῆ μ η, ἢ μ κ, ἴσα γὰρ, γεγράφθω ὁ η ξ κ ο, ἔστινος ἑκάτερον τῆ η ξ κ, η ο κ, τόξων δίχα τμηθήτω καὶ τὸ ξ, καὶ ο, σημεῖα, καὶ τὸ ξ, ο, σημεῖα, πόλοι ἔσονται τε̃ α θ κ λ, κύκλε. ἐπεὶ γὰρ ὁ η ξ κ ο, κύκλος, ὡς ἀπὸ κοινῆ τῆ μ, γέγραπται, παύπως γε τὸ μ, πόλος αὐτῆ ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ο, διὰ τὰ αὐτὰ πόλος ἐστὶ τῆ αὐτῆ. ἀλλὰ τὸ μ η, τεταρτημορίον ἐστίν, ὥσπερ καὶ τὸ μ κ, ἄρα ὁ η ξ κ ο, κύκλος τεταρτημορίῳ ἀφίσαται τῆ ἰδίε πόλε, καὶ καὶ τὸ πόρισμα τῆς ι γ': τῆ παρόντος, μέγιστός ἐστιν. ἀλλ' ὁ η θ κ λ, κύκλος διὰ τῆ μ, καὶ ν, πόλων τῆ η ξ κ ο, κύκλε διέρχεται, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τλὼ ι β': τῆ παρόντος, καὶ ὁ η ξ κ ο, διὰ τῶν πόλων τῆ η θ κ λ, διέρχεται. ἑκάτερον δὲ τῶν ζ, καὶ ο, ἐξ ἑκατέρων τῶν η, καὶ κ, ἀφίσαται, ἄρα τὰ ξ, καὶ ο, σημεῖα πόλοι εἰσὶ τῆ η θ κ λ, μεγίστε κύκλε, τῶ [illegible] σφαίρᾳ κύκλε οἱ πόλοι εὕρηνται.

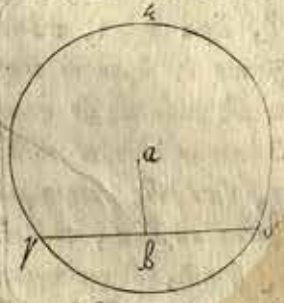
Πρότασις ΙΗ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ δύο εὐθεῖαί τινες διὰ τῆ κέντρε δύο εὐθειῶν τινα μὴ διὰ τῆ κέντρε δίχα τέμνωσι, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὰς τέμνωσι, καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὰς τέμνωσι, καὶ δίχα αὐτὰς τέμνωσι.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ τῇ τυχούσῃ, ἧς κοινὸν τὸ α, δύο εὐθεῖαι διὰ μὲν τῆ κοινῆ ἡ α β, μὴ διὰ τῆ κοινῆ δὲ ἡ γ δ. καὶ τεμνέτω ἡ α β, τὰ γ δ, δίχα κατὰ τὸ β. Λέ-

γω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῷ πέμνει. Ἐκβεβλήσθω γὰρ τὸ διὰ τῶν αβ, γδ, ἐπίπεδον, καὶ κοινὴ τομὴ ποιήσει τομὴν τῆς σφαίρας τὸν γδε, κύκλον καὶ τὸν β': τὸ παρόντος, καὶ ἐπεὶ ὁ γδε, κύκλος διὰ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας διέρχεται, μέγιστός ἐστι, καὶ τὸ α, κέντρον ἐστὶ καὶ τοῦ γδε, κύκλου. Αὖθις ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν αβ, γδ, διάμετρός ἐν τῷ τοῦ γδε, κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστί, καὶ ἡ μὲν αβ, διὰ τοῦ α, κέντρου τοῦ γδε, κύκλου διερχομένη πέμνει δίχα τὴν μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ἥτοι τὴν γδ, δῆλον, ὅτι ἡ αβ, καὶ πρὸς ὀρθὰς πέμνει τὴν αὐτὴν γδ. καὶ ἀνάπαλιν, κατὰ τὴν γ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ. Ἐὰν ἄρα ἐν σφαίρᾳ διάμετρός τις διὰ τοῦ κέντρου, διάμετρόν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει, καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 1. Fig. 18.



Τέλος τοῦ Πρώτου τῶν κατὰ Θεοδόσιον Σφαιρικῶν.

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑ ΘΕΟΔΟΣΙΟΝ ΤΟΝ ΤΡΙΠΟΛΙΤΗΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Οἱ Ὅροι.

Α′: Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ παράλληλοί εἰσιν, ὧν τὰ ἐπίπεδα ἀσύμπτωτα.

Β′: Κύκλοι ἐν σφαίρᾳ ἀλλήλων ἐφάπτεσθαι λέγονται, ὅτε ἡ κοινὴ τομὴ τῆς ἐπιπέδων τῆς κύκλων ἐφάπτεται ἑκατέρου τῆς κύκλου κατὰ τὸ αὐτὸ σημεῖον, καθ' ὃ καὶ οἱ κύκλοι ἐφάπτονται.

Γ′: Κύκλος πρὸς κύκλον ἐγκλίνειν λέγεται, ὅταν ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῆς πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων δύο εὐθειῶν πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἑκατέρου τῆς κύκλου ὀξεῖα ᾖ, ἥτις δὲ κλίσις τῆς αὐτῆς κύκλων πρὸς ἀλλήλους λέγεται.

Δ′: Κύκλος πρὸς κύκλον ὁμοίως κεκλῖσθαι λέγεται, καὶ ἕτερος πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ τῆς κλίσεως γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Ε′: Κλίσεως δύο κύκλων πρὸς ἀλλήλους μέτρον ἐστὶ τόξον μεγίστου κύκλου διὰ τῆς πόλων ἑκατέρου τῆς κύκλων διερχομένου, τὸ μεταξὺ τῆς κύκλων ἐμπολαμβανόμενον.

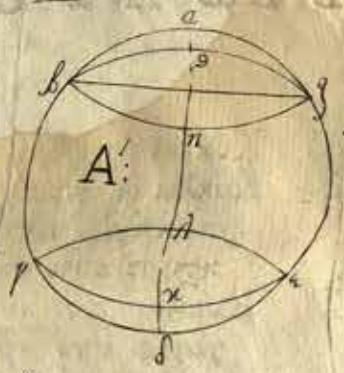
Πρότασις Α′ Θεώρημα.

Οἱ παράλληλοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι τοὺς αὐτοὺς ἔχουσι πόλους, καὶ οἱ τοὺς αὐτοὺς ἐν σφαίρᾳ πόλους ἔχοντες κύκλοι παράλληλοί εἰσι.

Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ τῇ αβγδεζ, κύκλοι παράλληλοι οἱ βηζθ, γκελ λέγω, ὅτι οἱ βηζθ, γκελ, τοὺς αὐτοὺς ἔχουσι πόλους. Ἔστωσαν γὰρ πόλοι τοῦ βηζθ, οἱ α, δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ. καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, διὰ τῆς πόλων τοῦ βηζθ, διέρχεται κύκλου, πάντως καὶ τοῦ θλω θ′: τοῦ ἀ: τοῦ παράλληλος κάθετός ἐστι πρὸς τὸν τοῦ βηζθ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ διέρχεται. ὥστε καὶ τὸ πόσισμα τῆς γ′: τοῦ αὐτοῦ ἡ αδ, καὶ διὰ τοῦ τῆς σφαίρας κέντρου διέρχεται. Λοιπὸν ἐπεὶ

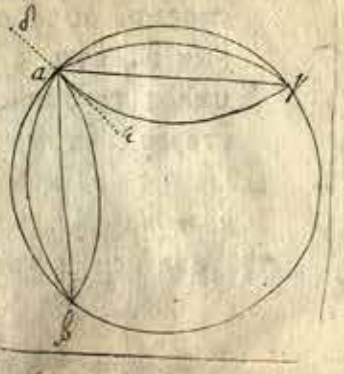
ἐπεὶ οἱ βηζϑ, γκελ, κύκλοι παράλληλοί εἰσι, παύπως γε ἡ αδ, ὀρθὴ οὖσα πρὸς τὸ τῦ βηζϑ, κύκλε ἐπίπεδον, ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὸ τοῦ γκελ, καὶ τιὼ ιδ': τῦ ιά: τῦ στοιχ: ἀλλ' ἡ αδ, διὰ τοῦ κέντρε τῆς σφαίρας διέρχεται, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τιὼ ή: τῦ ά: τοῦ παρόντος διὰ τῆ πόλων τῦ γκελ, διέρχεται. ὥστε τὰ α, καὶ δ, σημεῖα πόλοι εἰσὶ τῦ γκελ. ἀλλὰ τὰ α, καὶ δ, σημεῖα πόλοι εἰσὶ καὶ τῦ βηζϑ, κύκλε καὶ τιὼ ὑπόθεσιν, οἱ ἄρα βηζϑ, γκελ, παράλληλοι κύκλοι τὰς αὐτὰς ἔχεσι πόλες.

Α'λλὰ δὴ ἐχέτωσαν οἱ βηζϑ, γκελ, κύκλοι τὰς αὐτὰς πόλες α, καὶ δ, λέγω ὅτι παράλληλοί εἰσιν. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αδ, καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, διὰ τῆ πόλων ἑκατέρε τῆ βηζϑ, γκελ, διέρχεται, παύπως γε καὶ τιὼ ϑ': τῦ ά: τῦ παρόντος ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκάτερον τῶν βηζϑ, γκελ, κύκλων, καὶ καὶ τιὼ ιδ': τῦ ιά: τῦ στοιχ: οἱ βηζϑ, γκελ, κύκλοι παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 1.



Πρότασις Β': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι τῷ αὐτῷ συμπέσωσι σημείῳ, μεγίστε τινὸς κύκλε διὰ τῆ πόλων ἑκατέρε αὐτῆ διερχομένε, οἱ κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων.



Ἔστω κύκλος μέγιστος ὁ αβγ, καὶ συμπιπτέτωσαν οἱ αβ, αγ, κύκλοι τῷ α, σημείῳ, τῦ αβγ, κύκλε, διὰ τῶν πόλων ἑκατέρε αὐτῶν διερχομένε. Λέγω ὅτι οἱ αβ, αγ, κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ α, σημεῖον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αβ, αγ, εὐθεῖαι, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τῶν αβ, αγ, κύκλων ἡ δαε, εὐθεῖα. καὶ ἐπεὶ ὁ αβγ, κύκλος διὰ τῶν πόλων ἑκατέρε τῶν αβ, αγ, διέρχεται κύκλων, παύπως γε καὶ τιὼ ιβ': τῦ ά: τοῦ παρόντος δίχα αὐτὸν τέμνει, καὶ αἱ αβ, αγ, [illegible] τῶν αβ, αγ, κύκλων. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν οἱ αβ, αγ, κύκλοι ὀρθοί εἰσι πρὸς τὸν αβγ, μέγιστον κύκλον. ἔστι δὲ κοινὴ τομὴ τῶν αβ, αγ, κύκλων καὶ τιὼ ὑπόθεσιν ἡ δαε, εὐθεῖα, ἄρα κατὰ τιὼ ιϑ': τῦ ιά: τοῦ στοιχ: ἡ δαε, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τῦ αβγ, κύκλε ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι, καὶ τὸν γ': ὅρον τῦ αὐτῦ, ἅπτονται δὲ τῆς δαε, αἱ αβ, αγ, εὐθεῖαι, καὶ τῶν ἑκατέρα ἐν τῷ τοῦ αβγ, ἐπιπέδῳ ἐστὶ διὰ τὸ κοινὰς τομὰς εἶναι αὐτῦ τε καὶ τῶν ἐπιπέδων

τῶν

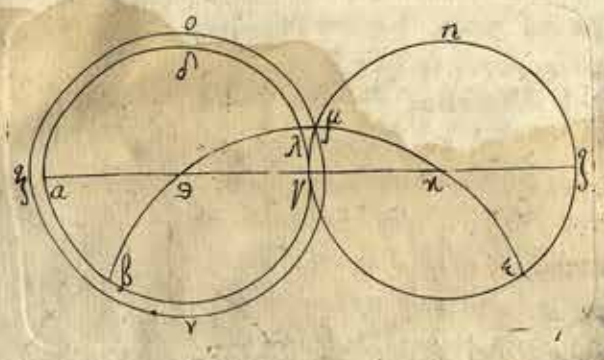
τῶν αβ, αγ, κύκλων, ἄρα ἡ δαε, ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν αβ, αγ, εὐθειῶν, καὶ ἔστι τὸ πόρισμα τῆς ιε΄: τῇ γ΄: τῇ στοιχειωτῇ ἅπτεται ἑκατέρας τῶν αβ, αγ, κύκλων ἡ δαε. ὥστε καὶ τὸν β΄: ὅρον τῆς παρόντος, οἱ αβ, αγ, κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Γ΄: Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῆς πόλου αὐτῆς διερχόμενος μέγιστος κύκλος, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς αὐτῆς διέρχεται.

Ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐν σφαίρᾳ κύκλοι οἱ αβγδ, γεζη, καὶ τὸ γ, σημεῖον, καὶ ἔστω τῆς μὲν αβγδ, πόλος τὸ θ, σημεῖον, τῆς δὲ γεζη, τὸ κ. Λέγω, ὅτι ὁ διὰ τῶν θ, καὶ κ, πόλων διερχόμενος μέγιστος κύκλος, διέρχεται καὶ διὰ τῆς γ, αὐτῶν ἁφῆς, ὡς ὁ αθγκζ.

Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 2.



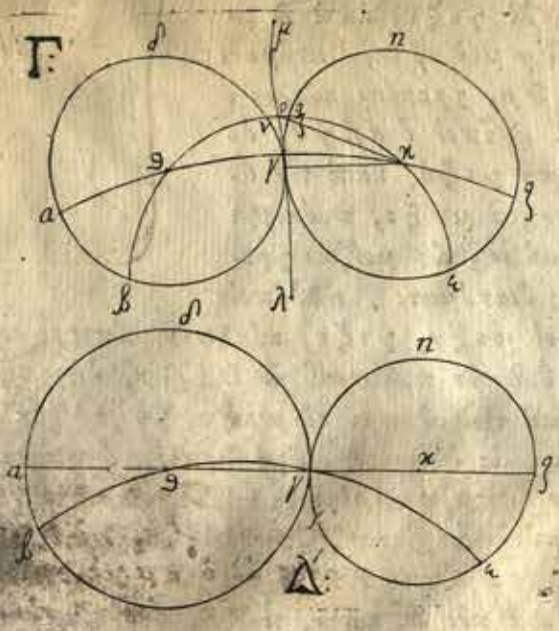
εἰ γὰρ μή, διελθέτω εἰ δυνατὸν, ἐκτὸς τῆς γ, ὡς ὁ βθκε, τέμνων τὸν μὲν αβγδ, καὶ τὸ λ, τὸν δὲ γεζη, κατὰ τὸ μ. καὶ κείσθω μὲν τῇ θ, διαστήματι δὲ τῇ θμ, γεγράφθω κύκλος ὁ μνξο. καὶ ἐπεὶ ὁ αβγδ, ἅπτεται τῆς γεζη, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὁ μνξο, παντως γε τέμνει αὐτὸν, ὡς μείζονι γραφόμενος διαστήματι. ἀλλ' ἐπεὶ πάλιν οἱ μνξο, γεζη, κύκλοι σημείῳ τῷ μ, σημείῳ, τῷ βθκε, μεγίστῳ κύκλῳ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν θ, καὶ κ, διερχομένῳ κατὰ τινὰ ἐναντίαν ὑπόθεσιν; ἄρα κατὰ τινὰ ἀνωτέρω οἱ μνξο, γεζη, κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων, ἀλλὰ καὶ τέμνονται, ὡς δέδεικται, ἄρα ἄτοπον, ὥστε καὶ τὸ ἐξ οὗ ἕπεται. ἄρα ὁ διὰ τῶν πόλων διερχόμενος μέγιστος κύκλος ἁπτομένων δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλων καὶ διὰ τῆς ἁφῆς αὐτῶν διέρχεται, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως. Ἁπτέσθωσαν οἱ αβγδ, γεζη, κύκλοι ἀλλήλων κατὰ [illegible] λέγω, ὅτι ὁ διὰ τῶν θ, καὶ κ, πόλων αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος [illegible] διελεύσεται καὶ διὰ τῆς γ, ἁφῆς, ὡς ὁ αγζ. εἰ γὰρ μή, διελθέτω ἐκτὸς τῆς ἁφῆς, ὡς ὁ βθκε, τέμνων τὸν μὲν αβγδ, κατὰ τὸ ν, τὸν δὲ γεζη, κατὰ τὸ ξ. καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τοῦτε αβγδ, καὶ γεζη, ἡ λγμ, εὐθεῖα, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ κ, κείσθω τοῦ γεζη, κύκλου ἡ κο, συμβαλλουσα τῇ λγμ, κοινῇ τομῇ κατὰ τὸ ο, (δυνατὸν γὰρ τὸ κ, σημεῖον καὶ αὐτὶ πόλου, καὶ αὐτὶ κείσθω τοῦ αὐτοῦ γεζη, κύκλου ληφθῆναι, συμπίπτουσι γὰρ οἱ πόλοι τῇ κείσθῃ ἐπὶ τῆς ἐν ἐπιπέδῳ ὁλο-

κλή-

κλήρου καταγραφῆς τῶν ἐν σφαίρᾳ κύκλων.) ἐπεζεύχθω δ' ἔτι καὶ ἡ κγ, καὶ ἐπεὶ ὁ βθκε, μέγιστός ἐστι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν αβγδ, γεζη, κύκλων διέρχεται, πάντως γε κατὰ τὴν ιβ: τοῦ ά: τοῦ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει. ὥστε καὶ ἀνάπαλιν, ἑκάτερος τῶν αβγδ, γεζη, ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βθκε, μεγίστου κύκλου ἐπίπεδον, καὶ κατὰ τὴν ιθ: τοῦ ιά: τοῦ στοιχειώτου ἡ λγμ, ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ βθκε, ἐπίπεδον, ὡς κοινὴ τομὴ τῶν αβγδ, γεζη, κύκλων, καὶ ἔτι πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ ὅσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας ἡ αὐτὴ λγμ, κατὰ τὸν γ': ὅρον τοῦ αὐτοῦ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ κο, καὶ ἔστιν ἐν τῷ τοῦ βθκε, ἐπιπέδῳ, ὡς ἐπιζευγνύουσα τὰ κ, καὶ ο, σημεῖα τοῦ αὐτοῦ βθκε, κύκλου, καὶ ὅσα κοινὴ τομὴ τοῦτε βθκε, καὶ γεζη, κύκλου. ἄρα ἡ λγμ, καὶ τὸν ῥηθέντα γ': ὅρον ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τῆς κο, ἡ ἄρα ὑπὸ κογ, γωνία ὀρθή ἐστιν, ἀλλ' ἡ λγμ, ὀρθὴ ἐστι καὶ πρὸς τὴν γκ, κατὰ τὸ πόρ: τῆς ις': τοῦ γ': τοῦ αὐτοῦ, ἄρα τοῦ γκο, ζυγώνιαι αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ διὰ τῶν θ, καὶ κ, διερχόμενος μέγιστος κύκλος ἐκτὸς τῆς γ, διέρχεται ἀφῆς. Ἐὰν ἄρα δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διερχόμενος μέγιστος κύκλος, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς αὐτῶν διέρχεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 3.



Πρότ: Δ': Θεώρ:

Ἐὰν ὦσιν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἁπτόμενοι ἀλλήλων, διὰ τοῦ πόλου τῆς ἁφῆς αὐτῶν. μέγιστος διέλθῃ κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ πόλου τοῦ ἑτέρου.

Ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐν σφαίρᾳ οἱ αβγδ, γεζη, κύκλοι. Λέγω, ὅτι ἐὰν μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τοῦ ἑνὸς, δοὺς ἥπτεῖν τοῦ αβγδ, καὶ τῆς γ, κοι-

νῆς

νῆς ἀφῆς διέλθῃ, διελεύσεται καὶ διὰ τῆς πόλων τῶ γ ε ζ η. εἰ γὰρ μόνον διὰ τῶ θ, πόλε τῶ α β γ δ, καὶ τῆς γ, ἀφῆς διέλθῃ, ὡς ὁ β θ γ ε, γραφήτω ἕτερος κύκλος μέγιστος διὰ τῆς θ, καὶ κ, πόλων τῆς α β γ δ, γ ε ζ η, κύκλων καὶ τῶν ι ς': τῶ ά: τῶ παρόντος, ὡς ὁ α θ κ ζ. καὶ ἐπεὶ ὁ αὐτὸς α θ κ ζ, μέγιστός ἐστι, καὶ διὰ τῆς πόλων ἑκατέρε τῆς α β γ δ, γ ε ζ η, διέρχεται κύκλων, παντως γε καὶ τῶν ἀνωτέρω καὶ διὰ τῆς γ, ἀφῆς αὐτῆς διέρχεται, ἀλλὰ καὶ ὁ β θ γ ε, μέγιστος ὢν διὰ τῆς θ, καὶ γ, διέρχεται καὶ τῶν ὑπόθεσιν, ἄρα οἱ α θ γ κ ζ, καὶ β θ γ ε, μέγιστοι κύκλοι τέμνονται ἀλλήλοις καὶ τὰ θ, καὶ γ, σημεῖα. ὥστε καὶ δίχα καὶ τῶν ι: τοῦ ά: τοῦ παρόντος, τὸ θ γ, ἄρα ἡμικύκλιόν ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον, τὸ γὰρ θ γ, διάστημα ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίε, παντὸς γὰρ κύκλε οἱ πόλοι ἡμικυκλίῳ ἀφίστανται, τὸ δὲ ἀφ' ἑκατέρε τῆς πόλων μέχρι τῆς περιφερείας τοῦ κύκλε ἔλαττόν ἐστι τεταρτημορίε. ἐαν ἄρα ὦσιν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἀπότμοποι ἀλλήλων, καὶ διὰ τῆς πόλων τῶ ενὸς καὶ τῆς κοινῆς ἀφῆς μέγιστος διέλθῃ κύκλος, διελεύσεται καὶ διὰ τῆς πόλων τῶ ἑτέρε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ε'αν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἅπτηται ἐλάσσονος ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλε, δυώαται ὁ αὐτὸς καὶ ἑτέρε ἅπτεσθαι κύκλε ἴσε τε καὶ παραλλήλε τῷ προτέρῳ.

Α'πτέσθω ὁ α β γ δ, μέγιστος κύκλος τῶ α ε ζ η, ἐλάσσονος καὶ τῶ α. Λέγω, ὅτι ὁ α β γ δ, μέγιστος δυώαται καὶ ἑτέρε ἅπτεσθαι κύκλε ἴσε τε καὶ παραλλήλε τῷ α ε ζ η. Ε'ιλήφθωσαν γὰρ πόλοι τῶ α ε ζ η, κύκλε τὰ θ, καὶ κ, σημεῖα, καὶ ἀπὸ τοῦ κ, πόλε διαστήματι τῷ κ γ, γραφήτω κύκλος ὁ γ λ μ ν, διὰ δὲ τῆς πόλων ἑκατέρε τῆς α β γ δ, α ε ζ η, διελθέτω ὁ θ α μ κ γ ζ, μέγιστος κύκλος. καὶ ἐπεὶ ὁ γ λ μ ν, ἀπὸ τοῦ κ, σημείε, ὡς ἀπὸ πόλε καταγέγραπται, δῆλον, ὅτι τὰ κ, καὶ θ, σημεῖα πόλοι αὐτῶ εἰσιν, ἀλλὰ τὰ θ, καὶ κ, πόλοι εἰσὶ καὶ τῶ α ε ζ η, καὶ τῶν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τῶν ά: τῶ παρόντος οἱ α ε ζ η, γ λ μ ν, παράλληλοί εἰσιν. Διέρχεται δὲ ὁ α μ γ ζ, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν, ἄρα καὶ τῶν ι β': τοῦ ά: τοῦ παρόντος, δίχα αὐτὸς τέμνει, εἰσὶ δὲ κοιναὶ τομαὶ αἱ α ζ, γ μ, ἄρα ἡ μὲν α ζ, διάμετρός ἐστι τῶ α ε ζ η, ἡ δὲ γ μ, τοῦ γ λ μ ν. Αὖθις ἐπεὶ οἱ α β γ δ, α μ γ ζ, μέγιστοι κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ εἰσι σφαίρᾳ, δῆλον, ὅτι δίχα ἀλλήλοις τέμνονται καὶ τῶν ι: τῶ ά: τῶ παρόντος. ἄρα τὸ α ζ γ, τόξον ἡμικυκλιόν ἐστιν, ἀλλὰ καὶ τὸ θ ζ γ κ, ἡμικύκλιόν ἐστιν, οἱ

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 4.

γὰρ πόλοι παντὸς κύκλου καὶ διάμετρον ἀλλήλων ἀφίσανται, ἄρα τὰ αζ, θζ γκ, πόλοι ἴσα ἀλλήλοις εἰσὶ· κοινὸς δὲ ἀφῃρήσθω τὸ θζ, καὶ ἐναπολείπονται ἴσα τὰ αθ, γκ. ὥστε καὶ τὰ τῶν διπλάσια αθ ζ, γκμ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί. καὶ ἐπομένως καὶ αἱ αζ, γμ, ὑποτείνουσαι ὁμοίως ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ τοῦ κθ': τῶν γ': τῶν στοιχειωτῶν. ἀλλ' ἡ μὲν αζ, διάμετρός ἐστι τοῦ αεζη, ἡ δὲ γμ, τοῦ γλμν, ἄρα οἱ αεζη, γλμν, κύκλοι ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν. ἐπεὶ δὲ πάλιν οἱ αβγδ, γλμν, κύκλοι τῆς γ, συμπίπτουσι σημείῳ τοῦ αμγζ, κύκλου μεγίστω διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου διερχομένου, δῆλον, ὅτι ὁ αβγδ, κύκλος ἅπτεται τοῦ γλμν, κύκλου καὶ τοῦ β': τοῦ παρόντος, ἀλλ' ὁ γλμν, ἴσός ἐστι καὶ παράλληλος τῇ αεζη, ἄρα ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος ἁπτόμενος τοῦ αεζη, ἅπτεται καὶ τοῦ γλμν, ὥστε καὶ παράλληλα ὄντος τῇ αεζη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅτι δὲ ὁ αμγζ, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τοῦτε αβγδ, καὶ γλμν, διέρχεται, δῆλον, καὶ γὰρ τοῦ ὑπόθεσιν διέρχεται διὰ τῶν πόλων τοῦ αεζη, καὶ αβγδ. ἀλλ' οἱ πόλοι τοῦ αεζη, εἰσὶν ἔτι πόλοι καὶ τοῦ γλμν, ὡς δέδεικται, ἄρα ὁ αμγζ, διὰ τῶν πόλων τοῦτε αβγδ, καὶ γλμν, διέρχεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Α': Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἅπτεται ἑκατέρωθεν δύο ἐλασσόνων κύκλων ἴσων τε καὶ παραλλήλων, τὰ τῆς ἀφῆς σημεῖα καὶ διάμετρον ἀντίκεινται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

Β': Ἔτι ἐὰν μέγιστος ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐλασσόνων δύο ἅπτηται κύκλων, οἱ ἐλάσσονες κύκλοι ἴσοί τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Πρότασις ς': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἐλάσσονες ἴσοί τε καὶ παράλληλοι, ὁ τοῦ ἑνὸς ἁπτόμενος μέγιστος κύκλος καὶ τοῦ ἑτέρου ἅπτεται.

Ἐν σφαίρᾳ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι ἐλάσσονες οἱ αεζη, γλμν, ἴσοί τε καὶ παράλληλοι, καὶ ἁπτέσθω τοῦ αεζη, ὁ αβγδ, κατὰ τὸ α. Λέγω, ὅτι ὁ αβγδ, μέγιστος κύκλος ἅπτεται καὶ τοῦ γλμν, εἰ γὰρ μή, ἅψεται πάντως ἑτέρου τινὸς μείζονος, ἢ ἐλάσσονος τοῦ γλμν. ἁπτέσθω δὴ τοῦ γξοπ, μείζονος, καὶ ἐπεὶ ὁ αβγδ μέγιστος κύκλος ἅπτεται τῶν αεζη, γξοπ, ἐλασσόνων, πάντως γε κατὰ τὸ β': πόσισμα κάτωτέρω οἱ αεζη, γξοπ, ἴσοί εἰσιν, ὑπετέθη δὲ καὶ ὁ γλμν, ἴσος τῇ αεζη, ἄρα ὁ γξοπ, ἴσός ἐστι τῇ γλμν, ἀλλὰ καὶ μείζων κατὰ τὸ ὑπόθεσιν, ἄτοπον ἄρα, ὁ αβγδ, ἄρα οὐκ ἅπτεται μείζονος τοῦ γλμν. Διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται μὴ ἅπτεσθαι μηδὲ ἐλάσσονος, τὸ αὐτὸ γὰρ ἄτοπον ἕψεται, ὁ ἄρα αβγδ, μέγιστος κύκλος ἁπτόμενος τοῦ αεζη, ἅπτεται πάντως καὶ τοῦ γλμν, ἴσου τε καὶ παραλλήλου ἐκείνῳ ὄντος.

ΠΟ-

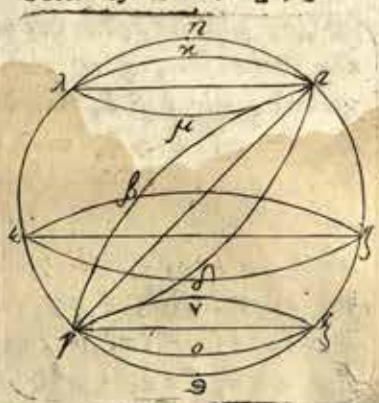
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐ δύνανται ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πλείονες, ἢ δύο ἐλάττονες κύκλοι ἴσοί τε καὶ παράλληλοι εἶναι.

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλος μέγιστος κύκλου τινὰ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ πλαγίως τέμνῃ, δύναται ὁ αὐτὸς δύο κύκλους ἅπτεσθαι ἴσους τε ἀλλήλοις καὶ παραλλήλους τῷ εἰρημένῳ κύκλῳ.

Κύκλος μέγιστος ὁ αβγδ, τεμνέτω κύκλον τὸν εβζδ, πλαγίως. Λέγω, ὅτι ὁ αβγδ, κύκλος δύναται δύο τινῶν ἅπτεσθαι κύκλων, ἴσων μὲν ἀλλήλοις, παραλλήλων δὲ τῷ εβζδ, κύκλῳ. Εἰλήφθωσαν γὰρ πόλοι τοῦ εβζδ, τὰ η, καὶ θ, σημεῖα, καὶ διὰ τῶν η, καὶ θ, σημείων γραφέσθω κύκλος ὁ ηεθζ. ἀπὸ δὲ τῶν η, καὶ θ, σημείων ὡς ἀπὸ κέντρων, διαστήματι τῷ ηα, ἢ θγ, γραφέσθωσαν οἱ ακλμ, γνξο, κύκλοι. καὶ ἐπεὶ οἱ αβγδ, ηεθζ, μέγιστοί εἰσι, πάντως γε κατὰ τὸ ι: τοῦ α: τοῦ παρόντος, δίχα ἀλλήλους τέμνουσι. ὥστε τὸ αζγ, τόξον ἡμικύκλιόν ἐστιν, ἀλλὰ καὶ τὸ ηζθ, ἡμικύκλιόν ἐστι, διὰ τὸ τοὺς πόλους πάντος κύκλου ἐν σφαίρᾳ ἡμικυκλίῳ ἀφίσασθαι ἀλλήλων, ἄρα τὰ αζγ, ηζθ, τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, κοινοῦ ἀφαιρεμένου τοῦ αζθ, ἐναπολείπονται τὰ ηα, θγ, τόξα ἴσα, ἄρα οἱ ακλμ, γνξο, κύκλοι ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί. ἔχουσι δὲ καὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους η, θ, οἷς καὶ ὁ εβζδ, κατὰ τὸ κατασκευήν, ἄρα κατὰ τὸ α: τοῦ παρόντος, παράλληλοί εἰσι τῷ εβζδ. ἀλλ' ἑκάτερος τῶν ακλμ, γνξο, συμπίπτει μὲν τῷ αβγδ, μεγίστῳ κύκλῳ τῷ αὐτῷ σημείῳ, τοῦ ηεθζ, μεγίστου ὄντος τοῦ αὐτοῦ, καὶ διὰ τῶν πόλων τῶν αβγδ, ακλμ, γνξο, διερχομένου, ἄρα κατὰ τὸ β: τοῦ παρόντος, ὁ αβγδ, ἑκατέρου τῶν ακλμ, γνξο, κύκλων ἅπτεται. οἱ δὲ ακλμ, γνξο, κύκλοι ἴσοί τε ἀλλήλοις εἰσὶ καὶ παράλληλοι τῷ εβζδ, ὡς δέδεικται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Theod. Sph. Lib. 2. Fig. 5.

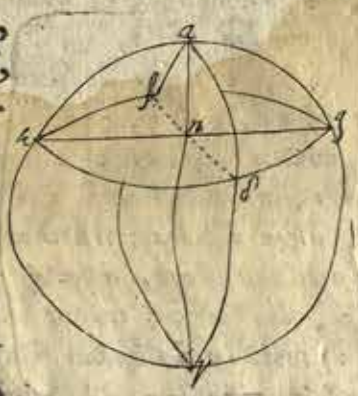
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ τῷ αὐτῷ κύκλῳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶ παράλληλοι, οἱ γὰρ ακλμ, γνξο, παράλληλοι ὄντες τῷ εβζδ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶ παράλληλοι, ὅτι γε τοὺς αὐτοὺς ἔχουσι πόλους.

Πρότασις Η': Θεώρημα.

Ἐὰν δύο ἐν σφαίρᾳ κύκλων ἀλλήλοις τεμνομένων διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου κύκλος μέγιστος διέλθῃ, δίχα τὰ τμήματα ἑκατέρου τῶν αὐτῶν κύκλων τέμνει.

Τεμνέτωσαν ἀλλήλους ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ αβγδ, εβζδ, κύκλοι, κατὰ τὰ β, δ, σημεῖα, καὶ διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου διερχέσθω ὁ αεγζ, μέγιστος κύκλος. Λέγω, ὅτι ὁ αεγζ, μέγιστος κύκλος δίχα τέμνει τὰ βαδ, βγδ, βεδ, βζδ, τμήματα ἑκατέρου τῶν αβγδ, εβζδ, κύκλων. Ἐπιζεύχθωσαν γὰρ αἱ κοιναὶ τομαὶ αγ, εζ, βδ. καὶ ἐπεὶ κύκλος ὁ αεγζ, διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου τῶν αβγδ, εβζδ, διέρχεται, παύπως γε καὶ τιω ιβ': τῆ ά: τῆ παράυπος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὰς τέμνει, ὥστε καὶ ἀνάπαλιν ἑκάτερος δηλαδὴ τῶν αβγδ, εβζδ, κύκλων ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τῆ αεγζ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ κατὰ τιω ιθ': τῆ ια: τῆ στοιχειωτῆ, καὶ ἡ βδ, κοινὴ αὐτῶν τομὴ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τῆ αεγζ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα πὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ αεγζ, κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας, καὶ τὸν γ': ὅρον τῆ αὐτῆ. ἅπτεται δὲ τῆς βδ, ἡ αγ, ὡς ὀφόμεθα, ἡ βδ, ἄρα ὀρθή ἐστιν ἐπὶ τῆς αγ, καὶ ἀνάπαλιν, αἱ ἄρα βηα, δηα, γωνίαι ὀρθαί εἰσι, καὶ ἑπομένως ἴσαι, ἀλλ' ἡ αγ, διάμετρός ἐστι τῆ αβγδ, κύκλου διὰ τὸ δίχα τέμνεσθαι τὰς αβγδ, αεγζ, μεγίστους κύκλους, καὶ τιω ι': τῆ ά: τῆ παρόυπος, καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει τιω βδ, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ τιω γ': τῆ γ': τῆ στοιχειωτῆ, καὶ δίχα τέμνει ἡ αγ, τιω βδ, ἴση ἄρα ἡ βη, τῇ ηδ, κοινὴ δὴ ἡ αη, δύο δὴ αἱ βη, ηα, δυσὶ ταῖς δη, ηα, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἔστι δὲ καὶ ἡ βηα, τῇ δηα, γωνία ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ἄρα καὶ βάσις ἡ αβ, βάσει τῇ αδ, ἴση ἐστίν, καὶ ἑπομένως τὰ αβ, αδ, τόξα ἴσα ἐστὶ καὶ τιω κη': τῆ γ': τῆ στοιχειωτῆ. Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται καὶ τὸ εβγ, τόξον τῷ ζδ, ἴσον, τὸ δὲ βε, τῷ εδ, καὶ τὸ βζ, τῷ ζδ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 6.

Ὅτι δὲ ἡ αγ, ἅπτεται τῆς βδ, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ἡ αγ, κοινή ἐστι τομὴ τῶν αβγδ, αεγζ, κύκλων, παύπως γε ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ τοῦ αεγζ, ἔστι δὲ ὁ αβγδ, κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸ τῆ αεγζ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ ἡ βδ, ἄρα οὖσα ἐν τῷ τῆ αβγδ, κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τῆ αεγζ, ἐπίπεδον, ὥστε καὶ τὸν δ': ὅρον τῆ ια: τῆ στοιχ: ἡ βδ, ἐπὶ τῆς αγ, πίπτει, ἅπτεται ἄρα ἡ αγ, τῆς βδ.

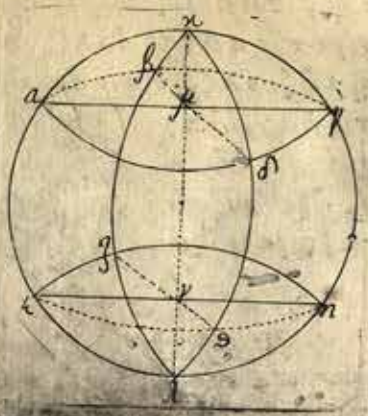
Ἄλλ.

Ἄλλως. Ἐπεὶ ὁ εβζδ, κύκλος δίχα τέμνεται ὑφ' ἑκατέρου τῶν αβγδ, αεγζ, μεγίστων κύκλων κατὰ τλῶ ιβ': τὲ ά: τὲ παρόντος, παύπως γε αἱ βδ, εζ, διάμετροι αὐτὲ εἰσιν, ὥστε τὸ η, σημεῖον κοινὸν ἐστὶ τοῦ εβζδ, κύκλου. ἀλλ' ὁ αβγδ, κύκλος καὶ τλῶ αὐτλῶ ιβ': δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὸν εβζδ, κύκλον, ἄρα καὶ ἡ αγ, ὀρθὴ ἐστι πρὸς τὸ τὲ εβζδ, κύκλε ἐπίπεδον, καὶ τὸν γ': ὅρον τὲ ιά: τὲ στοιχ: ἔστι δὲ ἡ αγ, διάμετρος, διὰ τὸ κοινλῶ εἶναι τομλῶ τῶν αβγδ, αεγζ, μεγίστων κύκλων, ἄρα διὰ τὲ κέντρε τῆς σφαίρας διέρχεται, καὶ καὶ τὸ πόρ: τῆς ς': τὲ ά: τὲ παρ: διέρχεται ἔτι καὶ διὰ τὲ η, κέντρε τὲ αβζδ. ἀλλὰ καὶ ἡ βδ, διὰ τὲ η, διέρχεται, ἅπτονται ἄρα ἀλλήλων καὶ τὸ η.

Πρότασις Θ': Θεώρημα.

Ἐὰμ κύκλοι μέγιστοι ἐμ τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ διὰ τῶν πόλων παραλλήλων κύκλων διέλθωσι, τὰ μὲμ τῶν παραλλήλων τόξα τὰ ὑπὸ τῶν μεγίστων περιλαμβαμόμεμα κύκλων, ὅμοιά εἰσι, τὰ δὲ τῶν μεγίστων τόξα τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἴσα εἰσί.

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι οἱ αβγδ, εζηθ, πόλοι δὲ τῶν αὐτῶν τὰ κ, καὶ λ, σημεῖα. διὰ δὲ τῶν κ, καὶ λ, σημείων διεχθέωσαν οἱ κζλδ, κελγ, μέγιστοι κύκλοι. Λέγω, ὅτι τὰ μὲν αβ, εζ, καὶ αδ, εθ, τόξα τῶν αβγδ, εζηθ, παραλλήλων ὅμοιά εἰσι, τὰ δὲ αε, βζ, ἴσα. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ αγ, βδ, εη, ζθ, καὶ ἐπεὶ οἱ κελγ, κζλδ, μέγιστοι κύκλοι διὰ τῶν πόλων διέρχονται τῶν αβγδ, εζηθ, παραλλήλων κύκλων, παύπως γε καὶ τλῶ ιβ': τὲ ά: τὲ παρόντος, οἱ αβγδ, εζηθ, δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ὑπ' αὐτῶν τέμνονται, διάμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ αγ, βδ, εη, ζθ, κοιναὶ τομαὶ, καὶ τὸ μν, σημεῖα κοίλα τῶν κύκλων. Αὖθις ἐπεὶ οἱ αβγδ, εζηθ, κύκλοι παράλληλοί εἰσι, καὶ ὑπὸ τῶν κελγ, κζλδ, μεγίστων κύκλων τέμνονται, παύπως γε καὶ αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι καὶ τλῶ ις': τὲ ιά: τὲ στοιχειωτῦ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν αμ, τῇ εν, ἡ δὲ βμ, τῇ ζν, καὶ καὶ τλῶ ί: τὲ αὐτῦ, αἱ ὑπὸ αμβ, ενζ, γωνίαι ἴσαί εἰσιν, εἰσὶ δὲ πρὸς τοῖς κέντροις, καὶ αἱ πρὸς τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ὁμοίων βεβήκασι περιφερειῶν, ὡς ὀφόμεθα, ἄρα τὰ αβ, εζ, τόξα ὅμοιά εἰσι, τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον δειχθήσεται ὅμοια καὶ τὰ αδ, εθ, καὶ βγ, ζη, καὶ γδ, ηθ, ὅπερ ἓν τὸ ά: Ὅτι δὲ καὶ τὰ αε, βζ, ἴσά εἰσι, δῆλον. ἐπεὶ γὰρ πόλος ἐστὶ τῶν αβγδ, εζηθ, τὸ κ, σημεῖον, παύπως γε καὶ τὸν ε: ὅρον τὲ ά: τοῦ παρόντος αἱ κα, κβ, καὶ

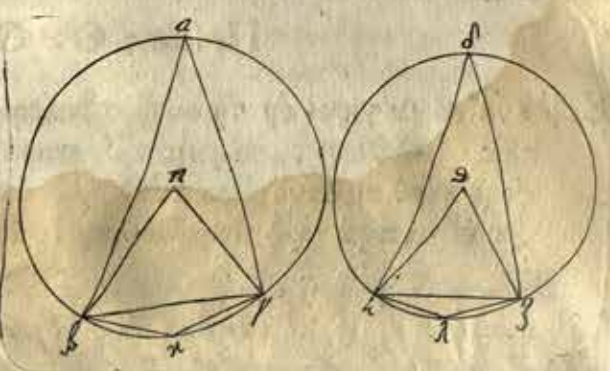


Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 7.

καὶ κε, κζ, διαστάσεις ἴσαι εἰσίν, ὥστε καὶ αἱ κα, κβ, καὶ κε, κζ, περιφέρειαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ κή: τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ, ἀφαιρεμένων ἄρα τῶν κα, κβ, ἴσων ἀπὸ τῶν κε, κζ, ἴσων καὶ αὐτῶν ἀσῶν, ὡς δέδεικται, ἐγκαταλείπονται δήπουθεν ἴσαι αἱ αε, βζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ β':

Ὁμοίως δειχθήσεται ἴσα καὶ τὰ δθ, γη. Ὅτι δὲ αἱ πρὸς τοῖς κέντροις ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ὁμοίων βεβήκασι περιφερειῶν, δῆλον. Ἔστωσαν γὰρ κύκλοι ἄνισοι οἱ αβγ, δεζ, καὶ συνεστάθωσαν πρὸς τοῖς κ, καὶ θ, κέντροις αὐτῶν ἴσαι γωνίαι αἱ ὑπὸ βκγ, εθζ. Λέγω, ὅτι αἱ βκγ, ελζ, περιφέρειαι, ἐφ' ὧν βεβήκασιν αἱ ῥηθεῖσαι γωνίαι ὅμοιαί εἰσιν.

Theod. Sf. Lib. a. Fig. 8.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βγ, εζ, καὶ πρὸς μὲν τοῖς α, καὶ δ, συνεστάτωσαν αἱ ὑπὸ βαγ, εδζ, γωνίαι, πρὸς δὲ τοῖς κ, καὶ λ, αἱ ὑπὸ βκγ, ελζ, καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ βκγ, εθζ, γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἔστι δὲ ἡ μὲν ὑπὸ βκγ, διπλασία τῆς ὑπὸ βαγ, ἡ δὲ ὑπὸ εθζ, τῆς ὑπὸ εδζ, κατὰ τὸ κ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ, παντὸς γε αἱ ὑπὸ βαγ, εδζ, ἴσαι εἰσίν. Λύθεις ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν αβκγ, δελζ, τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι αἱ ὑπὸ βαγ, βκγ, καὶ εδζ, ελζ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὸ κβ': τοῦ αὐτοῦ, παντὸς γε αἱ ὑπὸ βαγ, βκγ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ εδζ, ελζ, ἔστι δὲ ἡ μὲν ὑπὸ βαγ, ἴση τῇ ὑπὸ εδζ, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ αἱ ὑπὸ βκγ, ελζ, ἴσαι εἰσί, καὶ κατὰ τὸν ι': ὅρον τοῦ αὐτοῦ, τὰ βκγ, ελζ, τμήματα ὅμοιά εἰσιν, αἱ ἄρα βκγ, ελζ, περιφέρειαι ὅμοιαί εἰσιν, ὅπερ ἔδει ὑποχθῆναι.

Πρότασις Γ': Θεώρημα.

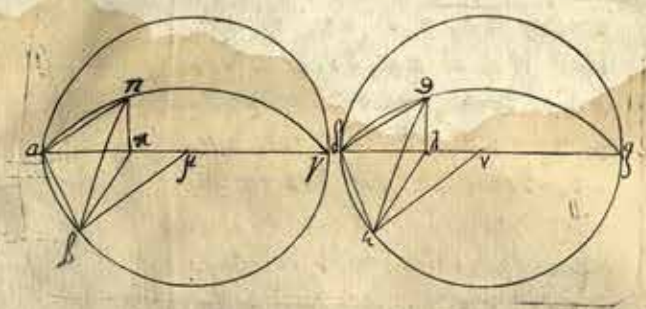
Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου τῆς ἴσων κύκλων ἴσα τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλου [illegible] ὦσιν, ὥστε ὀρθὰ εἶναι πρὸς τὰ τῆς κύκλων ἐπίπεδα, [illegible] αὐτῆς ἀφεθῇ τινα ἴσα ἀλλήλοις ὑπερέχοντα, ἢ ἐλλείποντα τοῦ ἡμίσεως τῆς τμήματος, ἀπὸ δὲ τῶν τομῶν διῆκται ἴσαι ἐπὶ τὰς τῆς κύκλων περιφερείας ἁπτόμεναι, τὰ ἐμπολαμβανόμενα τῆς κύκλων τόξα μεταξὺ τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀγομένης διῆκται ἴσα ἔσονται.

Ἔστωσαν κύκλοι ἴσοι οἱ αβγ, δεζ, καὶ συνεστάτωσαν ἐπὶ τῶν αγ, δζ, διαμέτρων τῶν αὐτῶν κύκλων, τμήματα κύκλων ἴσα τε καὶ ὅμοια τὰ αηγ, δθζ.

ἔστω-

σαν δὲ ἔτι καὶ ὀρθαὶ πρὸς τὰ τῆς αβγ, δεζ, κύκλων ἐπίπεδα, καὶ ἐφαρμοζήτωσαν ἀπὸ τῆς ανγ, δθζ, τμημάτων ἴσα τόξα τὰ αν, δθ, ἐλλείποντα τῷ ἡμίσει τῆς ανγ, δθζ, τόξων, ἀπὸ δὲ τῆς τομῶν ν, καὶ θ, ἀχθήτωσαν ἐπὶ τὰς τῆς αβγ, δεζ, κύκλων περιφερείας ἴσαι αἱ νβ, θε. Λέγω, ὅτι τὰ αβ, δε, ἐναπολαμβανόμενα τόξα μεταξὺ τῆς αγ, δζ, διαμέτρων, καὶ νβ, θε, ἀγομένων εὐθειῶν ἴσά ἐστι. Πιπτέτωσαν γὰρ ἀπὸ τῆς ν, καὶ θ, κάθετοι πρὸς τὰ τῆς αβγ, δεζ, κύκλων ἐπίπεδα αἱ νκ, θλ, αἵτινες καὶ τὸν δ': ὅρον τῶ ια: τῶ στοιχειωτῶ ἐπὶ τῆς αγ, δζ, πεσοῦνται. ἐπεὶ δὲ αἱ ἀπὸ τῆς τομῶν ν, καὶ θ, κάθετοι ἢ ἐντὸς πίπτουσι τῆς περιφερείας, ἢ ἐκτὸς, ἢ γοῦν ἐπ' αὐτῆς, πιπτέτωσαν ἀ: ἐντὸς, καὶ συμβαλλέτωσαν ταῖς αγ, δζ, διαμέτροις καὶ τὰ κ, καὶ λ, σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ακ, νβ, βκ, βα, βμ, καὶ δθ, θε, δε, ελ, εν. καὶ ἐπεὶ τὰ ανγ, δθζ, ἴσά εἰσι, καὶ τούτων ἀφῄρηται ἴσα τὰ αν, δθ, παντὸς γε καὶ τὰ ἐναπολειπόμενα νγ, θζ, ἴσά εἰσιν, ὥστε αἱ ὑπὸ ναγ, θδζ, γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασι, καὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ κατὰ τὸ κζ: τῶ γ': στοιχειωτῶ. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ακν, δλθ, ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, τὰ ἄρα ακν, δλθ, τρίγωνα ἔχουσι τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ νακ, ακν, δυσὶ ταῖς ὑπὸ θδλ, δλθ, ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχουσι δ' ἔτι καὶ μίαν πλευρὰν τὴν αν, μιᾷ πλευρᾷ τῇ δθ, ἴσην καὶ τὴν κ θ': τῶ γ': τοῦ στοιχειωτῶ, τὴν ὑποτείνουσαν δηλ: ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν. ἄρα καὶ τὴν κζ': τῶ α: τῶ αὐτῶ καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔχουσιν, ἴση ἄρα ἡ μὲν ακ, τῇ δλ, ἡ δὲ νκ, τῇ θλ. ἀλλ' ἐπεὶ τὰ νκβ, θλε, τρίγωνα ὀρθὰς ἔχουσι τὰς ὑπὸ νκβ, θλε, γωνίας καὶ τὴν γ': ὅρον τῶ ια: τῶ στοιχειωτῶ, παντὸς γε καὶ τὴν μζ': τῶ α: τῶ αὐτοῦ, τὸ μὲν ἀπὸ τῆς νβ, τετράγωνον ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν νκ, κβ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς θε, τοῖς ἀπὸ τῶν θλ, λε. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς νβ, ἴσόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς θε, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς νβ, θε, καὶ τὴν ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῶν νκ, κβ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θλ, λε. ὥστε ἀφαιρουμένων τῶν ἀπὸ τῶν νκ, θλ, ἴσων ἐναπολείπονται τὰ ἀπὸ τῶν κβ, λε, ἴσα, καὶ ἐπομένως αἱ κβ, λε, ἴσαι εἰσιν. Αὖθις ἐπεὶ αἱ αμ, δν, ἡμιδιάμετροι τῶν ἴσων κύκλων, ἴσαι εἰσιν, ἀφαιρουμένων τῶν ακ, δλ, ἴσων, ἐναπολείπονται πάντως καὶ αἱ κμ, λν, ἴσαι, εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ βμ, εν, ἡμιδιάμετροι, ἄρα τὰ βκμ, κλν, ἰσόπλευρά ἐστιν, ὥστε καὶ ἰσογώνια, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αμβ, γωνία τῇ ὑπὸ δνε, καὶ ἔστιν ἑκατέρα

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 9.

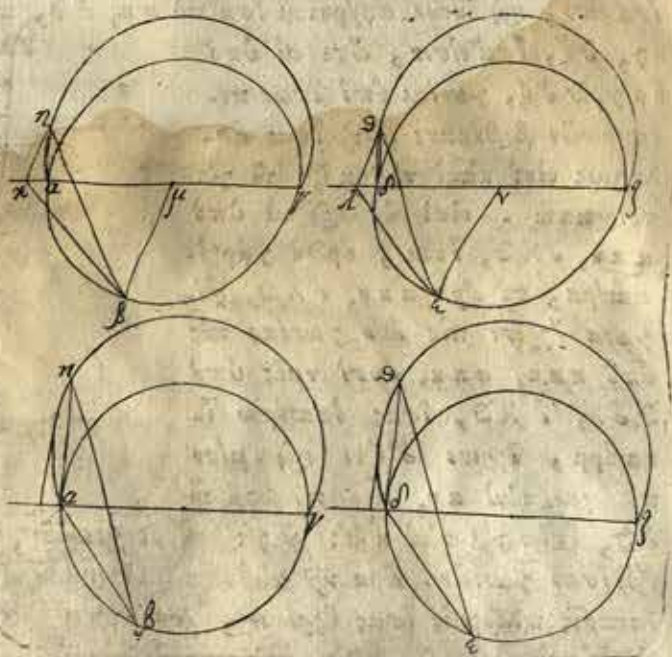


πρὸς

πρὸς τῇ κείμενῳ, ἄρα καὶ τῶν κς΄: τοῦ γ΄: τὰ στοιχειωτὰ αἱ αβ, δε, περιφέρειαι ἴσαι εἰσί.

Πιπτέτωσαν β΄: αἱ ηκ, λϑ, κάϑετοι ἐπὶ τὰς περιφερείας, καὶ ἐπεζεύχϑωσαν αἱ ηα, κβ, βμ, καὶ ϑδ, λε, εν, καὶ ἐπεὶ τὰ αηγ, δϑζ, τμήματα ἴσά τε καὶ ὅμοιά ἐστι, καὶ ἀφῃρέϑησαν τὰ αη, δϑ, τὰξα ἴσα, παντως γε καὶ τὰ ἐναπολειπόμενα ηγ, ϑζ, ἴσά ἐστιν. αἱ ἄρα ὑπὸ γαη, ζδϑ, γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ τῶν κζ΄: τὰ γ΄: τὰ στοιχειωτά. ὥστε καὶ λοιπαὶ αἱ ὑπὸ ηακ, ϑδλ, ὡς παραπληρώματα τῶν ὑπὸ γαη, ζδϑ, ἴσαι ὁμοίως εἰσίν. ἔστι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ηκα, ϑλδ, ὀρθή, ἄρα τῶν αηκ, δϑλ, ξιγώνων αἱ δύο γωνίαι ταῖς δυσὶν ἴσαι εἰσιν, ἀλλὰ καὶ αἱ ηα, ϑδ, πλευραὶ εἰσὶν ἴσαι καὶ τῶν κϑ΄: τὰ αὐτά, διὰ τὸ ἴσας εἶναι καὶ τὰς ηα, ϑδ, περιφερείας, ἄρα καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς ἴσαι ἔσονται, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ηκ, τῇ ϑλ, ἡ δὲ κα, τῇ λδ, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ αμ, δν, ἡμιδιάμετροι ἴσαι, προσϑεμένων ἄρα τῶν κα, λδ, ἴσων ταῖς αμ, δν, ἴσαις, ἴσαι ἔσονται αἱ κμ, λν. Αὖϑις ἐπεὶ αἱ ηκ, ϑλ, ὀρϑαί εἰσι πρὸς τὰς κβ, λε, καὶ τὸν γ΄: ὅρον τὰ ια΄: τὰ αὐτά, παντως γε τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ηβ, τετράγωνον ἴσόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ηκ, κβ, τετραγώνοις, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ϑε, τοῖς ἀπὸ τῶν ϑλ, λε. ἀλλ' αἱ ηβ, ϑε, ἴσαι εἰσὶ καὶ τῶν ὑποϑείσιν, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ηκ, κβ, ἴσα εἰσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ϑλ, λε. ἀφῃρημένων ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ηκ, ϑλ, ἴσων, ἴση γὰρ ἡ ηκ, τῇ ϑλ, ὡς δέδεικται, ἐναπολείπεται τὰ ἀπὸ τῶν κβ, λε, ἴσα, ὥστε καὶ αἱ κβ, λε, ἴσαι εἰσιν. εἰσὶ δὲ ἴσαι καὶ αἱ μ, λν, ὡς δέδεικται, ἔτι δὲ καὶ αἱ μβ, νε, ἡμιδιάμετροι, ἄρα τῶν κμβ, λνε, ξιγώνων αἱ ὑπὸ κμβ, λνε, γωνίαι ἴσαι εἰσὶ καὶ τῶν ἡ: τὰ α: τὰ στοιχειωτά, ὥστε καὶ αἱ αβ, δε, περιφέρειαι, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἴσαι εἰσὶ καὶ τῶν κς΄: τὰ γ΄: τὰ αὐτά.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 10.



Πιπτέτωσαν πλευραῖον αἱ ηα, ϑδ, κάϑετοι ἐπὶ τὰς περιφερείας, καὶ ἐπεζεύχϑωσαν αἱ αβ, δε, καὶ ἐπεὶ αἱ ηα, ϑδ, ὀρϑαί εἰσιν ἐπὶ τῶν αβ, δε, καὶ τὸν γ΄: ὅρον τὰ ια΄: τοῦ στοιχειωτοῦ, παντως γε τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ηβ, τετράγωνον ἴσον

ἐστὶ

ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ηα, αβ, τετραγώνοις, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς θε, τοῖς ἀπὸ τῶν θδ, δε, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ηβ, θε, ἴσα ἐστὶ, διὰ τὸ ἴσας εἶναι τὰς ηβ, θε, ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ηα, αβ, ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν θδ, δε, συναμφότερα συναμφοτέροις, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ηα, θδ, ἴσα ἐστὶν, ἴσαι γὰρ αἱ ηα, θδ, κατὰ τὸ κθ' τῦ γ' τῦ αὐτῦ. ἄρα ἀφαιρεμένων τῶν ἀπὸ τῶν ηα, θδ, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν αβ, δε. ὥστε καὶ αἱ αβ, δε, ἴσαι εἰσὶ, καὶ κατὰ κη' τὰ αὐτὰ αἱ αβ, δε, περιφέρειαι ἴσαι εἰσὶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

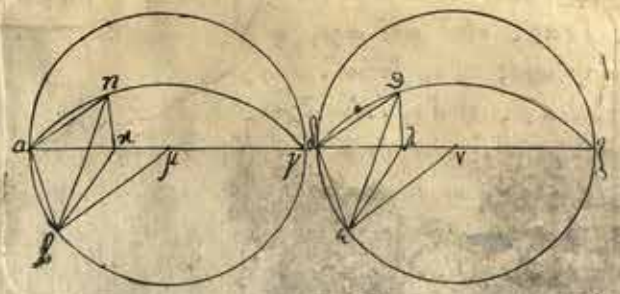
Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται ἴσα εἶναι τὰ αβ, δε, τόξα, καὶ ἂν τὰ ἀφαιρεθέντα αη, δθ, ὑπερέχωσι τῆς ἡμισείας τῶν αηγ, δθζ, τόξων.

Πρότασις ΙΑ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου τῆς ἴσου κύκλου ἴσά τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλου ἐπιζευχθῶσιν, ὥστε ὀρθὰς εἶναι πρὸς τὰ τῆς κύκλου ἐπίπεδα, ἀπὸ δὲ τῆς τμημάτων τε καὶ κύκλου ἴσα τόξα ἀφαιρεθῇ, αἱ πρὸς τομὰς τῆς τόξου ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ αβγ, δεζ, καὶ συνεστάτωσαν ἐπὶ τῶν αγ, δζ, διαμέτρων ἴσά τε καὶ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ αηγ, δθζ. καὶ ἀπὸ μὲν τῶν αηγ, δθζ, τμημάτων ἀφῃρεθήτωσαν ἴσα τόξα τὰ αη, δθ, ἀπὸ δὲ τῶν κύκλων αβγ, δεζ, τὰ αβ, δε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηβ, θε. Λέγω πὰς ηβ, θε, ἴσας εἶναι, τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὰ αβ, δε, τόξα ἐπὶ τῶν κέντρων ἐστὶν:

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 11.



τῆς δ': δείξεως τῆς ἀνωτέρω προτάσεως, ἴσα ἐστὶ, πάντως γε καὶ αβ, δε, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τὴν κθ': τῦ γ': τῦ στοιχείου. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ακ, δλ, ἴσαι, ὡς δέδεικται ἀνωτέρω, ἄρα τῶν βακ, ελδ, τριγώνων αἱ δύο πλευραὶ βα, ακ, ταῖς ε δ, δλ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, εἰσὶ δὲ καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ βακ, ελδ, ἴσαι, ὡς ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν βγ, εζ, βεβηκυῖαι, κατὰ τὸ κζ': τῦ αὐτῦ, ἄρα καὶ βάσεις αἱ ὑπὸ βκ, ελ, ἴσαι εἰσίν. εἰδὴ δ' ἔτι ἴσαι καὶ αἱ ηκ, θλ, κάθετοι, ὥσπερ καὶ αἱ ὑπὸ βκη, ελθ, γωνίαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, ὡς ἐν τῷ ἀνωτέρω δέδεικται, ἄρα κατὰ τὸ δ': τῦ α: τῦ αὐτῦ αἱ βη, εθ, ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἐδεῖ δεῖξαι.

Ἐπὶ δὲ τῶν σχημάτων τῆς β': δείξεως, ἐπεὶ αἱ κμ, μβ, ἴσαι εἰσὶ ταῖς

λν, νε, ὡς δέδεικται ἐν τῇ αὐωτέρω, εἰσὶ δ' ἔτι καὶ αἱ ὑπὸ κμβ, λνε, γωνίαι ἴσαι, διὰ τὸ ἴσας ὑποτείνεσθαι τὰς αβ, δε, περιφερείας, ἐφ' ὧν αὐται βεβήκασιν, ἄρα καὶ τῷ ῥηθεῖσαι δ': αἱ κβ, λε, ἴσαι εἰσι. δέδεικται δὲ καὶ ἡ μὲν ηκ, κάθετος τῇ θλ, ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ηκβ, γωνία τῇ ὑπὸ θλε, ἄρα καὶ τῷ αὐτῷ καὶ ἡ ηβ, τῇ θε, ἴση ἐστίν.

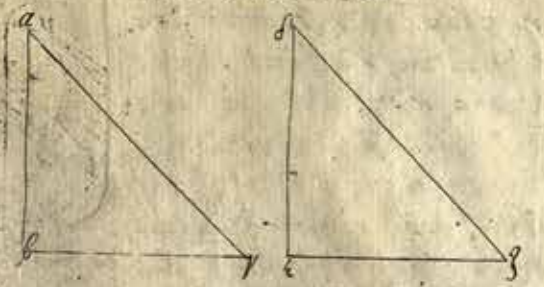
Ἐπὶ δὲ τῆς σχημάτων τῆς γ': δείξεως ὁμοίως, ἐπεὶ αἱ ηα, θδ, καὶ αβ, δε, ἴσαί εἰσι, δέδεικται δὲ ἐν τῇ αὐωτέρω καὶ ἡ ὑπὸ ηαβ, γωνία ἴση τῇ ὑπὸ θδε, ἄρα καὶ τῷ ῥηθεῖσαι δ': καὶ αἱ ηβ, θε, ἴσαί εἰσιν. ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς διαμέτρων τῆς ἴσων κύκλων ἴσάπτε καὶ ὅμοια τμήματα. καὶ τὰ ἑξῆς.

Λ Η Μ Μ Α.

Ἐὰν δύο ῥίγωμα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν ὁποιανδήποτε γωνίᾳ ὁποιαδήποτε ἴσην, καὶ ἡ λοιπὴ πλευρὰ τῇ λοιπῇ ἴσην ἕξει, καὶ ὅλον τὸ ῥίγωμον ὅλῳ τῷ ῥιγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἐχέτωσαν τὰ αβγ, δεζ, ῥίγωνα τὰς δύο πλευρὰς αγ, γβ, δυσὶ ταῖς δζ, ζε, ἴσας, τὴν μὲν αγ, τῇ δζ, τὴν δὲ γβ, τῇ ζε, καὶ τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν τῇ πρὸς τῷ ε, ἴσην. Λέγω, ὅτι καὶ τὴν αβ, τῇ δε, ἴσην ἔχει, καὶ ὅλον τὸ αβγ, ῥίγωνον ὅλῳ τῷ δεζ, ῥιγώνῳ ἴσόν ἐστι, καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ γ, γωνία τῇ πρὸς τῷ ζ, ἡ δὲ πρὸς τῷ α, τῇ πρὸς τῷ δ, ὁμοίως ἴση ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ μὲν αγ, τῇ δζ, ἡ δὲ γβ, τῇ ζε, ἴση ἐστὶν, παντὸς γε ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν δζ, οὕτως καὶ ἡ γβ, πρὸς τὴν ζε, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ αγ, πρὸς τὴν γβ, ἡ δζ, πρὸς τὴν ζε, καὶ τὴν ε': τῷ ε': τῷ στοιχειώτῃ, ἔχουσι δὲ καὶ τὴν πρὸς τῷ β, γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ ε, ἄρα καὶ τὴν ζ': τῷ ε' τῷ αὐτῷ, τὰ αβγ, δεζ, ῥίγωνα ἰσογώνιά εἰσιν. ἄρα ἡ πρὸς τῷ γ, γωνία τῇ πρὸς τῷ ζ, ἴση ἐστίν. ἀλλὰ καὶ τὴν δ': τῷ α': τῷ αὐτῷ καὶ βάσις ἡ αβ, βάσει τῇ δε, ἴση ἐστὶ, καὶ ὅλον τὸ ῥίγωνον ὅλῳ τῷ ῥιγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. τὸ ὑποκείμενον.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 22.



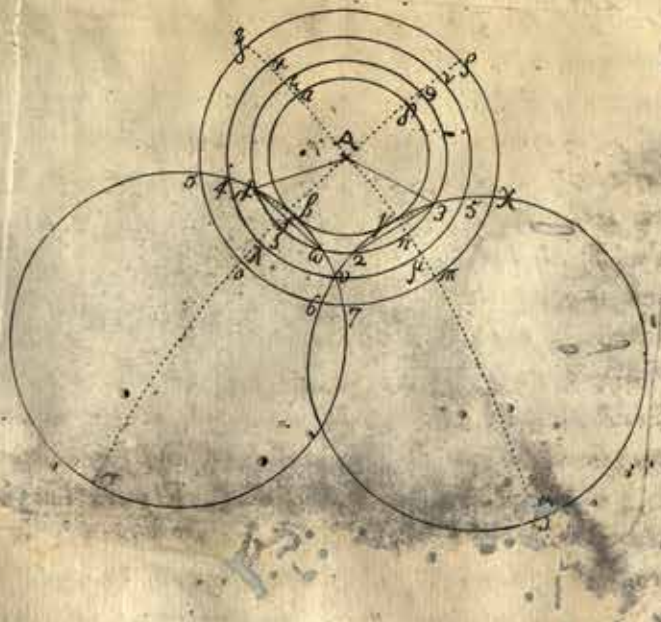
Πρό-

Πρότασις ΙΒ'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι, πολλῶν ὄντων παραλλήλων ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ τὸν μὲν ἐλάσσονος ἅπτωνται, τὰς δὲ λοιπὰς τέμνωσι, τὰ τμήματα μεγίστων τόξα, πάντα ὑφ' ἑκάστου τμήματος παραλλήλου περιεχόμενα, καὶ τὰ μεταξὺ τμημάτων παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν, ὡσαύτως δὲ καὶ τὰ τμήματα παραλλήλων τὰ ὑπὸ τμημάτων μεγίστων περιεχόμενα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, καὶ πάντων αὖθις ὅσα μὲν διὰ τῆς τομῆς τμήματος μεγίστων διέρχεται κύκλων αἰεὶ τινὸς προσθήκης, ἢ ἀφαιρέσεως ὅμοιά ἐστι τῷ μεταξὺ τμημάτων ἀφῶν τόξῳ, τῷ ὑπερ οἱ μέγιστοι παραλλήλου ἅπτονται, ὅσα δὲ διὰ τμημάτων καθ' ἃ οἱ κύκλοι τέμνονται μέρων διέρχεται μετ' ἀφαιρέσεως, ὅσα δὲ διὰ τμημάτων πρὸς ἃ οὐ τέμνονται οἱ κύκλοι διαβαίνουσι μετὰ προσθήκης ἑκείνῳ ὅμοια εἰσίν.

Ἐστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ αβγδ, εζηθ, κλμν, ξοπρ, καὶ τοῦ μὲν αβγδ, ἐλάσσονος ἁπτέσθωσαν οἱ βστυ, γυφχ, κατὰ τὰ β, καὶ γ, σημεῖα, τὰς δὲ λοιπὰς τεμνέτωσαν οἱ αὐτοὶ κατὰ τὰ ψ, ω. 2, 3. 4, υ. υ, 5. σ, 6. 7, χ. Λέγω, ὅτι τά τε ψβω, 2γ3, 4βυ, υγ5, σβ7, 6γχ, τόξα τμημάτων μεγίστων κύκλων βστυ, γυφχ, τὰ ὑπὸ τμημάτων παραλλήλων περιεχόμενα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί, καὶ τὰ 4ψ, ωυ, υ2, 35, σ4, υ6, 7υ, 5χ, τὰ μεταξὺ τμημάτων παραλλήλων ἐναπολαμβανόμενα ὁμοίως ἴσα ἐστίν. ἔτι δὲ καὶ τὰ ψζω, 2η3, 4λυ, υμ5, σο7, 6πχ, τόξα τῶν παραλλήλων ἴσα καὶ αὐτὰ ἀλλήλοις εἰσί, καὶ πάντων αὖθις τὰ μὲν 4λυ, υμ5, ὅμοιά εἰσι τῷ βγ, αἰεί τινος προσθήκης, ἢ ἀφαιρέσεως, τὰ δὲ σο7, 6πχ, μετ' ἀφαιρέσεως τῷ 6, 7, καὶ τὰ ψζω, 2η3, μετὰ προσθήκης τῷ ω2,

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 13.



ὅμοιά εἰσι τῷ αὐτῷ βγ, τόξῳ, τῷ μεταξὺ τῶν β, καὶ γ, ἀφῶν. Διήχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, πόλων τῶν ῥηθέντων παραλλήλων, καὶ β, γ, ἀφῶν μέγιστοι κύκλοι οἱ ρΑτ, ξΑφ. καὶ ἐπεὶ οἱ αβγδ, βστ7, κύκλοι ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ β, καὶ ὁ ρΑτ, μέγιστος διὰ τῶν Α, πόλων τῶν αβγδ, διέρχεται κύκλων, καὶ τῆς β, ἀφῆς, παντως γε κατὰ τλω δ': τῶν παράλληλος ὁ ρΑτ, διέρχεται καὶ διὰ τῶν πόλων τοῦ βστ7, ὥστε κατὰ τλω ιβ': τῶν ά: τῶν παραλλήλων δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει, τὸ ἄρα βτ, τμῆμα ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ τῶν βστ7, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ τῶν Αβ, β↓, ὑποτεινουσῶν ἐπιζευχθεισῶν, ἔτι δὲ καὶ τῆς Α↓, ἡ ὑπὸ Αβ↓, γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ Αγ3, ὀρθή. εἰσὶ δὲ καὶ τὸν ε: ὅρον τῶν αὐτῶν καὶ αἱ βΑ, Α↓, ἴσαι ταῖς γΑ, Α3, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ἄρα κατὰ τὸ προειρημένον λῆμμα ἡ β↓, ὑποτείνουσα ἴση ἐστὶ τῇ γ3, ὥστε καὶ αἱ β↓, γ3, περιφέρειαι ἴσαι εἰσὶ κατὰ τλω κθ': τῶν γ': τῶν στοιχειωτῶν, ἀλλ' ἑκάτερον τῶν ↓βω, 2γ3, τμημάτων δίχα τέμνεται, ἄρα καὶ τὰ ↓βω, 2γ3, ὡς διπλάσια τῶν β↓, γ3, ἴσα ἐστὶ καὶ τὸ β': ἀξίωμα τῶν στοιχ: τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται ἴσα καὶ τὰ 4βυ, υγ5, καὶ σβ7, 6γχ. ἐπεὶ οὖν δέδεικται τά τε ↓β, βω, καὶ 4β, βυ, ἴσα, παντως γε ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῶν ἴσων 4β, βυ, τὰ ἴσα ↓β, βω, ἐναπολειφθήσεται τὰ 4↓, ωυ, ἴσα καὶ τὸ γ': ἀξίωμα. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται ἔτι ἴσα καὶ τὰ σ4, υ7, καὶ υ2, 35, καὶ 6υ, 5χ. Λοιπὸν ἐπεὶ τὰ ↓βω, 2γ3, ἴσά εἰσιν, ὡς δέδεικται, παντως γε καὶ τλω ῥηθεῖσαν κδ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ αἱ ↓ω, 23, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσὶν, ὥστε καὶ τλω κή: τῶν αὐτῶν, καὶ αἱ ↓ζω, 2ν3, περιφέρειαι ἴσαι εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ 4λυ, υμ5, καὶ σο7, 6πχ, ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἦν τὸ δ': Τελευταῖον ἐπεὶ τὰ 4λυ, υμ5, ἴσά ἐστι, καὶ τῶν μὲν 4λυ, ἥμισύ ἐστι τὸ 4λ, τῶν δὲ υμ5, τὸ υμ, καὶ τλω ή: τῶν παραλλήλων, ἄρα τὸ 4λ, ἴσόν ἐστι τῷ υμ. κοινοῦ προσκειμένου τοῦ λυ, δῆλον, ὅτι τὸ 4λυ, ἴσόν ἐστι τῷ λυμ, ἀλλὰ τὸ λυμ, ὅμοιόν ἐστι τῷ αὐτῷ βγ, αὐδ τινος προσθήκης, ἢ ἀφαιρέσεως. ὁμοίως δὲ πάλιν, ἐπεὶ τὸ σο7, ἴσον ἐστὶ τῷ 6πχ, ὡς δέδεικται, καὶ τῶν μὲν ἡμισύ ἐστι τὸ σο, κατὰ τλω ῥηθεῖσαν ή: τῶν δὲ τὸ 6π, κοινοῦ προσκειμένου τοῦ ο6, παντως γε τὰ σο6, ο6π, ἴσά ἐστιν, ἀλλὰ τὸ ο6π, ὅμοιόν ἐστι τῷ βγ, ἄρα καὶ τὸ σο6, ὅμοιόν ἐστι τῷ βγ. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ τὸ 7πχ, ὅμοιον τῷ βγ. ἄρα τὰ σο7, 6πχ, τόξα τὰ διὰ τῶν, καθ' ἃ τέμνονται οἱ μέγιστοι κύκλοι, μερῶν διερχόμενα τόξα ὅμοιά ἐστι τῷ μεταξὺ τῶν τομῶν μὴ ἀφαιρέσεως τοῦ υ7. Τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ τὰ ↓ζω, 2ν3, ὅμοια εἶναι τῷ βγ, μὴ προσθήκης τοῦ ω2. δειχθήσεται γὰρ ὡς πρότερον τὸ ↓ζ, ἴσον τῷ 2ν. κοινοῦ δὲ λαμβανομένου τοῦ ζω, ἔσαι τὸ ↓ζ2, ἴσον τῷ ζ2ν, ἀλλὰ τὸ ζ2ν, ὅμοιόν ἐστι τῷ βγ, κατὰ τλω ῥηθεῖσαν θ': τῶν παραλλήλων. ἄρα καὶ τὸ ↓ζ2, ἢ τὸ ↓ζω, μὴ προσθήκης τοῦ ω2, ὅμοιόν ἐστι τῷ βγ, τῷ μεταξὺ τῶν ἀφῶν. ὡσαύτως δὴ καὶ τὸ ωκ3. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

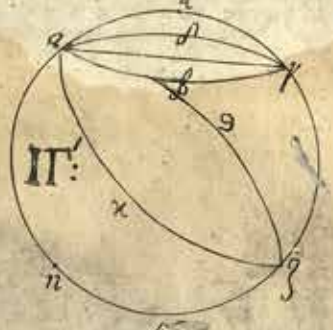
Πρό-

Πρότασις ΙΓ'. Πρόβλημα.

Κύκλῳ ἐλάσσονος ἐν σφαίρᾳ δοθέντος κύκλον μέγιστον καταγράψαι ἀπτόμενον τοῦ ἐλάσσονος κατὰ τὸ δοθὲν σημεῖον.

Δοθήτω ἐλάσσων κύκλος ὁ α β γ δ, καὶ ζητηθήτω καταγραφῆναι μέγιστος κύκλος ἁπτόμενος τοῦ α β γ δ, κατὰ τὸ α, σημεῖον. Εὑρεθήτω δὴ κατὰ τὸ ιζ'. τοῦ παρόντος ὁ πόλος τοῦ δοθέντος α β γ δ, ἐλάσσονος κύκλου, καὶ ἔστω ὅτος ὁ ε, καὶ διὰ τοῦ ε, καὶ α, σημείων γεγράφθω μέγιστος κύκλος ὁ ε α ζ γ, κατὰ τὸ ιε'. τοῦ αὐτοῦ. εἶτα ἀφῃρήσθω τὸ α η, τεταρτημόριον τοῦ α ζ γ ε, μεγίστου κύκλου, καὶ ἀπὸ τοῦ η, ὡς ἀπὸ πόλου διαστήματι τῷ η α, γεγράφθω ὁ α θ ζ κ, κύκλος, καὶ ὅτος ἔστω ὁ ζητούμενος. Ἐπεὶ γὰρ οἱ α β γ δ, α θ ζ κ, κύκλοι συμπίπτουσι τῇ αὐτῇ α, σημείῳ τοῦ α η ζ γ, μεγίστου κύκλου διὰ τῶν πόλων ἑκατέρου διερχομένου, παύτως γε κατὰ τὸ β'. τοῦ παρόντος οἱ α β γ δ, α θ ζ κ, ἅπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ α, σημεῖον. ἀλλ' ὁ α θ ζ κ, κύκλος ἁφίσαται τοῦ η, πόλου τεταρτημορίου, ἄρα κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ ιγ'. τοῦ παρόντος μέγιστός ἐστι. κύκλῳ ἄρα ἐλάσσονος τοῦ α β γ δ, δοθέντος ἐν σφαίρᾳ, κύκλος μέγιστος καταγέγραπται ἁπτόμενος αὐτοῦ κατὰ τὸ δοθὲν α, σημεῖον ὁ α θ ζ κ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

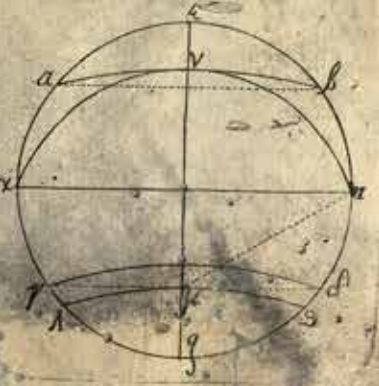
Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 14.



Πρότασις ΙΔ'. Πρόβλημα.

Δοθέντος σημείου ἐν σφαίρᾳ μεταξὺ δύο κύκλων παραλλήλων τε καὶ ἴσων, κύκλον μέγιστον διὰ τοῦ δοθέντος γράψαι σημεῖα ἁπτόμενον ἑκατέρου τῶν παραλλήλων.

Ἔστωσαν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἴσοί τε καὶ παράλληλοι οἱ α β, γ δ, ὧν πόλοι τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, καὶ δοθήτω μεταξὺ αὐτῶν σημεῖον τὸ η, καὶ ζητηθήτω καταγραφῆναι κύκλος μέγιστος διὰ τοῦ η, σημείου ἁπτόμενος ἑκατέρου τῶν α β, γ δ, κύκλων. Ἐπεὶ δὲ τὸ δοθὲν σημεῖον ἤτοι ἐξ ἴσου ἀφίσαται τῶν παραλλήλων κύκλων, ἢ τοῦ μὲν πλησιέστερον, τοῦ δὲ ἀπώτερόν ἐστι. Κείσθω δὴ ἐξ ἴσου ἀφίσθαι τὸ η, σημεῖον τοῦ τε β, καὶ δ. διὰ τοῦ ε, τινὶ πόλῳ καὶ η, δοθέντος σημείου γεγράφθω ὁ ε κ ζ η, μέγιστος κύκλος κατὰ τὸ ιε'. τοῦ παρόντος, τεμνέτω τὸν μὲν α β, παράλληλον κατὰ τὰ α, καὶ β, τὸν δὲ γ δ, κατὰ τὰ γ, καὶ δ. καὶ ἐτμήσθω τὰ β θ, η ζ, τόξα ἴσα τῷ τοῦ ε κ ζ η, κύκλου τεταρτημορίῳ, καὶ



ἀπὸ

ἀπὸ μὲν τοῦ ζ, σημείου διαστήματι τῆς ζϑ, γραφήτω παράλληλος ὁ λϑ, ἀπὸ δὲ τοῦ η, διαστήματι τῆς ηζ, γραφήτω μέγιστος ὁ ζε, τέμνων τὸν μὲν λϑ, κατὰ τὸ μ, τὸν δὲ αβ, κατὰ τὸ ν· εἶτα ἀπὸ τοῦ μ, ὡς ἀπὸ πόλου, διαστήματι τῷ μν, γραφήτω ὁ κνη, καὶ ἔστω ὁ ζητούμενος. Ἐπεὶ γὰρ τὸ βϑ, τεταρτημόριόν ἐστι, τῆς δὲ βϑ, ἴσον ἐστὶ τὸ μν, κατὰ τὸν ϑ: τοῦ παρόντος, ἄρα καὶ τὸ μν, τεταρτημόριόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ τὸ ηζ, ὁμοίως τεταρτημόριόν ἐστι, τῆς δὲ ηζ, ἴσόν ἐστι τῇ νμ, κατὰ τὸν ε: ὅρον τοῦ α: τοῦ παρόντος, ἄρα τὸ μν, διάστημα ἴσόν ἐστι τῇ μη. ὁ ἄρα γραφόμενος κύκλος τῷ μν, διαστήματι διέρχεται καὶ διὰ τοῦ η, οἷος ὁ κνη, ἅπτεται δὲ ὁ κνη, κύκλος τοῦ αβ, παραλλήλου, ἅπτεται ἄρα ὁ αὐτὸς καὶ τοῦ γδ, κατὰ τὸν ς: τοῦ παρόντος, διέρχεται δὲ καὶ διὰ τοῦ δοθέντος η, σημείου, ὡς δέδεικται, δοθέντος ἄρα σημείου ἐν σφαίρᾳ μεταξὺ δύο κύκλων παραλλήλων τε καὶ ἴσων, κύκλος μέγιστος διὰ τοῦ δοθέντος γέγραπται σημείου, ἁπτόμενος ἑκατέρου τῶν παραλλήλων.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ δοθὲν η, σημεῖον ἐξ ἴσου ἀφεστάμενον τῶν β, δ. τότε δὴ πάλιν γεγράφθω διὰ τοῦ ε, πόλου, καὶ η, σημείου μέγιστος κύκλος ὁ εαγδβ, κατὰ τὸν ρηθέισαν ις: τοῦ παρόντος, καὶ ἔστωσαν τὰ βϑ, ηκ, τόξα ἴσα τεταρτημορίῳ ἑκάτερον, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ ζ, πόλου διαστήματι τῷ ζϑ, γραφήτω ὁ ϑλι, παράλληλος, ἀπὸ δὲ τοῦ η, διαστήματι τῷ ηκ, γραφήτω ὁ κλα, κύκλος τέμνων τὸν ϑι, παράλληλον κατὰ τὸ λ. διὰ δὲ τοῦ ζ, καὶ λ, διήχθω ὁ ζλε, μέγιστος, τέμνων τὸν αβ, παράλληλον κατὰ τὸ μ. εἶτα ἀπὸ τοῦ λ, διαστήματι τῷ λμ, γραφήτω ὁ νμη, καὶ ἔστω ὁ ζητούμενος. ἐπεὶ γὰρ τὸ βϑ, τεταρτημόριόν ἐστι, πάντως γε καὶ τὸ μλ, ὁμοίως τεταρτημόριόν ἐστιν, ἴσα γὰρ κατὰ τὸν ϑ: τοῦ παρόντος, ὥσπερ καὶ τὸ αι, ἀλλὰ καὶ τὸ ηλ, τεταρτημόριόν ἐστι, γέγραπται γὰρ ὁ κλ, τῷ ηκ, διαστήματι τεταρτημορίῳ ὄντι κατασκόλιῳ, ἄρα ὁ κεῖθεν μὲν τοῦ λ, διαστήματι δὲ τοῦ λν, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ η, ὅπερ δ' ἐστὶν ὁ νμ, ἄρα ὁ νμ, διέρχεται καὶ διὰ τοῦ η, δοθέντος σημείου. ἀλλ' ὁ νμη, ἅπτεται τοῦ αβ, κατασκόλιου, ἅπτεται ἄρα ὁ αὐτὸς καὶ τοῦ γδ, κατὰ τὸν ρηθέισαν ς: τοῦ παρόντος, διέρχεται δὲ καὶ διὰ τοῦ η, ὡς δέδεικται, γέγονεν ἄρα ὁ προταχθείς.

Ὅτι δὲ ὁ κλν, μέγιστος κύκλος τέμνει τὸν ϑι, δῆλον· τὸ γὰρ βϑ, τεταρτημόριόν ἐστιν, ὥστε τὸ βκ, μεῖζόν ἐστι τεταρτημορίου, ἀπώτερον ἄρα ἐστὶ τὸ κ, τοῦ ϑ, διέρχεται δὲ ὁ μὲν ϑι, διὰ τοῦ ϑ, ὁ δὲ κλν, διὰ τοῦ κ, καὶ τοῦ μὲν ϑι, πόλος ἐστὶ τὸ ε, σημεῖον, ὅπερ καὶ τοῦ αβ, καὶ γδ, τοῦ δὲ κλν, τὸ η, ὁ κλν, ἄρα οὔτε παράλληλός ἐστι τῷ ϑι, ὡς μὴ ἔχων τὸν αὐτὸν πόλον, οὔτε

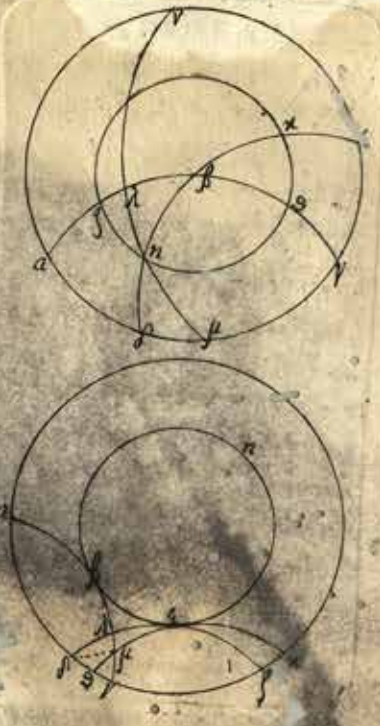
τὸ μὲν ἅπτεται αὐτοῦ, ὡς ἀφισαμένων τῷ θ, καὶ κ, σημείων ἀλλήλων, τέμνει ἄρα αὐτόν.

Πρότασις ΙΕ΄. Θεώρημα.

Δύο μέγιστοι ἐν σφαίρᾳ κύκλοι, ἐαν ὅμοια τόξα παραλλήλων κύκλων ἐναπολαμβάνωσιν, ἢ ἄμφω διὰ τῶν πόλων διέρχονται τῶν παραλλήλων, ἢ τῶν αὐτῶν ἑκάτερος ἅπτεται, ἢ γοῦν τὼς παραλλήλους ἑκάτερος τέμνει.

Κύκλοι μέγιστοι οἱ αβγ, δβε, ἀπολαμβανέτωσαν ὅμοια τόξα τῶν αδγε, ζκθκ, παραλλήλων τὰ αδ, ζη. καὶ κείσθω τὸν αβγ, κύκλον διὰ τῶν πόλων τῶν αδγε, ζηθκ, διέρχεσθαι παραλλήλων. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ δβε, διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν διέρχεται, τουτέστι τὸ β, σημεῖον, καθ' ὃ οἱ αβγ, δβε, τέμνονται κύκλοι, πόλος ἐστὶ τῶν αδγε, ζηθκ, παραλλήλων. εἰ γὰρ μή, ἔστω πόλος τῶν αὐτῶν τὸ λ, σημεῖον, καὶ διὰ τῶν η, καὶ λ, γεγράφθω κύκλος ὁ μηλν, καπὲ τιὼ ις΄. τῶ α΄. τῶ παρόντος, καὶ ἐπεὶ οἱ αβγ, μλν, μέγιστοι κύκλοι διὰ τῶν πόλων τῶν αδγε, ζηθκ, παραλλήλων διέρχονται, πάντως γε καπὲ τιὼ θ΄. τῶ παρόντος ὅμοια τόξα ἐναπολαμβάνουσιν, ἄρα τὰ αμ, ζη, ὅμοιά εἰσι, καπὲ τιὼ αὐτιώ· ἀλλὰ καπὲ τιὼ ὑπόθεσιν ὅμοιά εἰσι καὶ τὰ αδ, ζη, ἄρα καὶ τὰ αμ, αδ, ὅμοιά εἰσιν, ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα τὸ λ, σημεῖον πόλος ἐστὶ τῶν ῥηθέντων παραλλήλων, ἀλλ' οὐδὲ ἄλλο τι, τὸ αὐτὸ γὰρ εὑρεθήσεται ἄτοπον· τὸ β, ἄρα πόλος ἐστὶ τῶν αὐτῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. x. Fig. 16.

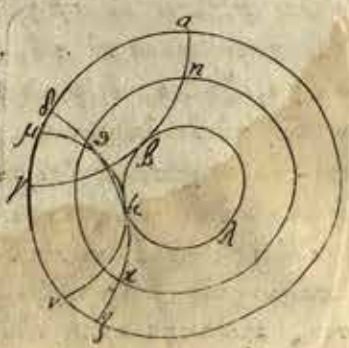


Ἀπολαμβανέτωσαν αὖθις οἱ αβγ, δεζ, μέγιστοι κύκλοι ὅμοια τόξα τῶν αγζ, βεη, παραλλήλων τὰ αδ, βε· καὶ κείσθω τὸν αβγ, ἅπτεσθαι τῶ βεη, κατὰ τὸ β, σημεῖον. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ δεζ, ἅπτεται τοῦ αὐτοῦ κατὰ τὸ ε, εἰ γὰρ μή, ἁπτέσθω τοῦ βεη, κατὰ τὸ ε, ὁ θεκ, καὶ ἐπεὶ οἱ ζεδ, θεκ, μέγιστοί εἰσι, καὶ τέμνονται ἀλλήλοις κατὰ τὸ ε, πάντως γε ὁ θεκ, οὐ διέρχεται διὰ τῶ δ. εἰ γὰρ δυνατὸν, διελθέτω, ὡς ὁ δμεκ· κατὰ τιὼ ι΄. ἄρα τοῦ παρόντος τὰ δλε, δμε, τόξα ἡμικύκλια αὖ εἴησαν. ἀλλὰ τὸ δε, ἴσον ἐστὶ τῷ αβ, διὰ τὸ ἴσα εἶναι τὰ αβγ, δεζ, τόξα κατὰ τιὼ ιβ΄. τῶ παρόντος, ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν αβ, βγ, ἡμικυκλίου ἐστὶ, καὶ τὸ αβγ, τόξον κύκλος, ὅπερ ἀδυνατον, ἄρα θεκ, οὐ διέρχεται διὰ

τῶ

τῷ δ. ἐπεὶ δὲ ἅπτεται τὸ βεη, κατὰ τὸ ε, ἅπτεται δὲ τὸ αὐτὸ καὶ ὁ αβγ, κατὰ τὸ β, ἄρα κατὰ τλὼ ῥηθεῖσαν ιβ'. τὰ αϑ, βε, τόξα ὅμοιά εἰσιν, ἀλλὰ καὶ τὰ αδ, βε, ὅμοιά εἰσι κατὰ τλὼ ὑπόϑεσιν, ἄρα τὰ αδ, αϑ, ὅμοιά εἰσιν, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ϑεκ, ἅπτεται τῷ βεη, οὐδ' ἄλλος τις παρὰ τὸν δεζ. ἄρα ὁ δεζ, ἅπτεται τῷ βεη, καὶ τὸ ε, ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ β'.

Ἀπολαμβανέσθω πελάτειον οἱ αβγ, δεζ, μέγιστοι κύκλοι ὅμοια τόξα τὰ αγζ, ηϑκ, παραλλήλων τὰ αδ, ηϑ. καὶ κείσθω τὸν αβγ, πέμπειν τὸν ηϑκ. Λέγω, ὅτι καὶ ὁ δεζ, πέμπει τὸν αὐτὸν ηϑκ. Ἐπεὶ γὰρ ὁ αβγ, πλαγίως πέμπει τὸν ηϑκ, οὐ γὰρ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διέρχεται, πάντως γε καὶ τλὼ ζ'. τοῦ παρόντος, ἅπτεται δύο κύκλων ἴσων τε ἀλλήλοις καὶ παραλλήλων τῷ πεμπομένῳ, ἁπτέσθω δὴ τοῦ βελ, καὶ τὸ β, διὰ δὲ τοῦ ϑ, σημείου γεγράφθω κύκλος μέγιστος ἀπτόμενος τοῦ βελ, καὶ τλὼ ιδ'. τὸ παρόντος, καὶ πάντως γε συμπεσεῖται τῷ δεζ. εἰ γὰρ μή, ἔσω ἔσται ὁ μϑεν. καὶ ἐπεὶ οἱ αβγ, μϑεν, μέγιστοι κύκλοι ἅπτονται τοῦ βελ, παραλλήλου, τὰς δὲ λοιπὰς ηϑκ, αγζ, πέμπουσι, πάντως γε κατὰ τλὼ ιβ'. τὸ παρόντος τὰ αμ, ηϑ, τόξα ὅμοιά εἰσιν, ἀλλὰ καὶ τὰ αδ, ηϑ, ὅμοιά εἰσι καὶ τλὼ ὑπόϑεσιν, ἄρα τὰ αδ, αμ, ὅμοιά ἐστι τὸ μέρος τῷ ὅλῳ, ὅπερ ἄτοπον, ὁ ἀπτόμενος ἄρα τοῦ βελ, παραλλήλου μέγιστος κύκλος, καὶ διὰ τοῦ ϑ, διερχόμενος συμπίπτει τῷ δεζ. ὥστε ὁ δεζ, ἅπτεται τοῦ βελ, κύκλου. καὶ ἐπεὶ ἅπτεται τοῦ ἐλάσσονος τῶν παραλλήλων κύκλων, πάντως γε πέμπει τοὺς λοιπούς, πέμπει ἄρα τὸν ηϑκ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ γ'.



Theod: Sf: Lib. 2. Fig. 17.

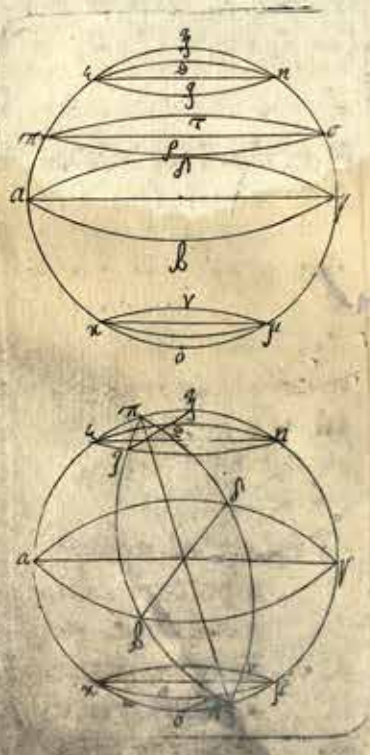
Πρότασις Ις': Θεώρημα.

Τῶν ἐν σφαίρᾳ παραλλήλως κειμένων κύκλων μεγίστῳ τινὶ ὧν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλῳ, οἱ ἐξ ἴσου τοῦ μεγίστου ἀφιστάμενοι κύκλοι, καὶ ὧν μεταξὺ καὶ τοῦ μεγίστου τὰ τόξα ἴσα ἐστὶν, ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶν, ὁ δὲ ἐλάττονι ἀφιστάμενος, καὶ ὃ μεταξὺ ἔχει τοῦ μεγίστου ἔλαττον ἐμπεριλαμβάνεται τόξον, μείζων ἐστὶν, ὃ δὲ μεταξὺ μείζονα ἐμπεριλαμβάνεται τόξον, ἐλάττων ἐστίν.

Ἔστω ἐν σφαίρᾳ κύκλος μέγιστος ὁ αβγδ, καὶ τούτῳ παράλληλοι οἱ εζηϑ, κλμν, ἐξ ἴσου ἑκάτερος τοῦ αβγδ, ἀφεστάμενος, ἤτοι ἔστωσαν τὰ αε, ακ, τόξα, καὶ γη, γμ, ἴσα. Λέγω τοὺς εζηϑ, κλμν, παραλλήλους κύκλους, ἴσους ἀλλήλοις εἶναι. Γεγράφθω κύκλος μέγιστος πέμπων τοὺς αβγδ, εζηϑ, κλμν, κύκλους. καὶ ἐπεὶ ὁ αὐτὸς κύκλος ἤτοι διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν παραλλήλων διελεύσεται

σεται κύκλων, ἢ μὴ διὰ τῶν πόλων. Κείσθω ἀ: διέρχεσθαι διὰ τῶν ξ, καὶ ο, πόλων, ὡς ὁ ξ α ο γ. καὶ ἐπεὶ μέγιστος κύκλος ὁ ξ α ο γ, διὰ τῶν πόλων διέρχεται τῶν ε ζ η θ, α β γ δ, κ λ μ ν, παντως γε καὶ τὰ ιβ': τὰ ἀ: τὰ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὰς τέμνει, αἱ ἄρα ε η, α γ, κ μ, κοιναὶ τομαὶ τῶν παραλλήλων καὶ μεγίστου τοῦ ξ α ο γ, κύκλου διάμετροί εἰσι τῶν ε ζ η θ, α β γ δ, κ λ μ ν, παραλλήλων κύκλων. Λύθις ἐπεὶ οἱ α γ β δ, ξ α ο γ, κύκλοι μέγιστοί εἰσι, παντως γε καὶ τὰ ι': τοῦ ἀ: τὰ παρόντος δίχα ἀλλήλοις τέμνονται. ἴσον ἄρα τὸ α ξ γ, τῷ α ο γ, ἀλλὰ καὶ τὸ α ε, τῷ α κ, ἴσόν ἐστιν, ὥσπερ καὶ τὸ γ η, τῷ γ μ, καὶ τὰ ὑπόθεσιν, ἄρα καὶ τὰ ε ξ η, κ ο μ, τόξα ἴσά ἐστιν, ὥστε κατὰ τὰ κθ': τὰ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ, αἱ ε η, κ μ, ἴσαί εἰσιν, ἀλλ' αἱ ε η, κ μ, διάμετροί εἰσι τῶν ε ζ η θ, κ λ μ ν, ὡς δέδεικται, κύκλων, ἄρα οἱ ε ζ η θ, κ λ μ ν, κύκλοι ἴσοί εἰσιν.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 18.



Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ α π, τόξον ἔλαττον τοῦ α κ. Λέγω, ὅτι ὁ π ρ σ τ, κύκλος μείζων ἐστὶ τοῦ κ λ μ ν. τοῦ γὰρ ξ α ο γ, μεγίστου κύκλου, ὡς εἴρηται, γεγραμμένου, οἱ π ρ σ τ, α β γ δ, κ λ μ ν, κύκλοι δίχα τμηθήσονται, ὥστε αἱ π σ, α γ, κ μ, διάμετροί εἰσι τῶν π ρ σ τ, α β γ δ, κ λ μ ν, κύκλων. καὶ ἐπεὶ τὸ α ξ γ, α ο γ, τόξα ἴσά εἰσιν, ὡς δέδεικται, παντως γε ἀφαιρεμένων τῶν α π, α κ, καὶ γ σ, γ μ, ἀνίσων τόξων, ὑπολείπεται τὸ π ξ σ, μεῖζον τοῦ κ ο μ, καὶ κατὰ τὰ ῥηθεῖσαν κθ': τοῦ γ': ἡ π σ, μείζων ἐστὶ τῆς κ μ. ἀλλ' ἡ μὲν π σ, διάμετρός ἐστι τοῦ π ρ σ τ, ἡ δὲ κ μ, τοῦ κ λ μ ν, κύκλου, ἄρα ὁ π ρ σ τ, μείζων ἐστὶ τοῦ κ λ μ ν, ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ β':

Κείσθω δ' ἔτι τὸν π β ρ δ, γραφόμενον κύκλον, τὸν τοὺς α β γ δ, ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλους τέμνοντα μὴ διὰ τῶν πόλων ξ, ο, αὐτῶν διέρχεσθαι. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ β ζ, β λ, δ θ, δ ν, τόξα τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων καὶ τοῦ μεγίστου α β γ δ, κύκλου ἴσα. Λέγω καὶ ὅτι τοὺς ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλους ἴσους εἶναι. Γεγράφθω γὰρ διὰ τῶν πόλων τῶν ε ζ η θ, κ λ μ ν, παραλλήλων, καὶ τοῦ β π δ ρ, ὁ ξ α ο γ, τὰ πρὸ ις': τοῦ ἀ: τοῦ παρόντος, καὶ ἐπεὶ ὁ ξ α ο γ, [illegible] πόλων τῶν τε παραλλήλων καὶ τοῦ π β ρ δ, διέρχεται, παντως γε δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὰς τέμνει, ἄρα ὁ ξ α ο γ, ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν β π δ ρ, καὶ τὰ π α ρ, π γ ρ, τόξα ὅμοια ἐπὶ τὰς π ρ, ἐφίσταται διαμέτρου, κατὰ δὲ τὸ ἀ: πόρισμα τῆς ιβ': τοῦ ἀ: τοῦ παρόντος, καὶ οἱ π β ρ δ, α β γ δ, διὰ τῶν πόλων τοῦ ξ α ο γ, διέρχονται. ἔστι δὲ τὸ β, σημεῖον κοινὸν, καθ' ὃ τέμνονται οἱ β γ δ ε, π β ρ δ, μέγιστοι κύκλοι, ἄρα τὸ β,

πόλος ἐστὶ τοῦ ξαογ, ὥστε καὶ βπ, βρ, τόξα ἴσα ἐστίν, ἀφαιρεμένων δὲ τῶν βζ, βλ, ἴσων, ἐναπολείπονται δίπηχυν τὰ ζπ, λρ, ἴσα. Αὖθις ἐπεὶ οἱ μέγιστοι κύκλοι δίχα τέμνονται ὑπὸ τοῦ ι: τοῦ α: παρόντος, τὸ πγρ, ἡμικύκλιόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ τὸ ξγο, ἡμικύκλιόν ἐστιν, ἄρα καὶ τὸ πγρ, ξγο, ἴσά ἐστιν, κοινοῦ γὰρ ἀφαιρεμένου τοῦ ξγρ, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ ξπ, ορ. δέδεικται δὲ ὅτι ἐπὶ τῆς πρ, διαμέτρου ἐφίσταται ὅμοια τόξα τὰ παρ, πγρ, ὀρθὰ ὄντα πρὸς τὸ τοῦ πβρδ, κύκλου ἐπίπεδον, καὶ ἀφῃρέθησαν ἴσα τόξα ἀπὸ μὲν τοῦ πβρδ, κύκλου τὰ ζπ, λρ, ἀπὸ δὲ τῶν παρ, πγρ, τόξων τὰ πξ, ορ, ἄρα καὶ τῶν ι: τοῦ παρόντος, τὰ ξζ, ολ, διαστήματα ἴσά ἐστιν, ἀλλὰ τὰ ξ, καὶ ο, σημεῖα πόλοι εἰσὶ τῶν εζηϑ, κλμν, παραλλήλων κύκλων, ἄρα καὶ τὸν ε: ὅρον τοῦ α: τοῦ παρόντος οἱ εζηϑ, κλμν, κύκλοι ἴσοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐὰν δὲ τὸ βζ, ἔλαττον εἴη τοῦ βλ, παντὸς γε τὸ ζπ, μεῖζον ἔσται τοῦ λρ, καὶ ἔτι τὸ ζξ, διάστημα τοῦ ολ, ὁ δὲ μεῖζον ἀφισάμενος τοῦ πόλου μείζων ἐστὶ, μείζων ἄρα καὶ ὁ εζηϑ, τοῦ κλμν.

Πρότασις ΙΖ': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσι ἴσοι κύκλοι παράλληλοι μεγίστῳ τινὶ ἀμ σφαίρᾳ κύκλῳ, τὰ τοῦ μεγίστου κύκλου τόξα τὰ μεταξὺ αὐτῶν τε καὶ τοῦ, πρὸς ὃν παραλλήλως ἔχουσι, μεγίστου κύκλου ἀμπολαμβανόμενα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἐχέτωσαν δὴ ἐπὶ τῆς αὐτῆς χηνάτων παράλληλοι οἱ εζηϑ, κλμν, κύκλοι περὶ τὴν αβγδ, μεγίστῳ κύκλῳ, καὶ κείσθω τὸν ξαογ, μέγιστον κύκλον τέμνειν τοὺς εζηϑ, κλμν, παραλλήλους. Λέγω ὅτι αε, ακ, καὶ γη, γμ, ἐναπολαμβανόμενα τόξα μεταξὺ αὐτῶν τε καὶ τοῦ αβγδ, μεγίστου κύκλου ἴσα ἐστίν. εἰ γὰρ μή, ἔστω τὸ αε, φερὲ εἰπεῖν ἔλαττον τοῦ ακ, καὶ κεῖσθω αὐτέρω ὁ εζηϑ, κύκλος μείζων ἂν εἴη τοῦ κλμν, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσεως.

Πρότασις ΙΗ': Θεώρημα.

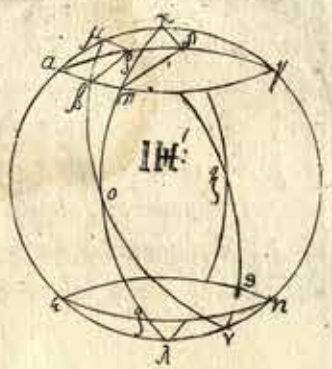
Ἐὰν κύκλος μέγιστος ἀμ σφαίρᾳ ἐλάσσονάς τε καὶ παραλλήλους τέμνῃ κύκλους μὴ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν διερχόμενος, ὃ τέμνει αὐτοὺς δίχα, καὶ τὰ τῶν παραλλήλων μείζονα τμήματα πρὸς τὸν ἐγγύτερον ἀφορῶσι πόλον.

Ἐχέτωσαν κύκλοι παράλ[illegible] οἱ αμγδ, εζηϑ, ὧν πόλοι τὰ κ, καὶ λ, σημεῖα, καὶ τεμνέτω αὐτοὺς ὁ μβνξ, μὴ διερχόμενος διὰ τῶν κ, καὶ λ, πόλων. Λέγω ὅτι μβνξ, μὴ δίχα τέμνει τοὺς αβγδ, εζηϑ, παραλλήλους. Γεγράφθω γὰρ διὰ τῶν κ, καὶ λ, πόλων ὁ κολξ, μέγιστος, καὶ ἐπεὶ ὁ κολξ, διὰ τῶν πόλων τῶν αβγδ, εζηϑ, διέρχεται κύκλων, παντὸς γε καὶ τοῦ ι β': τοῦ α: τοῦ παρόντος

δίχα

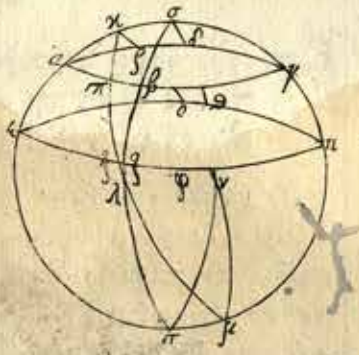
δίχα αὐτὰς τέμνει, ὥστε τὸ πγδ, τόξον ἡμικυκλιόν ἐστιν, ἄρα τὸ βγρ, μεῖζόν ἐστιν ἡμικυκλίου, τὸ δὲ βαρ, ἔλαττον, ἀλλ' ὁ αβγδ, τέμνεται ὑπὸ τοῦ μβνξ, μείζονα κύκλον κατὰ τὰ β, κ ρ, ἄρα ὁ μβνξ, μέγιστος κύκλος μὴ διερχόμενος διὰ τῶν πόλων τοῦ αβγδ, οὐ τέμνει αὐτὸν δίχα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὅτι δὲ καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸν ἐγγύτερον ἀφορᾷ πόλον, δῆλον, τὸ γὰρ βγρ, τμῆμα μεῖζον ὂν πρὸς τὸν κ, ἀφορᾷ πόλον. τὸν αὐτὸν τρόπον δειχθήσεται καὶ τὸ ἐπὶ τὸν ἐζηθ, δίχα τέμνειν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 19.



Πρότασις ΙΘ΄. Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλοι παράλληλοί τε καὶ ἐλάσσονες ἐν σφαίρᾳ ὑπὸ μείζονος τέμνωνται κύκλου, μὴ διὰ τοῦ πόλου αὐτοῦ διερχομένου, ὁ ἐγγύτερος τοῦ πόλου μᾶλλον ἀφίσως τέμνεται.



Ἔστωσαν κύκλοι παράλληλοί τε καὶ ἐλάσσονες οἱ αβγδ, εζηθ, καὶ τεμνέτω ἑκάτερον αὐτῶν ὁ κλμν, μέγιστος κύκλος κατὰ τὰ ξο, πρ, μὴ διερχόμενος διὰ τῶν σ, τ, πόλων τῶν αὐτῶν. Λέγω, ὅτι ὁ αβγδ, ἐγγύτερος ὢν τοῦ σ, πόλου μᾶλλον ἀφίσως ὑπὸ τοῦ κλμν, τέμνεται κύκλου, ἢ ὁ εζηθ. Ὑποκείσθω γὰρ τὸν σλτν, μέγιστον κύκλον διὰ τῶν σ, καὶ τ, διέρχεσθαι πόλων· καὶ ἐπεὶ ὁ σλτν, μέγιστος κύκλος διὰ τῶν πόλων τῶν αβγδ, εζηθ, παραλλήλων διέρχεται, δῆλον, ὅτι τὸ μὲν ζη, τόξον ὅμοιόν ἐστι τῷ βγ, καὶ τὸ ηθ, τῷ γδ, καὶ τιῶ θ΄; τῷ παρόντος. ὥστε ὅλον τὸ ζηθ, ὅλῳ τῷ βγδ, ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ξηο, οὐκ ἔστιν ὅμοιον τῷ πγρ, ἄλλως γὰρ ὁ κλμν, διὰ τῶν πόλων τῶν αβγδ, εζηθ, παραλλήλων διήρχετο, ὅπερ αὐτίκειται τῇ ὑποθέσει. ἀλλὰ τὸ ξ, τῷ ζ, καὶ τὸ ο, τῷ θ, ἔλαττον ἀφίσανται π, τῷ β, καὶ τὸ ρ, τῷ δ, ὡς δειχθήσεται, ἄρα ξηο, ἐλάττονα λόγον ἔχει πρὸς τὸ ξεο, ὡς ἔλαττον αὐτῷ προσλαμβάνον μέρος, ἤπερ τὸ πγρ, πρὸς τὸ παρ, τὸ ἄρα πγρ, ὡς μείζονα λόγον ἔχον πρὸς τὸ παρ, μείζονα αὐτῷ ὑπεροχὴν ὑπερέχει, ἢ τὸ ξηο, τῷ ξεα, καὶ ἐπομένως μᾶλλον ἀφίσως τέμνεται ὑπὸ τοῦ κλμν, μείζονα κύκλου, ὅπερ ὡς τὸ ὑποκείσθαι. Ὅτι δὲ τὸ ξ, τῷ ζ,

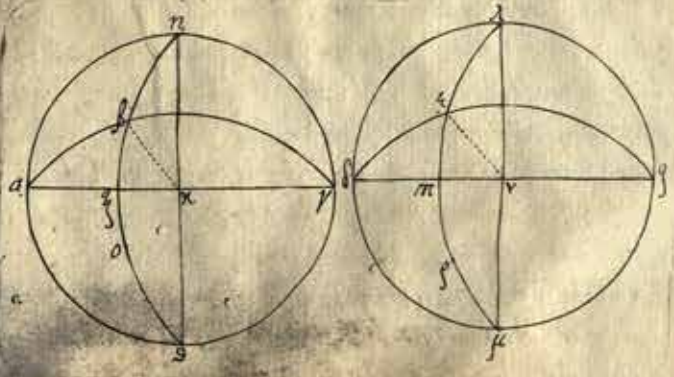
τῆ ζ, ἔλαττον ἀφίσαται, ἥπερ τὸ π, τῆ β, δῆλον. Γραφήτωσαν γὰρ ἀπὸ τῆ φ, πόλε τῆ σ κ τ μ, μεγίστε κύκλε οἱ α γ δ β, ε η θ ζ, παράλληλοι κύκλοι, καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν κ λ μ ν, σ λ τ ν, διὰ τῶν πόλων τῶν σ κ τ μ, α γ δ β, ε η θ ζ, διέρχεται, πανόπως γε καὶ τῷ ῥηθέντων θ': τῆ παρόντος τὰ ε ζ, α β, κ σ, τόξα ὅμοιά εἰσιν. ὥστε ὁ μέρος τὸ ε ζ, τῆ ε η θ ζ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τὸ α β, τῆ α γ δ β, καὶ τὸ κ σ, τῆ κ τ μ σ, μείζων δὲ ὁ κ τ μ σ, τῆ α γ δ β, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ κ σ, ὁμολόγον μέρος τῆ α β, καὶ τὸ α β, ὁμοίως τῆ ε ζ, μεῖζόν ἐστιν. ὥστε τῶν πλαγίως τεμνομένων κύκλων τὰ μὲν προσεγγίζοντα τῇ τομῇ μέρη, ἔλαττον ἀφίσανται, τὰ δὲ ἀπώτερον ὄντα, μεῖζον, καὶ μέγιστον μένει τὸ τεταρμοζίῳ ἀφισάμενον, ὡς τὸ κ σ· τεταρτημοζίῳ γὰρ τὰ κ, σ, τῶν λ, καὶ ν, ἀφίσανται, καθ' ἃ οἱ κύκλοι τέμνονται, μεῖζον δὲ τὸ μᾶλλον ἀφισάμενον. ἀλλὰ τό, τε ξ, καὶ ζ, ἔλαττον τῆ λ, ἀφίσανται, ἥπερ τὸ π, καὶ β, μεῖζον ἄρα τὸ π, τῆ β, ἥπερ τὸ ξ, τοῦ ζ, ἀφίσαται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ λειπόμενον.

Πρότασις Κ': Θεώρημα.

Ἐπὶ τῶν ἴσων σφαιρῶν κύκλος κύκλῳ μᾶλλον ἐγκλινόμενος ἐστιν, ὃ ὁ πόλος ἔλαττον ἀφίσταται τῆ πόλε τῆ, ᾧ ἐγκλίνεται, κύκλε, ὧν δὲ οἱ πόλοι ἐξ ἴσε ἀφίστανται ἴσας καὶ τὰς ἐγκλίσεις ἔχουσιν.

Ἐστωσαν ἐπὶ ἴσων σφαιρῶν ἐγκλινόμενοι κύκλοι οἱ α β γ, δ ε ζ, ὁ μὲν τῶν θ γ η, μεγίστω κύκλω, ὢν κείσθω τὸ κ, ὁ δὲ τῶν δ μ ζ λ, ὢν κείσθω τὸ ν, καὶ κείσθω τὸν πόλον τῆ α β γ, ἔλαττον ἀφίσαθαι τῆ πόλε τοῦ α θ γ η, ἥπερ ὁ πόλος τῆ δ ε ζ, τοῦ πόλε τοῦ δ μ ζ λ. Λέγω, ὅτι ὁ α β γ, κύκλος μᾶλλον ἐγκλίνεται τῷ α θ γ η, ἥπερ ὁ δ ε ζ, τῷ δ μ ζ λ. ἐπεὶ δὲ οἱ ἐγκλινόμενοι κύκλοι ἤτοι μέγιστοί εἰσιν, ἢ ἐλάττονες. Ἐστωσαν ἀ-

Tbeod: Sf: Lib. 2. Fig. 20.

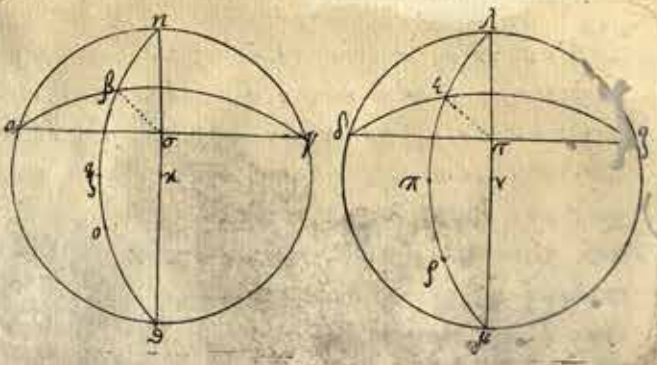


μέγιστοι, καὶ ἀπὸ τῶν α, καὶ δ, σημείων, τῶν κοινῶν τομῶν τῶν α β γ, α θ γ η, καὶ δ ε ζ, δ μ ζ λ, ἐπὶ πόλων διαστήματι [illegible] τμοζίῳ γραφήτωσαν οἱ η β υ, λ ε μ, κύκλοι, οἱ καὶ μέγιστοί εἰσι καὶ τὸ πόρισμα τῆς ι γ': τῆ α': τῆ παρόντος· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ η β, [illegible] καὶ ἐπεὶ οἱ α β γ, α θ γ η, μέγιστοι κύκλοι διὰ τῶν πόλων τῆ η β θ, διέρχονται, πανόπως γε καὶ ὁ η β θ, διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν διέρχεται καὶ τὸ α': πόρισμα τῆς ι β': τῆ α': τῆ παρόντος, καὶ ἑκάτερον δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει

καὶ

καὶ τῷ αὐτῷ τροπάσιν. ὥστε οἱ πόλοι τοῦ αβγ, καὶ αθγκ, ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐσὶ τοῦ ηβθ, κύκλου. Ἔστω τοίνυν πόλος τοῦ μὲν αθγκ, τὸ ξ, σημεῖον, τοῦ δὲ αβγ, τὸ ο. ἐπεὶ δὲ καὶ τὸν δ'. ὅρον τοῦ ιά. τοῦ ϛοιχ. τότε λέγεται ἐπίπεδον τρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν εἶναι, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν τῷ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ τρὸς ὀρθὰς ὦσιν, πάντως γε ἡ γκ, ὀρθή ἐσι τρὸς τὸ τοῦ ηβθ, κύκλου ἐπίπεδον, διὰ τὸ ὀρθὸν εἶναι καὶ τὸν αθγκ, κύκλον τρὸς τὸν ηβθ. ὥστε καὶ τὸν γ'. ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἡ γκ, ὀρθή ἐσι καὶ τρὸς τὴν κη, καὶ κβ. ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ζν, ὀρθή ἐσι τρός τε τὴν νλ, καὶ νε. ἄρα κατὰ τὸν ϛ'. ὅρον τοῦ αὐτοῦ, ἡ ὑπὸ βκη, γωνία κλίσις ἐσὶ τοῦ αβγ, κύκλου τρὸς τὸν αθγκ, ἡ δὲ ὑπὸ ενλ, ὁμοίως κλίσις ἐσὶ τοῦ δεζ, τρὸς τὸν δμζλ, ἀλλὰ τὸ οβ, ἴσον ἐσι τῇ ξη, τεταρτημόριον γὰρ ἑκάτερον ἴσων κύκλων, κοινὸν ἄρα ἀφῃρήσθω τὸ ξβ, ὑπολείπεται τὸ οξ, ἴσον τῇ βη. ὡσαύτως ἀφῃρήσθω καὶ τὸ πε, ὑπολείπεται τὸ ρπ, ἴσον τῷ ελ, ἀλλὰ τὸ οξ, ἔλαττόν ἐσι κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τοῦ ρπ, ἔλαττον ἄρα ἐσὶ καὶ τὸ βη, τοῦ ελ. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βκη, ἐλάττων ἐσὶ τῆς ὑπὸ ενλ, καί εἰσι τῶν κλίσεων γωνίαι, ὡς δέδεικται, ὁ ἄρα αβγ, κύκλος, ὃ ὁ πόλος ἔλαττον ἀφίσαται τοῦ πόλου τοῦ αθγκ, κύκλου, μᾶλλον τρὸς τὸν αὐτὸν ἐγκέκλιται κύκλον.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 21.



Ἔστωσαν δ' ἔτι οἱ αβγ, δεζ, ἐλάττονες κύκλοι ἐγκλινόμενοι τρὸς τοὺς αθγκ, δμζλ, καὶ τοῦ μὲν αβγ, ὁ πόλος ἀφισάσθω ἔτ τον τοῦ πόλου τοῦ αθγκ, κύκλου, ὅπερ ὁ τοῦ δεζ, πόλος τοῦ πόλου τοῦ δμζλ. Λέγω τὸν αβγ, κύκλον μᾶλλον ἐγκλινόμενον εἶναι τῷ αθγκ, κύκλῳ, ἢ τὸν δεζ, τῷ δμζλ. Τῶν αὐτῶν γὰρ κατασκευασθέντων, καὶ τῶν σβ, τε, διχθείσῶν διχοτομίαις δειχθήσεται, ὡς ἀνωτέρω, τὸν ηξθ, εἶναι ὀρθὸν τρός τε τὸν αβγ, καὶ αθγκ. ὁμοίως καὶ τὸν λπμ, τρός τε τὸν δεζ, καὶ δμζλ. ὥστε καὶ τοὺς πόλους τῶν μὲν αβγ. αθγκ, ἐπὶ τῆς περιφερείας εἶναι τοῦ ηξθ, τοὺς δὲ πόλους τοῦτε δεζ, καὶ δμζ, ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ λπμ. εἶτα δειχθήσεται τῷ μὲν βη, περιφέρειαν ἴσην εἶναι τῷ ξο, τῷ δὲ λε, τὴν πρ. μᾶλλον ἡ ξο, ὑπεπέθη ἐλάττων τῆς πρ, τὸ γὰρ ξο, πόλος ἐσὶ τοῦ αθγκ, ὡς καὶ ἀνωτέρω ὑπεπέθη, τὸ δὲ ο, τοῦ αβγ. καὶ τὸ μὲν π, τοῦ δμζλ, τὸ δὲ ρ, τοῦ δεζ. δῆλον ἄρα ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ βση, γωνία ἐλάττων ἐσὶ τῆς ὑπὸ ετλ, καὶ ἔσιν ἑκατέρα γωνία ἐγκλίσεως. ἄρα ὁ αβγ, κύκλος, ὃ ὁ πόλος ἔλαττον ἀφίσαται, μᾶλλον ἐγκλινόμενός ἐσιν,

ἡ ὁ δεζ, ἤ ὁ πόλος μᾶλλον ἀφίσαται. ὥστε ἐὰν αἱ ξο, πρ, περιφέρειαι ἴσαι ὦσιν, ἴσαι δειχθήσονται καὶ αἱ βη, ελ. καὶ ἑπομένως γωνία ἡ ὑπὸ βτη, ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ ετλ. ἄρα καὶ κύκλοι οἱ αβγ, δεζ, ἐξ ἴσου ἐγκλινόμενοί εἰσιν, ἡ μὲν πρὸς τὸν αθγη, ὁ δὲ πρὸς τὸν δμζλ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

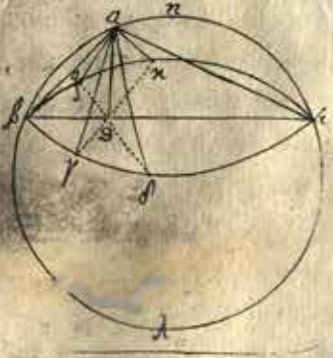
Ἐκ τοῦ εἰρημένων δῆλον, ὅτι ἐὰν διὰ τῶν πόλων τῶν τε ἐγκλινομένου, καὶ τοῦ, ᾧ ἐγκέκλιται ὁ αὐτὸς, μέγιστος διέλθῃ κύκλος, τὸ ἐναπολαμβανόμενον τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου ὑπό τε τοῦ ἐγκλινομένου, καὶ ᾧ ἐγκέκλιται, μέγιστόν ἐστι τῆς τοῦ κύκλου κλίσεως.

Πρότασις ΚΑ′: Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ληφθῇ τι σημεῖον μὴ ὂν πόλος κύκλου τινός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ δύο εἶαι τινες ἀχθῶσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου μεγίστη μὲν ἡ ὑπὸ τὸν πόλον τοῦ κύκλου, ὡς δι' αὐτοῦ ἀγομένη, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπὴ διάμετρον ταύτῃ ἀντικειμένη, τῆς δ' ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ὑπὸ τὸν πόλον τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί, δύο δὲ μόναι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς τε μεγίστης καὶ ἐλαχίστης.

Ἀπὸ τοῦ α, σημείου μὴ ὄντος πόλου τοῦ βγδεζ, κύκλου πιπτέτωσαν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶαί τινες αἱ αβ, αγ, αδ, αε, αζ, καὶ ἔστω ἡ μὲν αε, ὑπὸ τὸν κ, πόλον τοῦ βγδεζ, ὡς δι' αὐτοῦ ἠγμένη, ἀντικείσθω δὲ ταύτῃ καὶ διάμετρον ἡ αβ, ὥστε καὶ τὸ βε, διὰ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοῦ διέρχεσθαι κύκλου. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν αε, μεγίστη ἐστὶν, ἡ δὲ αβ, ἐλαχίστη, ἡ δὲ αδ, μείζων τῆς αγ. Πιπτέτω γὰρ κάθετος ἀπὸ τοῦ α, σημείου πρὸς τὸ τοῦ βγδεζ, κύκλου ἐπίπεδον ἡ αθ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ θγ, θδ. καὶ ἐπεὶ τὸ α, σημεῖόν ἐκ ἔστι πόλος τοῦ βγδεζ, κύκλου, δῆλον, ὅτι καὶ τὸ θ, οὐκ ἔστι κέντρον τοῦ αὐτοῦ, εἰ γὰρ ἦν, καὶ τὸ α, πάντως γε πόλος ἦν κατὰ τὸ πόρισμα τῆς θ′. τοῦ ά. τοῦ παρόντος. ἀλλ' ἡ αθ, ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου πίπτει, ὡς δέδεικται, ἄρα τὸ κέντρον τοῦ βγδεζ, κύκλου ἐπὶ τῆς θε, ἐστί, καὶ ὁ πόλος ἄρα τοῦ [illegible] τοῦ γ′. τοῦ γ′. τοῦ εἰσηγμένου, ἡ μὲν θε, [illegible] ἐστὶν, ἡ δὲ θβ, ἐλαχίστη, καὶ ἡ θδ, μείζων τῆς θγ. ὥστε καὶ τὸ τεθέν τῆς θε, μέγιστόν ἐστι, τὸ δὲ τῆς θβ, ἐλάχιστον, καὶ τὸ τῆς θδ, μεῖζον τοῦ τῆς θγ. ἔστι δὲ ἡ αθ, πρὸς ὀρθὰς ἐφ' ἑκάσης τῶν θβ, θγ, θδ, θε, καὶ τὸν γ′. ὅρον τοῦ ια. τοῦ αὐτοῦ, ἄρα κοινοῦ λαμβανομένου

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 32.



μσν τοῦ ἀπὸ τῆς α Θ, τετραγώνῳ, παντως γε τὰ ἀπὸ τῆς α Θ, Θ ε, τετράγωνα μείζονά εἰσιν, ἐλάχιστα δὲ τὰ ἀπὸ τῆς α Θ, Θ β, καὶ τὰ ἀπὸ τῆς α Θ, Θ δ, μείζονα τῶν ἀπὸ τῆς α Θ, Θ γ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν α Θ, Θ ε, ἴσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς α ε, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν α Θ, Θ β, τὸ ἀπὸ τῆς α β, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν α Θ, Θ δ, τὸ ἀπὸ τῆς α δ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α Θ, Θ γ, τὸ ἀπὸ τῆς α γ, ἄρα ἡ μὲν α ε, μεγίστη ἐστὶ, καὶ διέρχεται ὑπὸ τὸν πόλον, ἡ δὲ α β, ἐλαχίστη, καὶ ἡ α δ, μείζων τῆς α γ. ὅπερ ἔδει τὸ ὑποκειθέντος τοῦ α:

Ὅτι δὲ δύο ἐφ' ἑκάτερα τῆς Θ ε, ἢ Θ β, μόνον ἀχθεῖται ἀπὸ τοῦ α, προσπίπτουσι σημεῖα ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, δῆλον, ἐπεὶ γὰρ τῷ ῥηθεῖσαν ζ': τοῦ γ': τοῦ στοιχειωτοῦ δύο ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης Θ β, ἀπὸ τοῦ Θ, σημείου μόνον προσπίπτουσιν ἀχθεῖαι, ὡς αἱ Θ γ, Θ ζ, ὥστε κοινοῦ λαμβανομένου τοῦ ἀπὸ τῆς α Θ, τὰ ἀπὸ τῶν α Θ, Θ γ, τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν α Θ, Θ ζ, καὶ ἐπεὶ τὰ ἤδη εἰρημένα ἴσα εἰσὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν α γ, α ζ, ἄρα καὶ ἡ α γ, ἴση ἐστὶ τῇ α ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται καὶ ἡ α δ, τῇ α κ, ἴση. ὅπερ ἔδει τὸ β': Λείπεται ἓν δεῖξαι ὅτι καὶ ἡ α Θ, ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου πίπτει.

Γεγράφθω δὴ διὰ τῶν α, καὶ η, σημείων κύκλος μέγιστος ὁ α β λ ε, καὶ τοῦ ιε': τοῦ α: τοῦ παρόντος, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ αὐτοῦ τε καὶ τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου ἡ β Θ ε, ἀλλ' ὁ α β λ ε, κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου ἐπίπεδον κατὰ τὴν ιβ': τοῦ αὐτοῦ, καὶ διὰ τῆς α Θ, διέρχεται. ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ πρὸς τὸ τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου ἐπίπεδον, ἄρα κατὰ τὸν δ': ὅρον τοῦ ια': τοῦ στοιχειωτοῦ ἡ α Θ, ὀρθή ἐστι καὶ πρὸς τὸν β ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΒ': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ληφθῇ τι σημεῖον μὴ ὂν κύκλου τινὸς πόλος, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τρία μεγίστων κύκλων ἀχθῶσι, μέγιστον μέν ἐστι τὸ διὰ τοῦ πόλου τοῦ κύκλου, ἐλάχιστον δὲ τὸ λοιπόν, τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ τὸ ἔγγιον τοῦ διὰ τοῦ πόλου τοῦ ἀπώτερον μεῖζόν ἐστι. δύο δὲ μόνα ἴσα ἀχθήσονται ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τοῦ τε μεγίστου καὶ ἐλαχίστου. *Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 23.*

Ληφθήτω τὸ α, τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, καὶ ἀχθήτωσαν ἀπ' αὐτοῦ τρεῖς μεγίστων κύκλων ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ β γ δ ε ζ, κύκλου πόλος τὸ η, σημεῖον, τὰ α β, α γ, α δ, α ε. Λέγω ὅτι ἡ α ε, τὸ διὰ τοῦ η, πόλου διερχόμενον μέγιστον εἶναι, τὸ δὲ α β, ἐλάχιστον, καὶ τὸ α δ, τοῦ α γ, μεῖζον. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ α β, α γ, α δ, α ε, ὑποτείνουσαι· καὶ ἐπεὶ κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἡ μὲν α ε, μεγίστη ἐστὶν, ἡ

δὲ αβ, ἐλαχίστη, καὶ ἡ αδ, μείζων τῆς αγ, καπὰ δὲ τὴν κη΄ τῶ γ΄ τοῦ στοιχειωτῆ, ἐπὶ τῶν ἴσων κύκλων αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ὑποτείνουσι, παύπως γε τὸ αηε, τόξον μέγιστόν ἐστιν, ὅτι καὶ ἡ αε, ὑποτείνουσα μεγίστη, ὡς δέδεικται, τὸ δὲ αβ, ἐλάχιστον, ὅτιγε καὶ ἡ αβ, ἐλαχίστη, καὶ τὸ αδ, μεῖζον τῆ αγ. καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, μείζων ἐστὶ τῆς αγ. ὁμοίως δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑφ' ἑκάτερα τῆτε αηε, μεγίστε τόξε, καὶ αβ, ἐλαχίστε δύο ἴσα τόξα μόνα ἀπὸ τῆ α, σημείου ἄγονται, ὅτι καὶ ἑφ' ἑκάτερα τῆς αε, ἡ αβ, ὑποτεινέσης δύο μόναι εὐθεῖαι ἀπὸ τῆ α, προσπίπτουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΚΓ΄: Θεώρημα.

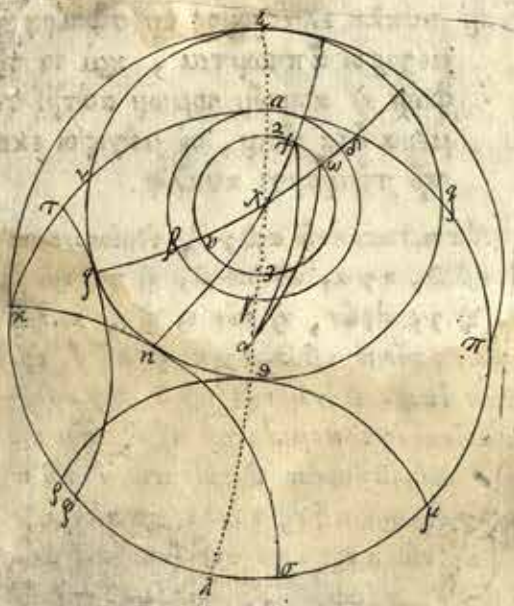
Ἐὰν κύκλος μέγιστος ἅπτηται μερῆ τῆ ἐλάσσονος τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ παραλλήλων, τέμνῃ δὲ τὸν μείζονα, ὥστε τὸν πόλον αὐτῆ μεταξὺ εἶναι τῶν αὐτῶν παραλλήλων, ἅπτωνται δὲ καὶ τῆ μείζονος τῶν παραλλήλων κύκλοι μέγιστοι ὁσοιδηποτοῦν, οἱ πόλοι τῶν ἁπτομένων τῆ μείζονος τῶν παραλλήλων ἐν τῇ περιφερείᾳ τῆ αὐτῆ εἰσι κύκλῳ, παραλλήλῳ ὄντος καὶ αὐτῆ τοῖς ἐξ ἀρχῆς παραλλήλοις, ἐλάττονος δὲ ἑκατέρᾳ, καὶ πρὸς τὸν ἁπτόμενον τῆ ἐλάττονος τῶν ἐξ ἀρχῆς παραλλήλων, ὁ μὲν τῆ μείζονος ἁπτόμενος, καθ' ὃ τὸ ἔλαττον αὐτῆ τμῆμα δίχα τέμνεται, μεγίστῳ ἔχει τῶν κλίσιν, ὁ δὲ, καθ' ὃ τὸ μεῖζον αὐτῆ τμῆμα δίχα τέμνεται ἁπτόμενος, ἐλαχίστῳ ἔχει τῶν κλίσιν πρὸς τὸν αὐτὸν, τῶν δ' ἄλλων ὁ ἐγγύτερον τῆ τῶν μεγίστῳ ἔχοντος κλίσιν τοῦ ἀπώτερον μᾶλλον ἐγκλινόμενός ἐστιν.

Ἔστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ αβγδ, εζηθ, καὶ τῆ μὲν ἐλάττονος τὸν αβγδ, ἁπτέσθω ὁ ακλμ, μέγιστος κύκλος κατὰ τὸ α, τὸν δὲ μείζονα εζηθ, τεμνέτω κατὰ τὰ ν, καὶ ξ, σημεῖα· καὶ ἔστω ὁ τῆ εκλμ, κύκλε πόλος μεταξὺ τῆ αβγδ, εζηθ, δὸς εἰπεῖν, ὢν τὸ ο, σημεῖον, ἁπτέσθωσαν δὲ κατὰ τῆ εζηθ, μείζονος παραλλήλε οἱ κεπ, μθρ, κησ, τζφ, μέγιστοι κύκλοι. Λέγω τὰς πόλους τῶν κεπ, μθρ, κησ, τζφ, μεγίστων κύκλων ἐπὶ τῆς περιφερείας εἶναι τῆ αὐτῆ κύκλε, παρ' ἀλλήλους μὲν τοὺς αβγδ, καὶ εζηθ, ἐλάττονος δὲ ἑκατέρᾳ, καὶ τὸν μὲν κεπ μεγίστῳ ἔχειν τῶν κλίσιν πρὸς τὸν ακλμ, τὸν δὲ μθρ, ἐλαχίστῳ, καὶ τὸν τζφ, μᾶλλον ἐγκλινόμενον εἶναι πρὸς τὸν αὐτὸν ακλμ, ἢ τὸν κησ. Εὑρεθήτω δὴ ὁ πόλος τῶν αβγδ, εζηθ, παραλλήλων κατὰ τὴν πζ΄ τῆ α΄. τῆ παρόντος, καὶ ἔστω ὅπερ ὁ χ, καὶ διὰ τῶν α, καὶ θ, σημείων γεγράφθω μεγίστος κύκλος κατὰ τὴν ις΄ τῆ αὐτῆ ὁ εαθλ, ὅστις καὶ διὰ τοῦ χ, διελεύσεται κατὰ τὴν γ΄. καὶ δ΄. τῆ παρόντος, γεγράφθωσαν δ' ἔτι κατὰ τὴν ρη-

θεῖ-

θεῖσαν ις′: αἱ ηχ↓, ζχω, μέγιστοι κύκλοι. καὶ ἐπεὶ τὸ οα, τόξον τεταρτημορίου ἐστὶ κατὰ τὸ πόρ: τῆς ιγ′: τῶ α: τῶ παρόντος, ληφθήτωσαν ἴσα τῇ οα, τὰ θ2, η↓, ζω, καὶ ε3, τόξα. ὅτι μὲν δὴ οἱ κεπ, μθρ, κησ, τζφ, μέγιστοι κύκλοι ἐγκλινόμενοί εἰσι τῇ ακλμ, δῆλον. ἐδείχθη γὰρ διὰ τῶ ο, πόλε διέρχεται. ἐπεὶ τὰ θ2, η↓, ζω, καὶ ε3, τόξα τεταρτημόρια εἰσι καὶ τῶν κατασκευῶν, παύσεται μὲν τὸ 2, σημεῖον πόλος ἐστὶ τῶ μθρ, καὶ τὸ αὐτὸ πόρ: τὸ δὲ ↓, τοῦ κησ, τὸ δὲ ω, τῶ τζφ, καὶ τὸ 3, τῶ κεπ. ἀλλὰ τὰ θχ, ηχ, ζχ, εχ, ἴσα εἰσὶ καὶ τὸν ε′: ὅρον τῶ α: τῶ παρ: ἄρα καὶ τὸ γ′: ἀξίωμα τῶ στοιχ: ἀφαιρεμένων τῶν θχ, ηχ, ζχ, εχ, ἀπὸ τῶν θ2, η↓, ζω, ε3, ἐναπολειφθήσονται τὰ χ2, χ↓, χω, καὶ χ3, ἴσα. ὥστε ὁ κέντρῳ μὲν τῷ χ, διαστήματι δὲ τῷ χ2, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τῶν λοιπῶν ↓, ω, 3, σημείων. ἔστι δὲ τὸ μὲν 2, πόλος τῶ μθρ, τὸ δὲ ↓, τῶ κησ, τὸ δὲ ω, τῶ τζφ, καὶ τῇ 3, τῶ κεπ, καὶ τὸ πόρ: τῆς ῥηθείσης ιγ′: τῶ παρόντος, ἄρα οἱ πόλοι τῶν κεπ, μθρ, κησ, τζφ, ἐν τῇ περιφερείᾳ εἰσὶ τῶ αὐτοῦ 2υ3ω, ὃς παράλληλός τε ἐστὶ τοῖς αβγδ, εζηθ, διὰ τὸ ἔχειν τὸν αὐτὸν πόλον αὐτοῖς, καὶ ἐλάττων ἑκατέρᾳ, διὰ τὸ ἔλαττον εἶναι τὸ τόξον χ2, τῶ τε χα, καὶ χε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 2. Fig. 24.



Αὖθις ἐπεὶ τὸ θ2, τεταρτημόριόν ἐστι, παύσεται καὶ τὸ οχ, ἔλαττόν ἐστι τεταρτημορίου. ὥστε τὸ ο, οὐκ ἔστιν ὁ ἕτερος πόλος τῶ 2υ3ω. οἱ γὰρ πόλοι πάντες ἐν σφαίρᾳ κύκλου ἡμικυκλίῳ ἀφίστανται, καὶ κατὰ τὸν αὐτέρω τὸ ο2, τόξον μέγιστόν ἐστιν, ἐλάχιστον δὲ τὸ ο3, καὶ τὸ ο↓, μεῖζον τῶ οω. ἀλλὰ τὸ ο, πόλος ἐστὶ τῶ ακλμ, μεγίστου κύκλου, τῶ ἀπτομένου μὲν τῶ ωβγδ, πέμποντος δὲ τὸν εζθξ, τὸ δὲ 2, ὁμοίως πόλος ἐστὶν τῶ μθρ, ἀπτομένου τῶ εζθξ, μείζονος παραλλήλου καὶ τὸ θ, τὸ δὲ 3, τῶ κεπ, ἀπτομένου τῶ αὐτῶ καὶ τὸ ε, τὸ δὲ ↓, τῶ κησ, καὶ τὸ ω, τῶ τζφ. ἄρα ὁ πόλος τῶ κεπ, ἐλαχίστου ἐστὶν ἀπόστασιν ἀπὸ τῶ ο, πόλου τῶ ακλμ, ὁ δὲ πόλος τῶ μθρ, μεγίστη· ὁ δὲ τῶ κησ, μείζονα, ἢ ὁ τῶ τζφ, πόλος. ἀλλ' ὁ μὲν κεπ, ἅπτεται τῶ αζθξ, μείζονος παραλλήλου καὶ τοῦ ε, καθ' ὃ δίχα πέμνεται τὸ νεξ, ἔλαττον αὐτῶ τμῆμα, ὁ δὲ μθρ, ἅπτεται τῶ αὐτῶ καὶ τοῦ θ, καθ' ὃ δίχα πέμνεται τὸ νθξ, μεῖζον τῶ αὐτῶ τμῆμα, καὶ ὁ τζφ, ἐγγύτερός ἐστι τῶ κησ.

Ὅτι δὲ τὸ νεξ, ἔλαττόν ἐστι τῆ νθξ, πῶς δῆλον. ὁ γὰρ τὸ εζθξ, πόλος ἐστὶ τοῦ ακλμ. ὥστε καὶ τῶν ἐρμηνείαν τῆ ιή: τὸ ἄρα τῆ α: τῆ στοιχειώτ, τὸ μὲν νεξ, τόξον ἔλαττόν ἐστι, τὸ δὲ νθξ, μεῖζον. Ὅτι δὲ καὶ δίχα ἑκάτερον πέμνεται, δείκνυται διὰ τῆς ή: τῆ α: τῆ παρόντος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

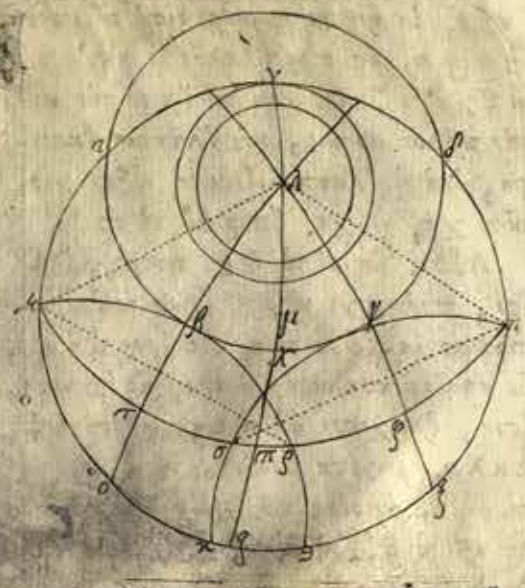
ΠΟΡΙΣΜΑ.

Ἐκ τούτου δῆλον, ὅτι οἱ ἐξ ἴσου ἀφισάμενοι τοῦ τοῦ μεγίστου ἔχοντος κλίσιν, ἐξ ἴσου ἐγκλινόμενοί εἰσι.

Πρότασις ΚΔ': Θεώρημα.

Ἐὰν κύκλου ἐλάσσονος ἡ σφαίρα τοῦ μεγίστου τεμνομένου κύκλου κύκλοι μέγιστοι ἅπτωνται, καὶ τὰ τῷ ἁπτομένῳ τόξα τὰ μεταξὺ τῶν ἀφῶν καὶ τοῦ τεμνοντος ἐμπεριλαμβανόμενα ἴσα ὦσιν, οἱ μέγιστοι ἐκεῖνοι κύκλοι ἐξ ἴσου εἰσὶν ἐγκλινόμενοι τῷ τέμνοντι κύκλῳ.

Ἁπτέσθωσαν τοῦ αβγδ, ἐλάσσονος κύκλου, ὑπὸ τοῦ αεζηδ, μεγίστου τεμνομένου, οἱ εβθ, ηγκ, κατὰ τὰ β, γ· καὶ ἔστωσαν τὰ εβ, γη, τόξα τὰ μεταξὺ τῶν τε β, γ, ἀφῶν, καὶ τῶν ε, η, κοινῶν τομῶν, τῶν τε εβθ, ηγκ, καὶ αζδ, κύκλων ἴσα. Λέγω τοὺς εβθ, ηγκ, ἐξ ἴσου εἶναι ἐγκλινομένους τῷ αζδ, τέμνοντι. Εὑρεθήτωσαν δὴ οἱ πόλοι τοῦ τε αβγδ, καὶ αζδ, κύκλου κατὰ τὸ ιζ: τοῦ α: τοῦ παρόντος. καὶ ἔστω τοῦ μὲν αβγδ, πόλος τὸ λ, σημεῖον, τοῦ δὲ αζδ, τὸ μ, καὶ γεγράφθω διὰ τῶν λ, μ, κύκλος μέγιστος ὁ ζμλν, κατὰ τὸ ις: τοῦ αὐτοῦ. γεγράφθωσαν δ' ἔτι κατὰ τὸ αὐτὸ, καὶ οἱ λγξ, λβο, μέγιστοι κύκλοι διὰ τῶν πόλων τοῦτε αβγδ, καὶ ηγκ, εβθ, ἀπτομένων διερχόμενοι. λέγω καὶ διὰ τῶν β, καὶ γ, ἀφῶν διελεύσονται κατὰ τὸ γ': τοῦ παρόντος. Δείκνυται.



Theod. Sf. Lib.2. Fig. 25.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ λβο, εβθ, μέγιστοι κύκλοι δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλους τέμνουσι, καὶ τὸ πρὸς τῆς ιβ: τοῦ παρόντος, παντως γε τὸ τοῦ λβο, ἡμικύκλιον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν εβθ, κύκλον. ὡσαύτως καὶ τὸ τοῦ λγξ, ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν ηγκ, κύκλον, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ λβ, λγ, τόξα ἴσα καὶ τὸν ἑ: ὅρον τοῦ α: τοῦ παρόντος, ἄρα

ἄρα ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν εβ θ, ηγ κ, μείζων κύκλων ἐφίσανται ὅμοια τόξα πρὸς ὀρθὰς, καὶ ἐλήπται ἀπ' αὐτῶν τόξα ἴσα τὰ βλ, γλ, ἐλήπται δὲ καὶ ἀπὸ τῶν εβ θ, ηγ κ, κύκλων ἴσα τόξα καὶ τῷ ὑπάθεσιν τὰ εβ, γη, ἄρα καὶ τῷ ια· τὰ παράπαν, αἱ λε, λη, ἀπεῖαι ἐπιζευχθεῖσαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε ὁ ἀπὸ τοῦ λ, ὡς ἀπὸ κέντρου διαστήματι τῇ λε, γραφόμενος κύκλος διελεύσεται καὶ διὰ τοῦ η, καὶ παράλληλος ἔσται τῇ αβγδ. Λύθις ἐπεὶ ὁ λβο, μείζων κύκλος διὰ τῶν πόλων διέρχεται τῶν εβ θ, επη, τεμνομένων ἀλλήλων, παύπως γε καὶ τῷ η· τοῦ παράπαν τὰ εβρ, εσρ, τμήματα δίχα τέμνει, ἴσα ἄρα ἐστὶ τὰ εβ, βρ, καὶ ετ, τρ. διὰ τὰ αὐτὰ ἴσά ἐστι καὶ τὰ ηγ, γσ, ηφ, φσ. ἀλλὰ τὰ εβ, ηγ, ἴσά ἐστι καὶ τῷ ὑπάθεσιν, ἄρα καὶ τὸ ὅλον εβρ, ἴσόν ἐστιν ὅλῳ τῇ ηγσ, καὶ ἐπομένως αἱ ερ, ησ, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσὶ καὶ τῷ κθ· τοῦ γ· τοῦ στοιχειωτοῦ, αἱ δὲ ερ, ησ, ὑποτείνουσι καὶ τὰς επρ, ηφσ, περιφερείας, ἄρα καὶ τῷ κη· τοῦ αὐτοῦ, καὶ αἱ ετρ, ηφσ, περιφέρειαι ἴσαί εἰσιν. ἀλλ' αἱ ετ, ηφ, ἴσαί εἰσιν, ὡς δέδεικται, ἄρα αἱ τρ, φσ, ἴσαί εἰσι, κοινῆς οὖν ἀφαιρεμένης τῆς σρ, περιφερείας, ἐναπολείπεται τὰ τσ, ρφ, τόξα ἴσα, εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ετ, ηφ, ἴσα, ὡς ἤδη εἴρηται, ὅλον ἄρα τὸ ετσ, ὅλῳ τῇ ηφρ, ἴσόν ἐστιν· ἀλλὰ καὶ τῷ ριθ· τοῦ αὐτοῦ η· τοῦ παράπαν καὶ τὰ επ, πη, ἴσά ἐστιν, ὁ γὰρ νμζ, μείζων κύκλος διὰ τῶν πόλων διέρχεται τῶν αζδ, επη, τεμνομένων κύκλων. ἄρα ἀφαιρεμένων τῶν ετσ, ηφρ, ἴσων, ἐναπολείπονται ἴσα τὰ σπ, πρ, εἰσὶ δὲ ὡς δέδεικται καὶ τὰ στ, βφ, ἴσα, ὅλον ἄρα τὸ τπ, ἴσόν ἐστιν ὅλῳ τῇ πφ, ἀλλὰ τὰ βχ, χγ, ὅμοιά εἰσι τοῖς τπ, πφ, τόξοις, διὰ τὸ ὁμοκέντρους εἶναι τὰς αβγδ, επη, κύκλους, ἄρα καὶ τὰ βχ, χγ, ἴσά εἰσι, καὶ καὶ τὸ πόρ· τῆς αὐτέρω οἱ εβ θ, ηγ κ, ἐξ ἴσου ἐγκλινόμενοι εἰσὶ τῇ αβγδ. Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐλάττονος ἐν σφαίρᾳ ὑπὸ μείζονα τεμνομένου κύκλου, κύκλοι μείζονι ἅπτωνται, καὶ τὰ τῶν ἁπτομένων τόξα τὰ μεταξὺ τῶν ἁφῶν καὶ κοινῶν τομῶν αὐτῶν τε καὶ τοῦ τέμνοντος ἐμπεριλαμβανόμενα ἴσα ὦσιν, οἱ μείζονες ἐκεῖνοι κύκλοι ἐξ ἴσου εἰσὶν ἐγκλινόμενοι τῷ τέμνοντι κύκλῳ.

Τέλος τοῦ Δευτέρου τῶν κατὰ Θεοδόσιον Σφαιρικῶν.

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

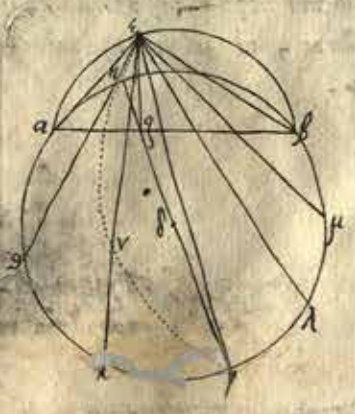
ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΖΗΤΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑ ΘΕΟΔΟΣΙΟΝ ΤΟΝ ΤΡΙΠΟΛΙΤΗΝ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

Πρότασις Α': Θεώρημα.

Ἐὰν τμῆμα κύκλου ὀρθὸν ἢ ἐγκλινόμενον ἢ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἑτέρου τινὸς κύκλου, τέμνον τὴν αὐτὴν κύκλου εἰς δύο ἴσα, λαμφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ τμήματος περιφερείας, ὥστε τὸ τμῆμα εἰς δύο κατ' αὐτὸ ἴσα τέμνεσθαι, ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὴν τοῦ κύκλου μείζονα περιφέρειαν διήκειν ἀχθῶσιν, ἐλάχιστον ἐστὶν ἡ τὸ ἔλαττον τοῦ τμήματος ὑποτείνουσα τόξον, ἀφ' ἧς αὔξονται μὲν ἄχρι τῆς διαμέτρου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου, καθ' ὃ ἡ ἀπὸ τοῦ λαμφθέντος σημείου κάθετος πίπτει, ἐλαττοῦνται δὲ ἕως αὐτῆς πρὸς τὴν αὐτὴν ἀποκαταστάσεως. *Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 1.*



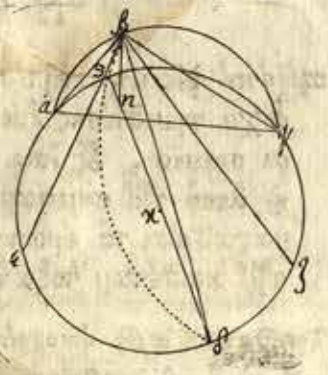
Ἔστω ἐπίπεδον τοῦ αβγ, κύκλου, οὗ κέντρον τὸ δ, τμῆμα κύκλου ὀρθὸν τὸ αεβ, ἀπὸ τοῦ ε, σημείου, καθ' ὃ τὸ αεβ, τμῆμα εἰς δύο ἴσα τέμνεται τὰ αε, εβ, πρὸς μὲν τὸ ἐπίπεδον τοῦ αβγ, κύκλου πεπτώκω κάθετος ἡ εζ, πρὸς δὲ τὴν αγβ, μείζονα τοῦ κύκλου περιφέρειαν ἀχθήσωσαν αἱ εθ, εκ, εγ, ελ, εμ, εν, εβ. καὶ διὰ τοῦ ζ, ἤχθω ἡ γζκ. Λέγω τὴν μὲν εα, ἐλαχίστην εἶναι, τὰς δὲ λοιπὰς αὔξεσθαι μέχρι ἀπὸ τοῦ α, μέχρι τοῦ γ, ἀπὸ δὲ τοῦ γ, μέχρι τοῦ β, ἐλαττοῦσθαι. Γεγράφθω δὴ μείζονα κύκλου τόξου διὰ τῶν εκγ, σημείων τὸ γεκ, καὶ τὴν ις: τοῦ δ: τοῦ παρόντος, καὶ ἐπεὶ ἡ εζ, κάθετός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ αβγ, κύκλου ἐπί-

πε-

πεδον, καὶ τῷ καπασκάλῳ, πάντως γε καὶ ὁ γνη, κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ τοῦ αβγ, κύκλε ἐπίπεδον, ὥστε καὶ διὰ τῆ πόλε αὐτῆ διέρχεται, τεμνομένε δὲ τῆ γνη, δίχα καὶ τὸ ν, δῆλον, ὅτι τὸ ν, πόλος ἐστὶ τῆ αβγ, κύκλε, τὸ ε, ἄρα οὐκ ἔστι πόλος τῆ αὐτῆ, καὶ καὶ τῷ κβ': τῆ β': τῆ παρόντος, ἡ μὲν εη, ἐλαχίστη ἐστὶ, μεγίστη δὲ ἡ εγ, ἡ δὲ εκ, ἡ ἔγγιον τῆς εγ, μείζων ἐστὶ τῆς εθ, καὶ ἡ εθ, τῆς εα. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ μὲν ελ, μείζων ἐστὶ τῆς εμ, ἡ δὲ εμ, τῆς εβ, αἱ ἄρα ἀπὸ τῆ ε, σημείε ἐπὶ τῷ αγ, περιφέρειαν ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ μὲ τῆ α, μέχρι τῆ γ, αὔξονται, ἀπὸ δὲ τῆ γ, μέχρι τῆ β, ἐλαττοῦνται.

Ἀλλὰ δὴ ἐκτὸς τὸ αβγ, τμῆμα ἐγκλινόμενον πρὸς τὸ τῆ αγδ, κύκλε ἐπίπεδον, καὶ ἀπὸ τῆ β, σημείε, καθ' ὃ τὸ αβγ, τμῆμα εἰς αὖισα πέμνεται, ἀχθήσωσαν ἐπὶ τῷ αδγ, περιφέρειαν αἱ βα, βε, βδ, βζ, βγ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν βα, ἐλαχίστη ἐστὶ, μεγίστη δὲ ἡ βδ, καὶ ἀπὸ μὲν τῆ α, μέχρι τῆ δ, αὔξονται αἱ ἀπὸ τῆ β, ἐπὶ τῷ αδ, περιφέρειαν ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τῆ δ, ἄχρι τῆ γ, ἐλαττοῦνται. ἡ γὰρ τέτε κατασκευὴ τὰ μὲν ἄλλα ἡ αὐτή ἐστι τῇ τῆ ἀνωτέρω, διαλείπει δὲ, ὅτι ἐπ' ἐκείνε μὲν ἡ ἀπὸ τῆ ε,ληφθέντος σημείε κάθετος ἐπὶ τῆς αβ, πίπτει, ὡς ἡ εζ. ἐπὶ ταύτε δὲ ἡ ἀπὸ τῆ β, ἐκτὸς πίπτει τῆς αγ, ἐφ' ᾗ τὸ αβγ, ἐφίσαται τμῆμα, ὡς ἡ βκ. ὥστε, κατὰ τὸ ῥηθέισαν κβ': δείκνυται ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῆ παρόντος ἀπὸ μὲν τῆ α, σημείε μέχρι τῆ δ, αὔξεσθαι τὰς ἀπὸ τῆ β, ληφθέντος σημείε ἀγομένας εὐθείας ἐπὶ τῷ αδγ, περιφέρειαν, ἀπὸ δὲ τῆ δ, ἄχρι τῆ γ, ἐλαττοῦσθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 2.



Πρότασις Β'. Θεώρημα.

Ἐὰν δύο μέγιστοι κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ ὦσι, καὶ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἴσα ἐν ἑκατέρῳ τόξα ληφθῶσιν, αἱ τὰ τόξα αὐτῶν ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι ἴσοι ἔσονται.

Ἔστωσαν κύκλοι μέγιστοι αἱ ... γδ, τεμνόμενοι ἀλλήλοις κατὰ τὸ ε, καὶ ἀπὸ τῆ ε, σημείε ληφθήτωσαν ἴσα τόξα ἐν μὲν τῷ αβ, τὰ εα, εβ, ἐν δὲ τῇ γδ, τὰ εζ, εη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αη, ζβ. Λέγω δὴ τὰς αη, ζβ, εὐθείας, τὰς ἐπιζευγνύσας τὰ αε, εη, καὶ βε, εζ, τόξα, ἴσας εἶναι. Ἀπὸ γὰρ τῆ ε, ὡς ἀπὸ πόλε, διαστήματι τῷ εα, ἡ εβ, μείζονι τῆ εη, καὶ εζ, γεγράφθω κύκλος ὁ αγβδ. καὶ ἐπεὶ οἱ αβ, γδ, διὰ τῆ ε, πόλε τῆ αγβδ, κύκλε διέρχονται, πάντως γε καὶ τῷ ιβ': τῆ α': τῆ παρόντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν ἑκάτερος πέμνε-

μνυσιν, ὥστε τὰ μὲν α δ β, δ β γ, τόξα τῶ α γ β δ, κύκλε ἡμικύκλια ἐσι, καὶ ἴσα ἀλλήλοις, κοινῶ δὲ ἀφαιρεμένε τῶ δ β, ἐναπολείπονται τὰ α δ, γ β, τόξα ἴσα, ἀλλὰ καὶ τὰ ε γ, ε δ, ἴσα εἰσί, καὶ τιλὶ ε: ὅρος τῶ παρόντος, ἀφήρηται ἀπ' αὐτῆ τὰ ε η, ε ζ, ἴσα, καὶ τὸ γ ε δ, τμῆμα ὀρθὸν ἐφέψεται ἐπὶ τῆς διαμέτρε τῶ α γ β δ, κύκλε, καὶ τιλὶ ι β': τῶ ά: τῶ παρόντος, ἄρα καὶ τιλὶ ι ά: ά β': τι αὐτῶ αἱ η α, ζ β, αἱ πὸς πομὰς ἐπιζευγνύσαι, ἴσαι εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 3.

ΛΗ͂ΜΜΑ, Α'.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινέσης τῶ τυχόντος τόξου δίχα τμηθείσης δύο ἑκατέρωθεν ληφθῶσι σημεῖα, ἀφ' ἴσε τῶ μέσε ἀφιςάμενα, καὶ ἀπὸ τῆ σημείων καθῆτοι ἐπ' αὐτῆς ἀγαχθῶσι τὰ ἐμπολαμβανόμενα μεταξὺ τῆ καθέτων τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσί.

Τμηθήτω ἡ α β, ὑποτείνεσα τῶ α γ β, τόξου δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ληφθήτωσαν τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, ὥστε τὰ δ ε, δ ζ, διαςήματα ἴσα εἶναι, ἀπὸ δὲ τῶν ε, δ, ζ, σημείων ἀνεςάθωσαν καθῆτοι ἐπὶ τῆς α β, αἱ δ γ, ε η, ζ θ. Λέγω τὰ γ η, γ θ, τόξα ἴσα εἶναι. Ἀναπεπληρώθω δὴ ὁ α γ β κ, κύκλος, καὶ εκβεβλήσθω τὸ ν, καὶ ἐξαχθήτωσαν αἱ δ γ, ε η, ζ θ, διάμετροι καὶ τὸ συνεχὲς ἀπὸ τῆ δ, ε ζ, σημείων ἐπὶ τὰ κ λ μ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ κ μ, θ λ. καὶ ἐπεὶ αἱ δ γ, ε η, ὀρθαί εἰσιν ἐπὶ τῆς α β, παίπος γε αἱ ὑπὸ κ ε δ, γ δ ε, γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαί εἰσι, καὶ καὶ τιλὶ κ ή: τῶ ά: τῶ ςοιχειωτῶ, αἱ γ δ, κ ε, παράλληλοί εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ ἔτι παράλληλοί εἰσι καὶ αἱ γ δ, θ ζ. ὥστε καὶ τιλὶ κ ζ: τῶ ά: καὶ κ ζ': τῶ γ': τῶ ςοιχ: τὰ γ η, λ κ, τόξα ἴσα ἐσὶν, ὡσαύτως δὴ καὶ τὰ γ θ, κ μ. (διὰ τὸ ὑποτείνεθαι ἴσαις ὑθείαις, καὶ ὑποκεῖθαι ἴσαις ταῖς πρὸς τῷ κορυφῇ κ, γωνίαις.) ἀλλ' αἱ ὑπὸ γ κ θ, κ γ λ, γωνίαι ἴσαί εἰσι, καὶ κορυφὴν γὰρ, καί εἰσι πρὸς τῷ κορυφῷ, ἄρα καὶ τιλὶ κ ζ: τῶ ά: τῶ ςοιχειωτῶ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἡ γ θ, ἄρα περιφέρεια ἴση ἐσὶ τῇ κ λ, ἀλλὰ καὶ ἡ γ η, ἴση δέδεικται τῇ κ λ, καὶ γ η, ἄρα ἴση ἐσὶ γ θ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

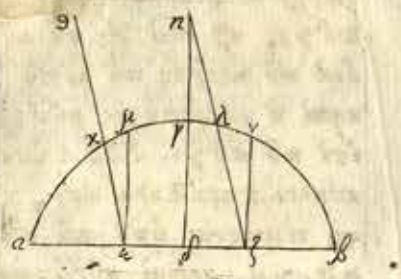
ΛΗ͂Μ.

ΛΗΜΜΑ. Β'.

Ε'αν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τινὸς τόξου δίχα τμηθείσης κάθετος ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ, ληφθῇ δὲ ἑκατέρωθεν δύο σημεῖα ἐξ ἴσου τῷ μέσῳ ἀφιςάμενα, καὶ ἀπ' αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, καὶ τούτων ἡ μὲν συμπέσῃ τῇ καθέτῳ ἐκβαλλομένῃ, ἡ δὲ μὴ συμπέσῃ, ἡ συμπίπτουσα ἔλαττον ἀφαιρεῖται τόξου.

Τετμήσθω ἡ αβ, ὑποτείνουσα τὸ αγβ, τόξου δίχα κατὰ τὸ δ, καὶ ἀνεσάθω κάθετος ἡ δγ· ληφθήτωσαν δὲ καὶ τὰ ε, καὶ ζ, σημεῖα, ὥστε τὰ δε, δζ, διαστήματα ἴσα εἶναι· καὶ ἀπὸ τῶν ε, καὶ ζ, ἀχθήτωσαν παράλληλοι αἱ ζη, εθ, ὧν ἡ μὲν ζη, συμπιπτέτω τῇ δγ, καθέτῳ ἐκβαλλομένῃ, κατὰ τὸ η, ἡ δὲ εθ, μὴ συμπιπτέτω. Λέγω τὸ γλ, τόξον ἔλαττον εἶναι τοῦ γκ. Ἀνεσάθωσαν γὰρ ἐπὶ τὰς αβ, κάθετοι αἱ εμ, ζν, καὶ παντὸς γε, κατὰ τὸ αὐτερω λῆμμα, τὰ γν, γμ, τόξα ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. ἀλλὰ τὸ γλ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ γν, ἄρα τὸ αὐτὸ γλ, ἔλαττόν ἐστι καὶ τοῦ γμ, ἔστι δὲ καὶ τὸ γμ, ἔλαττον τοῦ γκ, τὸ γλ, ἄρα πολλῷ ἔλαττόν ἐστι τοῦ γκ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod: Sf: Lib. 3. Fig. 4.



Πρότασις Γ'. Θεώρημα.

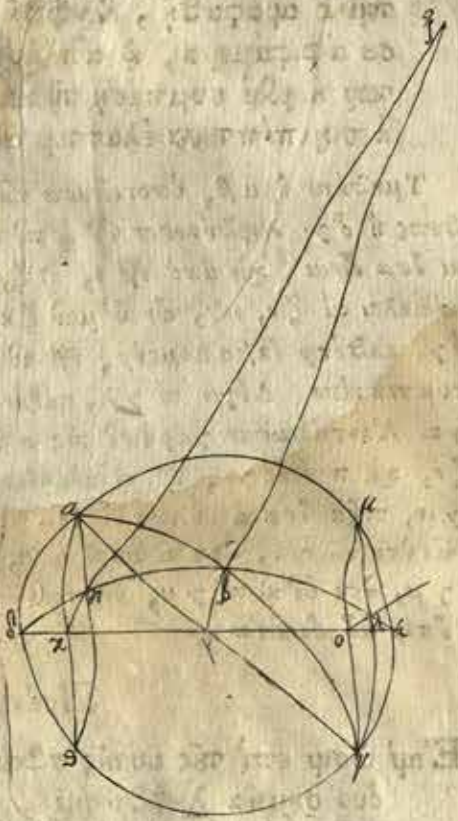
Ε'αν ὦσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας δύο κύκλοι μέγιστοι, καὶ ἐπὶ τοῦ ἑνὸς δύο σημεῖα ληφθῶσιν, ἐξ ἴσου τῆς κοινῆς αὐτῶν ἀφιςάμενα τομῆς, διὰ δὲ τῶν ληφθέντων σημείων ἐπίπεδα παράλληλα διέλθωσι τέμνοντα τὸν ἕτερον τῶν μεγίστων κύκλων, καὶ τούτων τὸ μὲν ἐκβαλλόμενον συμπέσῃ τῇ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ κοινῆς τομῆς τῶν μεγίστων κύκλων ἐκβαλλομένῃ εὐθείᾳ, τὸ δὲ μὴ, τὸ συμπίπτον ἔλαττον ἀφαιρεῖται τόξον ἀπὸ τοῦ τεμνομένου μεγίστου κύκλου.

Ἐν σφαίρᾳ γὰρ τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι μέγιστοι οἱ αβγ, δβε, τεμνόμενοι κατὰ τὸ β. καὶ ληφθήτωσαν ἐπὶ τοῦ αρ, → α, καὶ γ, σημεῖα, ὥστε τὰ βα, βγ, διαστήματα ἴσα εἶναι, διὰ δὲ τῶν α, καὶ γ, διελθέτωσαν ἐπίπεδα παράλληλα τέμνοντα τὸν δβε, κύκλον· καὶ ἐπεὶ αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ τῆς σφαίρας κύκλοι εἰσὶ, καὶ τινὶ τῶν β: τοῦ α: τοῦ παρόντος, ἔστωσαν ὅτι οἱ α η θ, γ λ μ. διὰ δὲ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν αβγ, δβε, μεγίστων κύκλων, καὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διήχθω ἡ νβξ, καὶ κείσθω τὸ μὲν διὰ τοῦ α, σημεῖον διερχόμενον ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον συμπίπτειν τῇ νβξ, κατὰ τὸ ξ, σημεῖον, τὸ δὲ διὰ τοῦ γ, μὴ συμπίπτειν.

Λέγω

Λέγω τὸ διὰ τοῦ α, ἔλαττον τοῦ δβε, ἀφαιρεῖν πρῶτον, τὸ δὲ διὰ τοῦ γ, μεῖζον, τοῦτέστι τὸ βη, ἔλαττον εἶναι τοῦ βλ. Γραφήτω γὰρ ὡς ἀπὸ πόλου τοῦ β, διὰ τῶν α, καὶ γ, σημείων ὁ αδγε, κύκλος, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αγ, εδ, κη, ολ. καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν αβγ, δβε, μειζόνων κύκλων διὰ τοῦ β, πόλου τοῦ αδγε, διέρχεται, πώποτε γε δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει, καὶ τὴν εβ· τοῦ α· τοῦ παρόντος, ὥστε αἱ αγ, εδ. διάμετροί εἰσι τοῦ αδγε, κύκλου. ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ νβξ, διὰ τῶν πόλων τοῦ αὐτοῦ αδγε, διέρχεται, δῆλον, ὅτι κάθετός ἐστι ἐπὶ τοῦ αδγε, καὶ τῷ Θ· τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἐπομένως διὰ τοῦ κέντρου τοῦ αὐτοῦ διέρχεται κύκλου, κατὰ τὸ πόρισμα τῆς αὐτῆς, τὸ ν, ἄρα κέντρον ἐστὶ τοῦ αδγε. Λύθις ἐπεὶ οἱ ανΘ, γλμ, κύκλοι παράλληλοί εἰσι, καὶ τῷ ὑποθέσιν, καὶ τέμνονται ὑπὸ τοῦ αδγε, πώποτε γε αἱ αΘ, γμ, κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι. πέπτωκε δὲ εἰς αὐτὰς ἡ αγ, ἄρα κατὰ τὸ κΘ· τοῦ δ· τοῦ στοιχειώτου αἱ ὑπὸ καν, ογν, ἐναλλὰξ γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ ανκ, γνο, κορυφὴν ὁμοίως ἴσαι εἰσίν, καὶ ἡ αν, ἡμιδιάμετρος ἴση τῇ γν, ἡμιδιαμέτρῳ, ἄρα καὶ τὸ κ· τοῦ α· τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἡ νκ, ἴση ἐστὶ τῇ νο. ὥστε αἱ κη, ολ, ἐξ ἴσου ἀφίσανται τοῦ ν. Τελευταῖον, ἐπεὶ τὸ τοῦ ανΘ, κύκλου ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον συμπίπτει, καὶ τῷ ὑποθέσιν τῇ νβξ, κατὰ τὴν, τὸ δὲ τοῦ γλμ, συμπίπτει, ἄρα τὸ ξ, σημεῖον ἐπὶ τῆς κη, κοινῆς τομῆς τῶν ανΘ, καὶ δβε, κύκλων, ἑκάτερα γὰρ τῶν κη, ολ, ἐν τῷ τοῦ βε, ἐπιπέδῳ ἐστὶν, ἀλλ' ἡ κη, καὶ ἐν τῷ τοῦ ανΘ, ἐπιπέδῳ ἐστὶν, ὥσπερ καὶ ἡ ολ, ἐν τῷ τοῦ γλμ, ἄρα ἡ κη, ἐκβαλλομένη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ανΘ, συμπίπτει τῇ νβ, ἐκβαλλομένῃ καὶ αὐτῇ, κατὰ τὸ ξ, ἡ δὲ ολ, συμπίπτει ἀφίσανται δὲ ἑκατέρα τῶν ἴσου τοῦ ν, ὡς δέδεικται, ἄρα κατὰ τὸ β· λῆμμα, ἡ μὲν κη, ἔλαττον ἀφαιρεῖται μεῖζον τοῦ δβε, ἡ δὲ ἡ ολ. ἀφαιρεῖται δὲ ἡ μὲν κη, τὸ βη, ἡ δὲ ολ, τὸ βλ, τὸ βη, ἄρα ἔλαττόν ἐστι τοῦ βλ. ὅπερ ἔδει τὸ ὑποχεθέν. Δεῖ δὲ τὰ βη, βλ, διαστήματα ἐλάττονα εἶναι τῶν βα, βγ, ἑκάτερον ἑκατέρου.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 5.

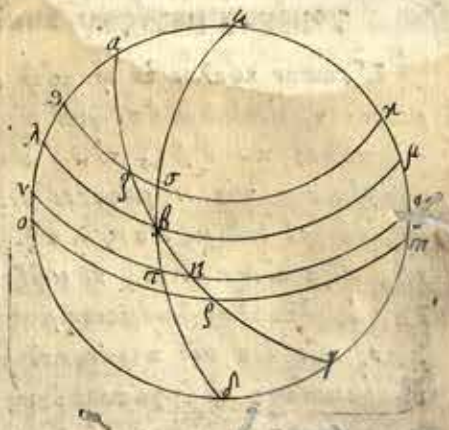


Πρό-

Πρότασις Δ'. Θεώρημα.

Ε'αν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ δύο κύκλοι μέγιστοι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τεμνόμενοι, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ ἑνὸς περιφερείας τόξα ἴσα ληφθῶσιν, ἐπὶ δὲ τῆς τοῦ ἑτέρου σημεῖον, ὃ μή ἐστι πόλος τοῦ ὑπ' αὐτοῦ τεμνομένου, καὶ ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου κύκλοι παράλληλοι διὰ τῶν περάτων τῶν ληφθέντων τόξων ἐπὶ τῆς τοῦ ἑτέρου περιφερείας γραφῶσιν, οἱ κύκλοι ὅποι τόξα ἀφαιρέσουσιν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἐφ' ἃς τὸ σημεῖον εἴληπται, καὶ ὁ μείζονι γραφόμενος διαστήματι, μείζονα καὶ τὸ τόξον ἀφαιρέσει.

Ε'στωσαν κύκλοι μέγιστοι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τεμνόμενοι οἱ α β γ, α δ γ ε, καὶ τὰ α, γ· καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ α β γ, περιφερείας ληφθέντα τόξα ἴσα τὰ β ζ, β η, ἐπὶ δὲ τῆς τοῦ α δ γ ε, ληφθέντω σημεῖον τὸ ε, μὴ ὂν πόλος τοῦ α β γ. καὶ ἀπὸ τοῦ ε, ληφθέντος σημείου, ὡς ἀπὸ πόλου γεγράφθωσαν διὰ τῶν ζ β η, σημείων κύκλοι παράλληλοι, ὥστε ἐν τῷ αὐτῷ ὄντες, εἶναι ἡμισφαιρίῳ, οἱ θ ζ κ, λ β μ, ν η ξ. Λέγω τὰς αὐτὰς παραλλήλους ἴσα ἀφαιρεῖν τόξα ἀπὸ τῆς τοῦ α δ γ ε, περιφερείας, τὰ θ λ, λ ν. καὶ τὸ λ ν, μεῖζον εἶναι τοῦ θ λ. Γεγράφθω γὰρ διὰ τῶν ε, καὶ β, σημείων κύκλος μέγιστος ὁ ε β δ. καὶ ἐπεὶ ὁ α δ γ ε, διὰ τῶν πόλων τῶν αὐτῶν διέρχεται παραλλήλων, ἄρα, κατὰ τὸ ι β': τοῦ α: τοῦ παρ: δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὰς τέμνει, καὶ ἐπομένως οἱ θ ζ κ, λ β μ, ν η ξ, ὀρθοί εἰσι πρὸς τὸν τοῦ α δ γ ε, ἐπίπεδον· μέγιστος δὲ τῶν παραλλήλων ἐστὶν ὁ ο π, ὡς δίχα τὸν σφαίρικὸν τέμνων, ἄρα, κατὰ τὸ α: πόρισμα τῆς αὐτῆς διὰ τοῦ πόλου τοῦ α δ γ ε, διέρχεται· τὸ β, ἄρα οὐκ ἔστι πόλος τοῦ α δ γ ε, καὶ τὸ α β, τόξον ἔλαττόν ἐστι τοῦ β γ, ὥστε ἐὰν ἐπινοηθῇ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ β, σημείου καὶ κέντρου τῆς σφαίρας φερομένη, πεσεῖται ἐπὶ τὸ α δ γ ε, ἐπίπεδον, ἄλλως γὰρ οὐ τὸ β, πόλος ἔσται τοῦ α δ γ ε, καὶ τὸν αὐτὸν, καὶ ἐγκλίνει μᾶλλον πρὸς τὸν ο π, περιφέρειαν, ἐκβαλλόμενα τὰ ἐπίπεδα τῶν θ ζ κ, ν η ξ, παραλλήλων κύκλων, τὸ μὲν α θ ζ κ, ἐπίπεδον συμπεσεῖται τῇ διὰ τοῦ β, σημείου, καὶ κέντρου τῆς σφαίρας διερχομένῃ εὐθείᾳ, τὸ δὲ τοῦ ν η ξ, οὐ συμπεσεῖται. ἀλλὰ τῶν α β γ, ε β δ, μεγίστων κύκλων ὄντων ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας ὄντων ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ α β γ, περιφερείας εἴληπται δύο σημεῖα τὰ ζ, η, ἐξ ἴσου τῆς



Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 6.

τῆς

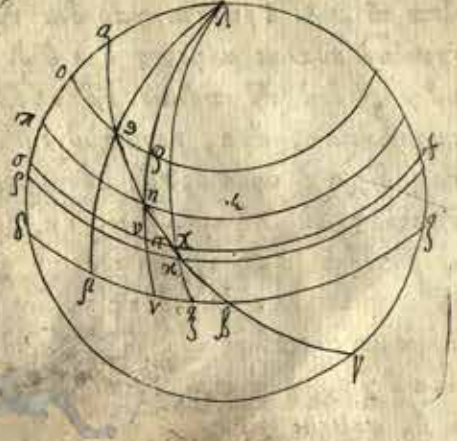
τῆς κοινῆς αὐτῶν τομῆς, τὰ β, δηλ: σημεῖα, ἀφιστάμενα, καὶ διὰ τῶν αὐτῶν σημείων ἐπίπεδα παράλληλα διέρχονται, τὰ τῶν θ ζ κ, καὶ ν ξ, παραλλήλων, καὶ πάντων τὸ μὲν συμπίπτει τῷ διὰ τοῦ β, κοινῆς τομῆς τῶν αὐτῶν μεγίστων κύκλων, καὶ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἄρα τὰ αὐτὰ ἐπίπεδα ἄνισα ἀφαιρεῖται τόξα ἀπὸ τῆς τοῦ ε β δ, κύκλου περιφερείας, ὥστε τὰ β σ, β τ, τόξα καὶ τῷ ἀνωτέρω ἄνισά εἰσι, καὶ μεῖζον τὸ β τ, τοῦ β σ. ἀλλὰ τὸ μὲν β τ, ἴσον ἐστὶ τῷ λ ν, τὸ δὲ β σ, τῷ θ λ, καὶ τῷ θ': τοῦ β': τοῦ παρ: ἄρα τὸ λ ν, μεῖζόν ἐστι τοῦ θ λ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις Ε': Θεώρημα.

Ε'ὰν δύο κύκλοι μέγιστοι πλαγίως ἀλλήλοις τέμνωνται, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ ἑτέρου περιφερείας τόξα ἴσα ληφθῶσι, διὰ δὲ τοῦ πόλου τοῦ ἑτέρου κύκλου καὶ τῶν περάτων τῶν εἰλημμένων τόξων κύκλοι μέγιστοι γραφῶσιν, οἱ κύκλοι ὅτι ἀνισα τόξα ἀφαιρέσουσιν ἀπὸ τῆς περιφερείας, οὗ πόλος ἐστὶ τὸ εἰλημμένον σημεῖον, καὶ τὸ ἐμπολαμβανόμενον μεταξὺ τῶν διὰ τῶν περάτων τοῦ ἐγγύτερον τοῦ πόλου τμήματος ἀγομένων μεγίστων κύκλων μεῖζον ἐστιν.

Ἔστωσαν κύκλοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ α β γ, δ β ζ, πλαγίως ἀλλήλοις τέμνοντες· καὶ εἰλήφθω ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ α β γ, περιφερείας τόξα ἴσα τὰ η θ, η κ. ἔστω δὲ πόλος τοῦ δ β ζ, τὸ λ, σημεῖον. ἀφ' οὗ γεγράφθωσαν κύκλοι μέγιστοι διὰ τῶν θ, η, κ, σημείων οἱ λ θ μ, λ η ν, λ κ ξ. Λέγω τὰ μν, ν ξ, τόξα ἄνισα εἶναι, καὶ μεῖζον τὸ μ ν, τοῦ ν ξ, ὡς συναπολαμβανόμενον μεταξὺ τῶν λ θ μ, λ η ν, τῶν διὰ τῶν περάτων τοῦ η θ, τμήματος διερχομένων, τοῦ ἐγγύτερον ὄντος τοῦ λ, πόλου. Γεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ λ, πόλου διὰ τῶν ο, π, ρ, σημείων παράλληλοι οἱ θ ο, η π, κ ρ. καὶ ἐπεὶ, καὶ τῷ ἀνωτέρω τὸ π ρ, τόξον μεῖζόν ἐστι τοῦ π ο, ἀφῃρήσθω τὸ π σ, ἴσον τῷ π ο, καὶ διὰ τοῦ υ, σημείου, ὡς ἀπὸ πόλου τοῦ λ, γεγράφθω παράλληλος ὁ σ τ, τέμνων τὸν λ ν, καὶ τὸ υ. Δείκνυται, ὅτι τὰ φ, ο π, καὶ ν υ, π σ, ἴσα εἰσί, καὶ τῷ θ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, ἀλλὰ καὶ τὰ ο π, π σ, ἴσα εἰσί, καὶ τῷ κατασκευῇ, ἄρα καὶ τὰ η φ, η υ, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν· εἴληπται δὲ, καὶ τῷ ὑπόθεσιν καὶ τὰ η θ, η κ, ἴσα, ἄρα καὶ τῷ β': τοῦ παρόντος αἱ θ φ, υ κ, δύο εἰσὶν αἱ τὰ ἴσα περιέχουσαι τόξα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αὖθις ἐπεὶ ὁ λ κ ξ, μέγιστος κύκλος διὰ τοῦ πόλου τοῦ σ τ, παραλλήλου διέρχεται, οἱ γὰρ ἐν τῇ αὐτῇ σφαί-

Theod: Sf: Lib. 3. Fig. 7.



σφαίρᾳ παράλληλοι τὸν αὐτὸν ἔχουσι πόλον, καὶ τῶν ά: τοῦ β': τὸ παρόντος, παύτως γε καὶ τῶν ι β': τοῦ ά: τὸ αὐτὸ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τέμνει, ὥστε καὶ ὁ σ τ, ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν λ κ ξ. ἀλλὰ καὶ εἰς δύο αὖισα αὐτὸν τέμνει (ἐαν γὰρ ἑκάτερος τῶν λ κ ξ, σ τ, ὁλοκλήρως εἶναι γεγραμμένος ἐννοηθῇ, παύτως γε ὁ σ τ, εἰς δύο αὖισα μέρη τὸν λ κ ξ, τέμνει κύκλον, καὶ τὸ χ, καὶ τὸ πόλῳ καὶ διάμετρον ἀντικείμενον· καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ χ, ἐπὶ τὸ λ, χωρῶν, καὶ περατέμενον ὑπὸ τοῦ καὶ διαμέτρου ἀντικειμένου τῷ χ, ἔλαττόν ἐστι, τὸ δὲ λοιπὸν τὸ ἀπὸ τοῦ χ, ἐπὶ τὸ ξ, μεῖζον, ὅτι γε καὶ τὸ σ λ ψ, τμῆμα τῆς σφαίρας ἔλαττόν ἐστι τοῦ σ γ ψ, μέγιστος ὁ δ β ζ, ὑποτίθεται, καὶ εἰς δύο ἴσα τῶν σφαῖραν τέμνει, τὰ δ λ ζ, δ γ ζ.) ἐλλήπται δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ χ σ, τμήματος τοῦ ψ χ σ, ὁλοκλήρου κύκλου, καθ' ὃ τὸ αὐτὸ τμῆμα, ὅπερ ἀπὸ τοῦ χ, ἀρχόμενον σημείου καὶ χωροῦν ἐπὶ τὸ σ, περατοῦται ὑπὸ τοῦ καὶ διαμέτρου ἀντικειμένου τῷ χ, εἰς ἄνισα τέμνεται· ἄρα, καὶ τῶν ά: τοῦ παρόντος ἡ υ χ, ὑποτείνουσα ἐλάττων ἐστὶ τῆς υ κ, ἐννεμένης, ἴση δὲ τῇ υ κ, δέδεικται ἡ θ φ, ἄρα ἡ υ χ, ἐλάττων ἐστὶ καὶ τῆς θ φ. ἀλλ' ὁ φ θ ο, παράλληλος, ἐλάττων ἐστὶ τοῦ σ τ ψ, καὶ τῶν ι ς': τοῦ β': τοῦ παρόντος, δῆλον ἄρα, ὅτι τὸ φ θ, τόξον τὸ ὑπὸ τῆς φ θ, μείζονος ὑποτεινόμενον, μείζονός ἐστι τῷ λόγῳ τοῦ υ χ, τόξου, τοῦ ὑπὸ τῆς ἐλάττονος υ χ, ὑποτεινομένου, ὁμοίως δὲ ὅμοιον, παύτων δ' ἐστὶν εἰπεῖν, ὅτι τὸ φ θ, τόξον πλειόνων ἐστὶ μοιρῶν, καθ' ἃς ὁ φ θ ο, ὁλόκληρος κύκλος εἰς 360 διαιρεῖται, τὸ δὲ υ χ, ἐλαττόνων, καθ' ἃς ὁ χ υ σ, ὁλόκληρος κύκλος εἰς τοσαύτας διαιρεῖται. ἔστι δὲ τῇ μὲν θ φ, ὅμοιον τὸ μ ν, κατὰ τῶν θ': τοῦ β': τοῦ παρόντος, τῇ δὲ υ χ, τὸ ν ξ, ἄρα τὸ μ ν, μεῖζόν ἐστι τοῦ ν ξ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι τὸ ὑποκείμενον. Δεῖ δὲ τὰ λαμβανόμενα σημεῖα ἐν τῇ αὐτῇ εἶναι ἡμισφαιρίῳ, ὡς τὰ θ, κ, κ.

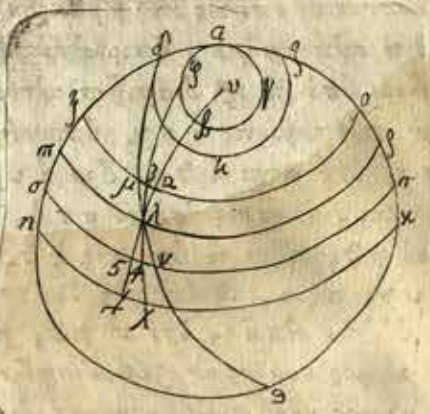
Πρότασις ς': Θεώρημα.

Ἐὰν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι δύο, καὶ τοῦ μὲν ἐλάττονος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, τοῦ δὲ μείζονα τέμνῃ, καὶ τοῦ τεμνομένου αὖθις ἕτερος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, καὶ ὁ τέμνει τὸ σημεῖον, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ἁπτομένου τοῦ μείζονος τοῦ παραλλήλου τόξα ἴσα, ὥστε ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἡμισφαιρίῳ, καὶ διὰ τῶν σημείων τῶν ληφθέντων τόξων παράλληλοι κύκλοι τοῖς ἐξ ἀρχῆς ἀχθῶσιν, οἱ καὶ ἀπολοῦσι τόξα ἀφαιρέσεσιν ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ ἁπτομένου τοῦ ἐλάττονος τοῦ ἐξ ἀρχῆς παραλλήλου, καὶ τὸ ἐγγύτερον τοῦ πόλου τοῦ πρώτου παραλλήλου ἐλάττονα ἔσται.

Ἐ"στωσαν κύκλοι παράλληλοι ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ οἱ α [illegible] ζ, καὶ τοῦ μὲν ἐλάττονος α β γ, ἁπτέσθω ὁ α η θ κ, μέγιστος κύκλος κατὰ [illegible] τοῦ μείζονος δ ε ζ, τεμνέτω κατὰ τὸ δ, καθ' ὃ ἁπτέσθω τοῦ αὐτοῦ ὁ δ η θ, καὶ τῆς περιφερείας ληφθήτωσαν ἴσα τόξα τὰ λ μ, λ ν, καὶ διὰ τῶν μ, λ, ν, σημείων ἀχθήτωσαν

παράλληλοι οἱ ξμο, πλρ, σνκ, τέμνοντες τὸν αηθκ, καὶ τὰ ξπσ, σημεῖα. Λέγω δὴ τὰ πξ, πσ, τόξα ἄνισα εἶναι, καὶ τούτων τὸ πξ, ἔλαττον εἶναι τοῦ πσ, ὡς ἐγγύτερον τῷ υ, πόλῳ. Διὰ τοῦ λ, τοίνυν σημείου, τῆς κοινῆς τῶν λοξοτέρων τόξων ἀφῆς γραφήτωσαν δύο κύκλοι μέγιστοι, ὁ μὲν ἀπτόμενος τοῦ αβγ, ἐλάττονος τῶν παραλλήλων, καὶ τὸ φ, ὁ δὲ διὰ τοῦ υ, πόλου τῶν αὐτῶν διερχόμενος, οἷοι οἱ φλχ, υλψ. καὶ ἐπεὶ ὁ υλψ, διὰ τοῦ πόλου τῶν παραλλήλων διέρχεται, παντωσγε καὶ τῶν ιβ': τοῦ ά: τοῦ παράντος δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτοὺς τέμνει. ἔλληπται δὲ ἐπὶ τῆς αὐτοῦ περιφερείας τὸ λ, σημεῖον, καὶ τοῦτο ἄρα ἔστιν ὁ ἕτερος πόλος τῶν αὐτῶν παραλλήλων, διὰ τὸ ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἡμισφαιρίῳ μετὰ τοῦ υ, πόλου, καὶ μὴ κατὰ διάμετρον ἀλλήλοις αὐτοῖς εἶναι, ἀπὸ δὲ τοῦ ληφθέντος λ, ἤχθησαν τόξα μεγίστων κύκλων ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ πξμο, καὶ σντ, παραλλήλους τὰ λ2, λ3, λμ, λν, λ4, λ5, ἄρα καὶ τῶν κβ': τοῦ β': τοῦ παράντος τὸ λ2, ὡς διὰ τοῦ πόλου υ, διερχόμενον ἐλάχιστόν ἐστι, τὸ δὲ λ3, ἔλαττον τοῦ λμ. ὡσαύτως καὶ τὸ ἑτέρου τὸ μὲν λν, μέγιστόν ἐστιν, ὡς διὰ τοῦ ἑτέρου πόλου τῶν αὐτῶν παραλλήλων διερχόμενον, τὸ δὲ λ4, ἔλαττον τοῦ λ5. Λοιπὸν ἐπεὶ ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ δύο εἰσὶ κύκλοι μέγιστοι οἱ δλθ, φλχ, τεμνόμενοι, κατὰ τὸ λ, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς τοῦ δλθ, περιφερείας εἴληπται τόξα ἴσα τὰ λμ, λν, καὶ διὰ τῶν μ, ν, παράλληλοι ἤχθησαν κύκλοι οἱ ξμο, σντ, παντωσγε κατὰ τὸ γ': τοῦ παράντος οἱ αὐτοὶ παράλληλοι κύκλοι ἀφαιροῦσιν ἀπὸ τοῦ φλχ, τόξα ἄνισα τὰ λ3, λ4, καὶ τὸ λ3, ἔλαττόν ἐστι, τοῦ λ4. (ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διήκτις διὰ τοῦ λ, σημείου ἐννοηθῇ ἡγεμών, δῆλον, ὅτι τῷ υ, προσεγγίζει τῷ πόλῳ, καὶ τὸ τοῦ ξμο, ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον συμπεσεῖται τῇ αὐτῇ ἀ- ιφ, διὰ τὸ μεῖζον τὸ μὲν λ3, ἴσον ἐστὶ τῷ πξ, τὸ δὲ λ4, τῷ πσ, κατὰ τὸν ιβ'. τοῦ β': τοῦ παράντος, ἄρα, τὸ πξ, ἔλαττόν ἐστι τοῦ πσ, ὅπερ ἔδει τὸ ὑποκείμενον.

Theod: Sf: Lib. 3. Fig. 8.



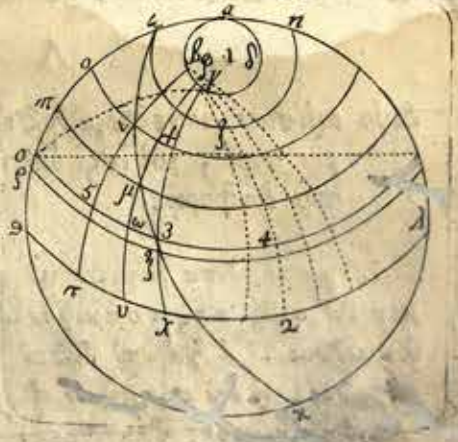
Πρό-

Πρότασις Ζ'. Θεώρημα.

Ε'αν ὦσιν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι δύο, ὧν τοῦ μὲν ἐλάττονος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, τὸν δὲ μείζονα τέμνῃ, καὶ τοῦ τεμνομένου αὖθις ἕτερος κύκλος μέγιστος ἅπτηται, καθ' ὃ τέμνεται σημεῖον. ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ἁπτομένου τοῦ μείζονος τῆς παραλλήλου τόξα ἴσα, ὥστε ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι ἡμισφαιρίῳ, καὶ διὰ τῆς σημείων τῆς ληφθέντων τόξων κύκλοι μέγιστοι ἀχθῶσιν ἁπτόμενοι τοῦ ἐλάττονος τῆς παραλλήλου, οἱ κύκλοι δηλονότι αὐτοῖς τόξα ἐναπολήψονται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου τῆς παραλλήλου, τῆς ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ, καὶ τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς διερχομένων κύκλων διὰ τῆς περάτων τοῦ ἐγγύτερον τοῦ πόλου ὄντος τόξον μείζον ἔσται.

Ἐστωσαν ἐν τῇ αὐτῇ σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοι οἱ α β γ δ, ε ζ η. καὶ τοῦ μὲν α β γ, ἐλάττονος ἁπτέσθω ὁ α θ κ λ, μέγιστος κύκλος, τὸν δὲ μείζονα ε ζ η, τεμνέτω ὁ αὐτὸς κατὰ τὸ ε, καθ' ὃ ἁπτέσθω τοῦ αὐτοῦ ε ζ η, ὁ ε μ κ, μέγιστος, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθήτωσαν ἴσα τόξα τὰ μ ν, μ ξ, ὥστε εἶναι ἄμφω τὰ ληφθέντα ταῦτα τόξα ἐν τῷ αὐτῷ θ α λ, ἡμισφαιρίῳ, καὶ διὰ τῶν ν, μ, ξ, σημείων ἀχθήτωσαν κύκλοι μέγιστοι οἱ τ ν β, υ μ φ, χ ξ γ, ἁπτόμενοι τοῦ α β γ δ, ἐλάττονος τῆς παραλλήλων, κατὰ τὰ β, φ, γ, σημεῖα. ἔστω δὲ καὶ μέγιστος τῶν παραλλήλων ὁ θ χ λ. Λέγω ὅτι τῶν τ ν β, υ μ φ, χ ξ γ, μεγίστων κύκλων ἐναπολαμβάνει τόξα ἐπὶ τῆς τοῦ θ χ λ, παραλλήλου τὰ τ υ, υ χ, καὶ τὸ τ υ, τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν τ ν β, υ μ φ, μεγίστων κύκλων τῆς διὰ τῶν μ, ν, σημείων διεχόμενον τὸ μ ν, τόξου, τοῦ ἐγγύτερον ὄντος τοῦ ι, πολλαπλάσιον εἶναι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 9.



Γεγράφθωσαν γὰρ διὰ τῶν ν μ ξ, ληφθέντων σημείων κύκλοι παράλληλοι τοῖς οἰς ἀρχῆς, οἱ ν ο μ π, ξ ρ [illegible] καὶ ἐπεὶ, καὶ τοῦ αὐτοῦ, τὸ ρ π, μείζονός ἐστι τοῦ π σ. [illegible] τὸ σ π, ἴσον τῷ π υ, καὶ γεγράφθω ὁ 3 σ. Δέδεικται δὲ [illegible] τὸ μ ψ, ἴσον ἐστὶ τῷ π ρ, τὸ δὲ μ ω, τῷ π σ, καὶ τοῦ ι β': τὸ β': τὸ παρόντος, τὸ δὲ π ρ, π [illegible] καὶ τοῦ καὶ κοινοῦ, ἄρα καὶ τὸ μ ψ, μ ω, ἴσα ἐστίν, ἐλήφθαι δ' [illegible] μ, ἴσα ἄρα καὶ τοῦ β': τὸ παρ: αἱ ν ψ, ω ξ, ὑποτείνουσαι ἴσαι εἰσὶ ν. Λοιπὸς μείζονος κύκλος ἁπτόμενος τοῦ α β γ δ, παραλλήλου κατὰ τὸ χ, ἐστιν.

πόλυ τῇ αὐτῇ παραλλήλυ, δῆλον, ὅτι τὸν ζσγ, παράλληλον πλαγίως τέμνει, ὥστε ὁ ζσγ, παράλληλος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδυ τῇ χγ 2, μεγίστυ κύκλυ ἐγκλινόμενός ἐστι πρὸς τὸ γ, σημεῖον. μέγιστος δὲ τῶν παραλλήλων ἐστὶν ὁ θχλ, ἄρα ὁ χγ 2, μέγιστος κύκλος δίχα ὑπ' αὐτῆ τέμνεται κῇ τὰ χ 2, σημεῖα, ὡς δέδεικται πρότ: ί: τῆ α: τῆ παρόντος, κῇ τὸ χγ 2, τόξον ἡμικυκλιόν ἐστιν, ὥστε ζγ 4. ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίυ, καὶ ἑπομένως ὁ ζσγ, παράλληλος εἰς δύο αἴσα τὸν χγ 2, τέμνει κύκλον. εἴληπται δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ζσγ, τόξου τὸ ω, σημεῖον, καθ' ὃ τὸ αὐτὸ ζσγ, τόξον εἰς αἴσα τέμνεται, ἄρα κῇ τιῶ α: τοῦ παρόντος, ἡ ωζ, ὑποτείνουσα ἐλάττων ἐστὶ τῆς ωξ. ἀλλὰ τῇ ωξ, ἴση ἐστὶν ἡ ψν, ὡς δέδεικται, ἄρα καὶ ἡ ψν, μείζων ἐστὶ τῆς ωζ. ἐπεὶ δὲ ὁ ψνο, παράλληλος ἐλάττων ἐστὶ τῇ ζσγ, παντως γε ἡ νψ, ὑποτείνουσα, μείζονα τῷ λόγῳ τόξον ὑποτείνει τῇ ψνο, παραλλήλυ, ἥπερ ἡ ωζ, τῇ ζσγ, παραλλήλυ. ἔχει ἄρα ὅμοιά ἐστι τὰ νψ, ωζ, τόξα, ἀλλὰ μᾶλλον τὸ νψ, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸν ψνο, κύκλον, ἢ τὸ ωζ, πρὸς τὸν ζσγ. ἀλλὰ τὸ μὲν νψ, ὅμοιόν ἐστι τῷ τυ, τὸ δὲ ωζ, τῷ υχ, κῇ τιῶ ι β': τῆ β': τῆ παρ: ἄρα καὶ τὸ τυ, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸν θχ, κύκλον, ἢ τὸ υχ, τῇ δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μείζόν ἐστιν, ἄρα τὸ τυ, μείζόν ἐστι τῆ υχ, ὅπερ ἰῶ τὸ ὑποκειθέν.

Λ Η΄ Μ Μ Α.

Δύο ἀνίσων μεγεθῶν δοθέντων, μέσον τινῶν λόγων, σύμμετρον ἑτέρῳ τινί, μὴ ἴσῳ ὅμοιον τῇ τῆ μείζονος τῶν δοθέντων πρὸς τὸ ἔλαττον διαφορᾷ.

Ἔστωσαν ἄνισα μεγέθη τὰ αβ, αγ. καὶ ζητείσθω μέγεθος, ὥστε εἶναι μέσον μὲν τῶν αβ, αγ, σύμμετρον δὲ τῷ δοθέντι δ. Ἐπεὶ δὲ πότε δίχως ἐνδέχεται ὑποκεῖσθαι. ἢ γὰρ τὸ δοθὲν μέγεθος, ᾧ ὀφείλει σύμμετρον εἶναι τὸ ζητούμενον, ἔλαττόν ἐστι τῆς βγ, διαφορᾶς, ἢ γοῦν μεῖζον. κείσθω πρῶτον ἔλαττον, οἷον τὸ δ. διπλασιαθέντα δὴ τὸ δ. ἔστιπλασιαθέντα, ἢ καθ' ἕλλον τινὰ πολλαπλασιασθέντα ἐκείσθω μεῖζον, ὥστε γενέσθαι τὸ ε, μέγεθος ὡσπερ μεῖζον τῆ αγ, ἢ τοῦτο ἔσαι τὸ ζητούμενον. ὅτι μὲν γὰρ ἴσον ἐστὶ τῶν αβ, αγ, δῆλον· εἰ γὰρ μὴ, ἔσαι πάντως μὴ τῆ αβ. ἀφαιρεθέντος δὲ ἀπ' αὐτῆ τῆ δ, ἄπαξ, τὸ ἐναπολειπόμενον τῆ αγ διὰ τὸ ἔλαττον εἶναι τὸ δ, τῆς βγ, διαφορᾶς, ἢ ἐποίησεν ὡσπερ μεῖζον τῆ αγ, τὸ διρεθὲν ε, ἀλλὰ μᾶλλον τὸ ἐναπολειπόμενον,

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 10.

μενον, ὑπερέθη δὲ τὸ ε, καὶ πρώτως μεῖζον, καπὲ τὴν καπασκδὴν, ὅπερ ἄτοπον, ἐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τῆ αβ, ἀλλ' ἔλαττον τὸ αὐτό ε, γέγονε δὲ καὶ μεῖζον τῆ αγ, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ι, τῶν αβ, αγ, δοθέντων, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι: Ὅτι δὲ καὶ σύμμετρόν ἐστι τῷ δ, ἀδήλια ἐστὶν ἀμφιβολία, τὸ γὰρ ε, πολλαπλασιαζομένου τῆ δ, γέγονεν, ὥστε τὸ αὐτὸ ἄμφω μετρεῖται μέτρῳ, καὶ πότε ἐστὶ τὸ συγκριτικὸν τῶν συμμέτρων μεγεθῶν, καὶ τὸν β': ὅρον τῆ ι: τῆ στοιχειωτῆ. ἀλλὰ δὴ κείσθω τὸ δοθὲν μέγεθος, ᾧ τινι δέον τὸ ζητούμενον σύμμετρον εἶναι, μεῖζον τῆς βγ, διαφορᾶς, οἷον τὸ ζη. καὶ διαιρεθήτω εἰς δύο, καὶ εἰς τέσσαρα, καὶ εἰς ὀκτὼ, καὶ εἰς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν, τῆς τομῆς ἀεὶ ἐν μέσῳ γινομένης, ἕως οὗ τὸ ἐναπολειφθὲν ἔλαττον ἀναφανῇ τῆς βγ, διαφορᾶς. εἰπὰ διπλασιαθήτω, ἢ τριπλασιαθήτω τὸ αὐτὸ, καὶ ἄλλως πως αὐξηθήτω, ὥστε τὸ γενόμενον πρώτως μεῖζον εἶναι τῆ αγ, ὡς τὸ κ. καὶ τοῦτο ἔσται τὸ ζητούμενον κατὰ τὰ εἰδη εἰρημένα. ἔσται γὰρ πάντως καὶ μέσον, τῶν αβ, αγ, εἰ γὰρ μὴ, τὸ αὐτὸ ἔψεται ἄτοπον, ὃ καὶ πρότερον, καὶ πρὸς τοῦτο σύμμετρον τῷ ζη. καὶ γὰρ τὰ ἤδη εἰρημένα, σύμμετρόν ἐστι πηλίκῳ τινὶ μέρει τῆ ζη, ᾧ τινι σύμμετρόν ἐστι, καὶ τὸ ζη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

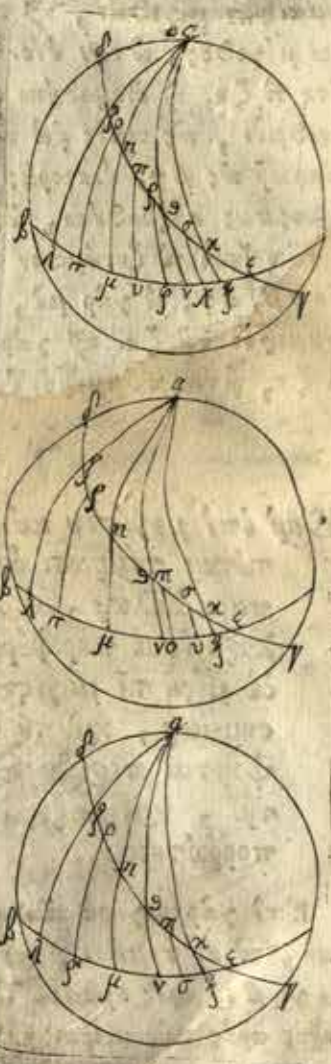
Πρότασις Η'. Θεώρημα.

Ε'αν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ᾖ τῆς παραλλήλου, καὶ τέτταρα τέμνωσι δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῆς παραλλήλου, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τὰς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ ἴσαι περιφέρειαι ἀπολήφθῶσι, μὴ ἄσαι ἑξῆς, ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὲ μέρη τοῦ μεγίστου τῆς παραλλήλου κύκλου. διὰ δὲ τῆς γεμομένης σημείου, καὶ τοῦ πόλου μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, αἱ ἴσαι ἀπολήψονται περιφέρειαι τοῦ μεγίστου τῆς παραλλήλου τὰς μεταξὺ αὐτῆς, καὶ μείζονα ἀεὶ τοῦ ἐγγίον τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τῆς πορρώτερον.

Ε'πὶ γὰρ μεγίστου κύκλου περιφερείας τοῦ αβγ, ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων, τὸ α, σημεῖον, καὶ τὸν αβγ, κύκλον δύο μέγιστοι κύκλοι τεμνέτωσαν οἱ δε γ, βε, πρὸς ὀρθὰς. ὧν ὁ μὲν βε, εἰς ἔσω τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ δ γ, λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους. ἀπὸ δὲ τοῦ δε γ, λοξοῦ, ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν, μὴ οὖσαι ἑξῆς, ἐπὶ τὰ αὐτὰ δὲ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων βε, αἱ ζη, θκ, καὶ διὰ τῶν ζ, η, θ, κ, [illegible] μείων, καὶ τοῦ α, πόλου μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ αζλ, αημ, αθν, α[illegible]. Λέγω, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ λμ, περιφέρεια τῆς νξ, περιφερείας. Η' γὰρ κθ, ἤτοι σύμ[illegible] ἐστι ταῖς ζη, θκ, ἢ ἄ. Ε'στω πρότερον σύμμετρος, καὶ διῃρήθωσαν αἱ ζη, θκ, εἰς [illegible] κοινῷ αὐτῶν μέτρῳ, καὶ τὰ ο, π, ρ, σ, σημεῖα, καὶ διὰ ἐκ[illegible] τῶν γεγράφθωσαν κύκλοι μέγιστοι, οἱ οτ, πυ, ρφ, σχ. Ε'π[illegible]

π ρ, ρ θ, θ σ, σ κ, περιφέρειαι ἐξῆς ἀλλήλαις ἴσαι εἰσί, καὶ τῷ ε΄. τῶ παρ. παντως γε αἱ λ τ, τ μ, μ υ, υ φ, φ ν, ν χ, χ ξ, ἐξῆς μείζονες ἀλλήλων εἰσὶν, ἀρχόμεναι ἀπὸ μείζονος τῆς λ τ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ μὲν λ τ, τῆς ν χ, ἡ δὲ τ μ, τῆς χ ξ, ἡ ὅλη ἄρα μ λ, ὅλης τῆς ν ξ, μείζων ἐστίν. Μὴ ἔστω δὴ ἡ ν θ, ταῖς ζ κ, θ κ, σύμμετρος. Λέγω ὁμοίως μείζονα εἶναι τῶν λ μ, τῆς ν ξ. Εἰ γὰρ μὴ, ἔσται ἤτοι ἐλάσσων, ἢ ἴση. Ἔστω, εἰ δυνατὸν, πρότερον ἐλάσσων ἡ λ μ, ν ξ. Καὶ κείσθω τῇ λ μ, ἴση ἡ ν ο. καὶ διὰ τοῦ α, πόλου καὶ τοῦ ο, γεγράφθω μέγιστος ὁ π ο. ξ. Ἐπεὶ δὲ ἴσων περιφερειῶν ὁμολογουμένων αὐτίσων, τῇ κ θ, θ π, καὶ θ, εἰλήφθω τις περιφέρεια ἡ θ ρ, διὰ τοῦ αὐτοῦ λήμματος, μείζων μὲν οὖσα τῆς θ π, ἐλάσσων δὲ τῆς θ κ, σύμμετρος δὲ τῇ ν θ. καὶ κείσθω τῇ θ ρ, ἴση ἡ σ ν, καὶ διὰ τῶν ρ, σ, σημείων, καὶ α, πόλου γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι οἱ σ υ, ρ τ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ σ ν, τῇ θ ρ, καὶ τῷ δεῖξιν τοῦ α΄. μέρους, καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ν θ, ἑκατέρα τῶν σ ν, θ ρ, ἡ τ μ, ἄρα τῆς ν υ, μείζων ἐστὶν, ὥσπερ καὶ τῆς ν ο, ἡ ν υ, πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ λ μ, τῆς ν ο, ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἡ λ μ, τῆς ν ξ. Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἴση. Εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω ἴση, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ζ κ, θ κ, δίχα κατὰ τὰ ο, π, σημεῖα. καὶ διὰ τῶν ο, π, σημείων, καὶ τοῦ α, πόλου, μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ο ρ, π σ. ἐπεὶ οὖν αἱ ζ ο, ο κ, ἐξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ ἄρα λ ρ, ρ μ, ἐξῆς ἀλλήλων μείζονές εἰσι, καὶ τῷ αὐτοῦ, καὶ τῷ ε΄. τῶ παρόντος, ἀρχόμεναι ἀπὸ μείζονος τῆς λ ρ, μείζων ἄρα ἡ λ ρ, τῆς ρ μ. ἡ ἄρα λ μ, τῆς μ ρ, μείζων ἐστὶν ἢ διπλῆ. Πάλιν ἐπεὶ αἱ θ π, π κ, ἐξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ ν σ, σ ξ, ἄρα ἐξῆς ἀλλήλων μείζονές εἰσιν, ἀρχόμεναι ἀπὸ μείζονος τῆς ν σ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ν σ, τῆς σ ξ. ὅσῳ ἡ ν ξ, τῆς ν σ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ λ μ, τῇ ν ξ, ὧν ἡ λ μ, τῆς μ ρ, μείζων ἐστὶν ἢ διπλῆ, ἡ δὲ ν ξ, τῆς ν σ, ἐλάσσων ἐστὶν ἢ διπλῆ, ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ λ ρ μ, τῆς ν σ, ἴσων ὑποκειμένων τῶν ο π, θ π, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ λ μ, τῇ ν ξ. ἐδείχθη δὲ οὐδ' ἐλάσσων, ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ λ μ, τῆς ν ξ, περιφερείας τῆς ν ξ, περιφερείας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 11.



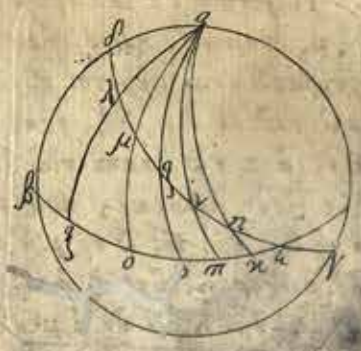
Πρό-

Πρότασις Θ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ μείζονος κύκλου περιφερείας ὁ πόλος ᾖ τῆς παραλλήλου, καὶ τούτου τέμνωσι δύο κύκλοι πρὸς ὀρθὰς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῆς παραλλήλου, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μείζονος τῆς παραλλήλου, διὰ δὲ τῆς σημείου καὶ τοῦ πόλου τῆς παραλλήλου μείζονες κύκλοι γραφῶσιν, ἔσαι ὡς ἡ τοῦ μείζονος τῆς παραλλήλου περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τοῦ ἀπ' ἀρχῆς μείζονος κύκλου, καὶ τοῦ ἐξῆς διὰ τοῦ πόλου, πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν, τὴν μεταξὺ τῆς αὐτῆς κύκλου, ὅπως ἡ ἐξῆς τοῦ μείζονος τῆς παραλλήλου, ἡ μεταξὺ τῆς διὰ τοῦ πόλου καὶ τῆς ληφθέντων σημείων, μείζονος κύκλου, πρὸς ἐλάττονά τινα περιφέρειαν τῆς τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφερείας, τῆς μεταξὺ τῆς ληφθέντων σημείων.

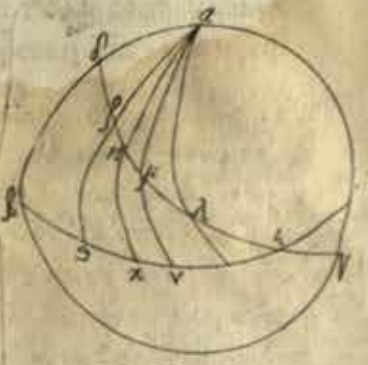
*Ἐπὶ γὰρ μείζονος κύκλου περιφερείας τοῦ αβγ, ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ α, σημεῖον, καὶ τὸν αβγ, δύο κύκλοι τεμνέτωσαν πρὸς ὀρθὰς μείζονοι οἱ δεγ, βε. ὧν ὁ μὲν βε, εἷς ἔστω τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ δεγ, λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους· ἐπὶ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου δεγ, εἰλήφθωσαν δύο τυχόντα σημεῖα τὰ ζ, η, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μείζονος τῶν παραλλήλων βε, καὶ διὰ τῶν ζ, η, καὶ α, πόλου γεγράφθωσαν μείζονοι κύκλοι οἱ αζθ, αηκ. Λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ βθ, περιφέρεια πρὸς τὴν δζ, περιφέρειαν, οὕτως ἡ θκ, περιφέρεια πρὸς ἐλάττονά τινα περιφέρειαν τῆς ζη, περιφερείας. ἤτοι γὰρ ἡ ζη, τῇ δζ, σύμμετρός ἐστιν, ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον σύμμετρος, καὶ διῃρήσθωσαν εἰς τὰ μέρη τὰ μετροῦντα αἱ δζ, ζη, καὶ τὰ λ, μ, ν, σημεῖα, καὶ διὰ ἑκάστου τούτων καὶ τοῦ α, πόλου γεγράφθωσαν μείζονοι κύκλοι οἱ λξ, μο, νπ. Ἐπεὶ οὖν αἱ δλ, λμ, μζ, ζν, νη, ἐξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ ἄρα βξ, ξο, οθ, θπ, πκ, ἐξῆς μείζονες ἀλλήλων εἰσὶ, καὶ τὴν ἐγγὺς τοῦ παρόντος, ἀρχόμεναι ἀπὸ μείζονος τῆς βξ. καὶ ἔστι τὸ μὲν πλῆθος τῶν βξ, ξο, οθ, ἴσον τῷ πλήθει τῶν δλ, λμ, μζ, τὸ δὲ πλῆθος τῶν θκ, πκ, ἴσον τῷ πλήθει τῶν ζν, νη. ἡ βω, ἄρα πρὸς τὴν δζ, μίαν λόγον ἔχει, καὶ τὸν ζ': ὅρον τοῦ ε: τοῦ στοιχ: ἤπερ ἡ θκ, πρὸς τὴν ζη. ἐὰν ἄρα ποιῶμεν ὡς τὴν βω πρὸς τὴν δζ, οὕτω τὴν θκ, πρὸς ἄλλην τινὰ, ἔσαι πρὸς ἐλάττονα τῆς ζη. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βθ, περιφέρεια πρὸς τὴν δζ, περιφέρειαν, οὕτως ἡ θκ, πρὸς ἐλάττονά τινα περιφέρειαν τῆς ζη.

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 12.

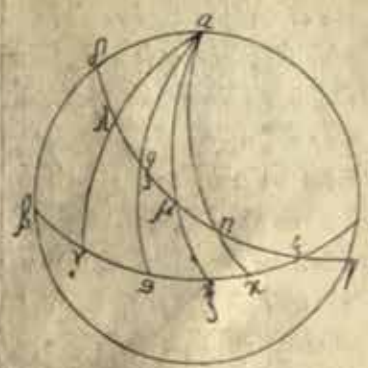


Μὴ ἔστω δὴ ἡ ζν, τῇ δζ, σύμμετρος. Λέγω, ὅτι καὶ ὅπως ἐστὶν ὡς ἡ βϑ, περιφέρεια πρὸς τὴν δζ, περιφέρειαν, ὅπως ἡ ϑκ, περιφέρεια πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ζν, περιφερείας. εἰ γὰρ μή, ἔσται ὅπου πρὸς μείζονα τῆς ζν, ἢ πρὸς αὐτήν. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, πρὸς μείζονα τῆς ζν, τὴν λζ. καὶ ξ΄ιῶν ἴσων αὐτῇσων περιφερειῶν τῶν λζ, ζν, ζδ, εἰλήφθω τις περιφέρεια ἡ ζμ, τῆς μὲν ζλ, ἴσα ἐλάσσων, τῆς δὲ ζν, μείζων, καὶ τῇ ζδ, σύμμετρος καὶ τὸ λῆμμα τῆς ἀνωτέρω· καὶ διὰ τοῦ μ, καὶ τοῦ α, πόλῳ γεγράφθω μέγιστος κύκλος ὁ μν. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ζμ, τῇ ζδ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ βϑ, πρὸς τὴν δζ, οὕπως ἡ ϑν, πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ζμ, κατὰ τὸν ῥηθέντα ὅρον. ὡς δὲ ἡ βϑ, πρὸς τὴν δζ, οὕπως ἐστὶν ἡ ϑκ, πρὸς τὴν ζλ, κατὰ τὴν ὑπόθεσιν, καὶ ὡς ἄρα ἡ ϑκ, πρὸς τὴν ζλ, οὕπως ἐστὶν ἡ ϑν, πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ζμ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ϑκ, πρὸς τὴν ϑν, ὅπως ἡ ζλ, πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ζμ, ἐλάσσων δὲ ἡ ϑκ, τῆς ϑν, ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ λζ, τῆς ἐλάσσονος τῆς ζμ, ἀλλὰ καὶ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον. ἡ γὰρ ἐστιν ὡς ἡ βϑ, πρὸς τὴν δζ, ὅπως ἡ ϑκ, πρὸς μείζονά τινα περιφέρειαν τῆς ζν, περιφερείας. Λέγω δή, ὅτι οὐδὲ πρὸς αὐτήν. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω ὡς ἡ βϑ, πρὸς τὴν δζ, ὅπως ἡ ϑκ, πρὸς τὴν ζν.

Tbeod. Sf. Lib. 3. Fig. 11.



Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ϑζ, ζν, δίχα κατὰ τὰ λ, μ, σημεῖα, καὶ διὰ ἑκατέρου τούτων καὶ τοῦ α, πόλῳ γεγράφθωσαν μέγιστοι κύκλοι, οἱ αλν, αμξ. Ἐπεὶ οὖν αἱ δλ, λζ, ἐξῆς ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, αἱ βν, ἄρα ν ϑ, κατὰ τὴν ς΄ τοῦ παρόντος, ἐξῆς μείζους εἰσὶν ἀλλήλων, ἀρχόμεναι ἀπὸ μιγίστης τῆς βν. ἡ βϑ, ἄρα τῆς ϑν, μείζων ἐστὶν ἢ διπλῆ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ϑκ, τῆς ϑξ, ἐλάσσων ἐστὶν, ἢ διπλῆ. Ἔστιν δὲ ἡ μὲν βϑ, τῆς ϑν, μείζων ἐστὶν ἢ διπλῆ, ἡ δὲ ϑκ, τῆς ϑξ, ἐλάσσων ἢ διπλῆ, ἡ ρ΄α, ἄρα πρὸς τὴν ϑν, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ κϑ, πρὸς τὴν ϑξ, καὶ τὸν ζ΄ ὅρον τοῦ ε΄ στοιχείου· καὶ ἐναλλὰξ ἡ βϑ, ἄρα πρὸς τὴν ϑκ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ νϑ, πρὸς τὴν ϑξ. ὡς δὲ ἡ βϑ, πρὸς τὴν ϑκ, ὅπως ἐστὶν ἡ δζ, πρὸς τὴν ζλ, ἡ δὲ νϑ, ἄρα πρὸς τὴν ϑξ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ δζ, πρὸς τὴν ζλ, τουτέστιν ἡ λζ, πρὸς τὴν ζμ. ὡς δὲ ἡ δζ, πρὸς τὴν ζν, ὅπως ἐστὶν ἡ λζ, πρὸς τὴν ζμ, τουτέστιν ἡ ϑν, πρὸς τὴν λζ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ϑξ, πρὸς

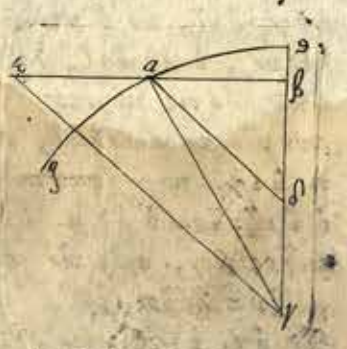


πρὸς τὴν ζμ. ἐὰν ἄρα ποιῶμεν, ὡς τὴν νθ, πρὸς τὴν λζ, οὕτω τὴν θξ, πρός ἄλλην τινὰ, ἔσται πρὸς μείζονα τῆς ζμ, περιφερείας, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. ἔστιν, ἄρα ὡς ἡ βθ, πρὸς τὴν δζ, οὕτως ἡ θκ, πρὸς ἐλάσσονα τῆς ζν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα τῆς ἑπομένης Ι΄: Προτάσεως.

Ἐὰν ἀπὸ ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τινὸς βιγώνου δίθεῖα ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον αὐτῇ πλευράν, ὅλη αὖτη πλευρὰ, ἐφ' ἣν πίπτει ἡ ἀχθεῖσα δίθεῖα, μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸ κατὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν μέρος, ἤπερ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

Ἔστω δὴ βίγωνον ὀρθογώνιον τὸ αβγ, καὶ ἀπὸ τῆς πρὸς τῷ α, τούτε γωνίας ἀχθήτω δίθεῖα ἡ αδ, ἐπὶ τὴν ἀπεναντίον πλευρὰν βγ. Λέγω τὴν βγ, ὅλην πλευρὰν τῆ βιγώνῳ πρὸς τὴν βδ, μέρος ὄσαν αὐτῆς, μείζονα λόγον ἔχειν, ἤπερ τὴν ὑπὸ αδβ, γωνίαν πρὸς τὴν ὑπὸ αγβ. Ἀχθήτω ἡ γε, παράλληλος τῇ αδ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ, ὡς ἀπὸ κέντρου, διαστήματι τῷ αγ, ἀναγεγράφθω κύκλος ὁ ζαθ, ὃς τεμεῖ τὴν μὲν βγ, πλευρὰν, ἐκβληθεῖσαν ἐκτὸς τοῦ β, κατὰ τὸ θ, διὰ τὸ μείζονα εἶναι τὴν αγ, ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν γωνίαν, τῆς βγ, ὑποτεινούσης τὴν ὀξεῖαν· τὴν δὲ γε, ὡς ὑποτείνουσαν τὴν ἀμβλεῖαν ὑπὸ εαγ, καὶ μείζονα τῆς γα, τεμεῖ δ' αὐτὸς μεταξὺ τῶν ε, καὶ γ, τουτ'ἔστι κατὰ τὸ ζ. Δείκνυται, κατὰ γὰρ τὴν ἐλάττω τῶν ς΄: τοῦ στοιχειωτοῦ, ὡς ἡ ὑπὸ ζγα, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ αγθ, οὕτως ὁ ζαγ, τομεὺς πρὸς τὸν αγθ, τομέα, ἀλλ' ἐπεὶ τὸ εγα, βίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ζαγ, τομέως, ἄρα καὶ τὴν ἡ: πρὸς τὴν ἡ: τοῦ αὐτοῦ, μείζονα λόγον ἔχει τὸ εγα, βίγωνον πρὸς τὸν αγθ, τομέα, καὶ πολλῷ μείζονα πρὸς τὸ αγβ, βίγωνον, ἤπερ ἡ ὑπὸ εγα, πρὸς τὴν ὑπὸ αγβ, γωνίαν, καὶ συνθέσει ἄρα τὸ ὅλον εγβ, βίγωνον πρὸς τὸ αγβ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ εγβ, γωνία, ἤτοι ἡ ὑπὸ αδβ, (ἴσαι γὰρ καὶ τὴν καὶ τὰ: τοῦ αὐτοῦ,) πρὸς τὴν ὑπὸ αγβ. ἀλλ' ὡς τὸ βίγωνον πρὸς τὸ βίγωνον, κατὰ τὴν ά: τοῦ ς΄: τοῦ αὐτοῦ, ἡ βε, βάσις πρὸς τὴν αβ, βάσιν, καὶ ἐπεὶ ἡ αδ, παράλληλός ἐστι τῇ εγ, ἔσται ὡς ἡ εβ, πρὸς τὴν αβ, κατὰ τὰ δ΄: τοῦ ἑνδεκάτου, οὕτως ἡ βγ, πρὸς τὴν βδ, ἡ βγ, ἄρα πρὸς τὴν βδ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ αδβ, γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ αγβ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

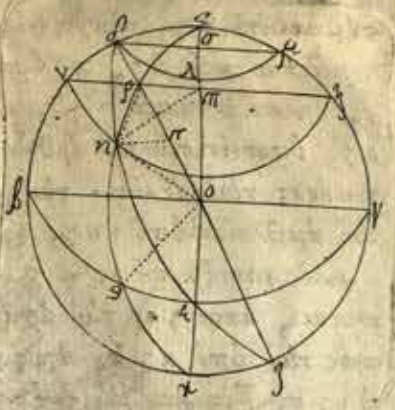


Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 14.

Πρότασις Ι': Θεώρημα.

Ἐὰν ἐπὶ μείζονος κύκλου ὁ πόλος ᾖ τῆς παραλλήλου, καὶ τούτων τεμνόντων δύο κύκλοι μέγιστοι πρὸς ὀρθάς, ὧν ὁ μὲν εἷς τῆς παραλλήλου, ὁ δ' ἕτερος λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος διὰ τῆς πόλου τῆς παραλλήλου διερχόμενος, τέμνῃ τὸν λοξόν, μεταξὺ τοῦ μείζονος τῆς παραλλήλου, καὶ οὗ ὁ λοξὸς ἅπτεται, ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, οὗ ἐφάπτεται ὁ λοξός, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τοῦ μείζονος τῆς παραλλήλου περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τοῦ τε ἀπ' ἀρχῆς μείζονος κύκλου, καὶ τοῦ ἐξῆς διὰ τῆς πόλου, πρὸς τὸν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν, τὸν μεταξὺ τῆς αὐτῆς κύκλων.

Ἐπὶ γὰρ μείζονος κύκλου περιφερείας τοῦ αβγ, ὁ πόλος ἔστω τῶν παραλλήλων τὸ α, σημεῖον, καὶ τὸν αβγ, τεμνέτωσαν δύο μέγιστοι κύκλοι πρὸς ὀρθὰς οἱ βεγ, δεζ, ὧν ὁ μὲν βεγ, μέγιστος τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ δεζ, λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ ανκ, διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων, τεμνέτω τὸν δεζ, μεταξὺ τοῦ πβεγ, καὶ οὗ ἐφάπτεται ὁ δεζ, οὗ δὲ ἐφάπτεται ὁ δεζ, ἔστω ὁ δλμ. Λέγω, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος βγ, πρὸς τὴν τοῦ δλμ, κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βϑ, περιφέρεια πρὸς τὴν δη, περιφέρειαν. Γεγράφθω γὰρ διὰ τοῦ η, παράλληλος κύκλος ὁ νηξ, καὶ ἔστωσαν κοιναὶ τῶν ἐπιπέδων τομαὶ αἱ ακ, δζ, βγ, νξ, δμ, ϑο, ηπ, ον, ηρ. Ἐπεὶ οὖν ἡ σφαῖρα μείζονος κύκλος ὁ αβγ,



Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 15.

κύκλους τινὰς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοὺς δλμ, νηξ, βεγ, διὰ τῶν πόλων πέμνει δίχα τέμνει γὰρ καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὸν τὸν μβ· τοῦ δ· τοῦ παρόντος, αἱ δμ, νξ, βγ, ἄρα διάμετροι τῶν δλμ, νηξ, βεγ, κύκλων, καὶ ὁ αβγ, ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς ἕκαστον τῶν δλμ, νηξ, βεγ, κύκλων. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι εἰσὶν οἱ δλμ, νηξ, βεγ, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα τις διῆκται ἡ ακ, ἡ ακ, μία ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἕκαστον τῶν δλμ, νηξ, βεγ, κύκλων, καὶ διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν ἡ ακ, τῆς σφαίρας ἐστὶ κατὰ τὸν ϑ· τοῦ αὐτοῦ· τὰ σ, π, ο, ἄρα στοιχεῖα, περὶ ἃ εἰσὶ τῶν δλμ, νηξ, βεγ. καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ δλμ, νηξ, βεγ, ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου τοῦ αβγ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ τομαὶ ἄρα αὐτῶν παράλληλοί εἰσιν, αἱ α α δμ, νξ, βγ, παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις, κατὰ τὸν ιε· τοῦ ια· τοῦ στοιχειώτου. Πάλιν ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ νηξ, βεγ,

ὑπὸ

ὑπό τινος ἐπιπέδου τῶν α ν κ, τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ν π, τῇ Θ ο. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἅπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ν π, π ρ, παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, τὰς β ο, ο Θ, εἰσὶ, μὴ οὔσαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἴσας γωνίας περιέχουσιν, καὶ τοῖς ἑξῆς τοῖς αὐτοῖς, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ν π ρ, γωνία τῇ ὑπὸ β ο Θ. καὶ ἐπεὶ αἱ ν ξ, δ ζ, ὀρθοί εἰσι πρὸς τὸν α β γ, κύκλον, καὶ ἡ τῆς ν ξ, δ ζ, κοινὴ τομὴ πάντως ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν α β γ, κύκλον, καὶ τοῖς ἑξῆς τοῖς αὐτοῖς, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομή ἐστιν ἡ ν ρ. αὕτη ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸν α β γ, κύκλον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ α β γ, κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας, καὶ τὸν γ': τοῦ αὐτοῦ ὅρον, ἅπτεται δὲ τῆς ν ρ, ἑκατέρα τῶν π ρ, ρ ο, οὖσαι ἐν τῷ τοῦ α β γ, κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ν ρ π, ν ρ ο, γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ α κ, τῇ ν ξ, ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα ὑπὸ ρ π ο, γωνία ὀρθή ἐστι, παντὸς γε ἡ ὑπὸ π ο ρ, ὀξεῖά ἐστι. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ο ρ, τῆς ρ π. Κείσθω οὖν τῇ π ρ, ἴση ἡ ρ τ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ν τ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ π ρ, τῇ ρ τ, κοινὴ δὲ ἡ ν ρ, δύο δὴ αἱ π ρ, ρ ν, δυσὶ ταῖς τ ρ, ρ ν, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ π ρ ν, ὀρθῇ τῇ ὑπὸ τ ρ ν, ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ν π, βάσει τῇ ν τ, ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ π ρ ν, ἰσόγωνον τῷ τ ρ ν, ἰσογώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ν π ρ, γωνία τῇ ὑπὸ ν τ ρ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ν π ρ, τῇ ὑπὸ Θ ο β, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ν τ ρ, τῇ ὑπὸ Θ ο β, ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἰσόγωνον τὸ ν ο ρ, ὀρθογωνίόν ἐστι καὶ τὸ ρ, καὶ διῆκταί τις ἡ ν τ, ἡ ο ρ, ἄρα κατὰ τὸ ἀνωτέρω λῆμμα, πρὸς τῷ ρ τ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ ρ τ ν, πρὸς τὴν ὑπὸ ρ ο ν, γωνίαν, ἴση δὲ ἡ μὲν ρ τ, τῇ ρ π, ἡ δὲ ὑπὸ ρ τ ν, γωνία τῇ ὑπὸ Θ ο β. καὶ ἡ ο ρ, ἄρα πρὸς τὴν ρ π, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὑπὸ β ο Θ, πρὸς τὴν ὑπὸ ρ ο ν. ἀλλὰ καὶ τῷ δ': τοῦ ς': τῶν στοιχείων, ὡς μὲν ἡ ο ρ, πρὸς τὴν ο π, οὕτως ἐστὶν ἡ ο δ, πρὸς τὴν δ σ, τουτ' ἔστιν ἡ δ ζ, πρὸς τὴν δ μ, ὡς δὲ ἡ ὑπὸ β ο Θ, πρὸς τὴν ὑπὸ ρ ο ν, γωνίαν, οὕτως ἐστὶν ἡ β Θ, περιφέρεια πρὸς τὴν δ ν, περιφέρειαν, κατὰ τὸν λγ': τοῦ αὐτοῦ, καὶ ἡ ζ δ, ἄρα πρὸς τὴν δ μ, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β Θ, περιφέρεια πρὸς τὴν δ ν, περιφέρειαν, καὶ ἔστιν ἡ μὲν δ ζ, διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ δὲ δ μ, διάμετρος τοῦ δ λ μ, κύκλου, ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τοῦ δ λ μ, κύκλου διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ β Θ, περιφέρεια πρὸς τὴν δ μ, περιφέρειαν.

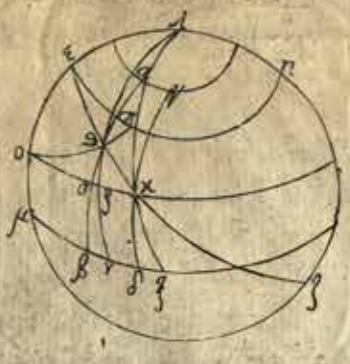
Πρό-

Πρότασις ΙΑ′. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι τοῦ αὐτοῦ τριῶν παραλλήλων ἐφάπτωνται, ὁμοίας ἀφαιροῦντες περιφερείας τριῶν παραλλήλων κύκλων μεταξὺ αὐτῶν. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἁπτόμενος τῶν ἀπ' ἀρχῆς ἐφάπτοιτο, καὶ τέμνῃ τοὺς αὐτοῖς ἐφαπτομένους μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, ἢ δ' οἱ ἀπ' ἀρχῆς ἐφάπτοιντο, ἡ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, ἣ ἐφάπτεται ὁ λοξός, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων κύκλου περιφέρεια, ἡ μεταξὺ τῶν τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἐφαπτομένων, πρὸς τὴν τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφέρειαν, τὴν μεταξὺ τῶν αὐτῶν κύκλων.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστοι κύκλοι οἱ αβ, γδ, τοῦ αὐτοῦ τριῶν παραλλήλων ἐφαπτέσθωσαν τοῦ αγ. καὶ τὰ α, γ, σημεῖα, ὁμοίας ἀφαιροῦντες περιφερείας τριῶν παραλλήλων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, ὁ εζ, μειζόνων ἁπτέσθω, ἢ ὧν οἱ αβ, γδ, ἅπτονται. καὶ τεμνέτω τοὺς αβ, γδ, μεταξὺ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ ἃ οἱ αβ, γδ, ἅπτονται, τοῦ αγ, κύκλου. Ἔστω δὲ μέγιστος μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων ὁ μβξ. ἃ δὲ ἅπτεται ὁ εζ, ἔστω ὁ ηθ. Λέγω, ὅτι ἡ διπλασίων τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τοῦ ηθ, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βδ, περιφέρεια πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν. Ἔστω γὰρ ὁ πόλος τῶν παραλλήλων, τὸ λ, σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ λ, καὶ ἑκάστου τῶν ε, θ, κ, σημείων, μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ λεμ, λθν, λκξ. καὶ ἐπεὶ τοῦ κ, παράλληλος κύκλος γεγράφθω ὁ οκ, διὰ δὲ τοῦ θ, μέγιστος ὁ θπ, ἁπτόμενος τοῦ ηθ, κατὰ τὸ π. Ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ δύο παράλληλοί εἰσι κύκλοι οἱ οκ, επη. καὶ γεγραμμένοι εἰσὶ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ εθκζ, νθπ, ἁπτόμενοι τοῦ επη, κατὰ τὰ ε, π, διὰ δὲ τοῦ θ, σημείου καὶ τοῦ λ, πόλου γέγραπται μέγιστος κύκλος ὁ λθρ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ορ, τῇ ρκ, καὶ τῷ ιβ′. τοῦ βδ′. κοινοῦ προσκειμένου καὶ ἡ ρσ, ἄρα τῆς ρκ, ἐλάττων ἐστίν, ἡ σκ, ἄρα τῆς κρ, ἐλάσσων ἐστὶν ἡ διπλῆ. ἀλλ' ἡ μὲν σκ, τῇ βδ, ἐστὶν ὁμοία, καὶ τῷ θ′. τοῦ αὐτοῦ. ἡ δὲ ρ, τῇ ξ[illegible] καὶ ἡ βδ. ἄρα τῆς νξ, ἐλάττων ἐστὶν ἡ διπλῆ· καὶ ἐπεὶ [illegible] ὁ ος πρὸς τὴν τοῦ ηθ, κύκλου διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ [illegible] περιφέρεια πρὸς τὴν τοῦ εθ, περιφέρειαν καὶ τὴν αὐτοῦ κύκλου περιφέρειαν, ἔχει δὲ ἡ μὲν περιφέρεια πρὸς τὴν τοῦ εθ, περιφέρειαν μείζονα λόγον, ἤπερ ἡ νξ,

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 16.

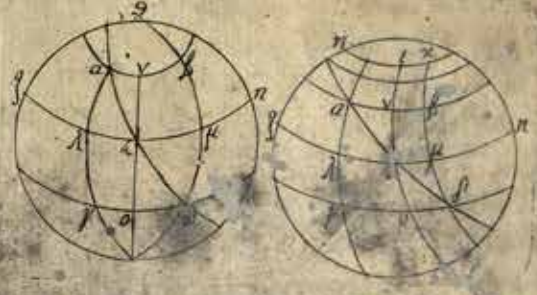


ἡ νξ, περιφέρεια πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν, καὶ τὴν θ′: τὰ παρ: καὶ ἡ τῆς σφαίρας ἄρα διάμετρος πρὸς τὴν τῦ επ, κύκλε διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ νξ, περιφέρεια πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν. καὶ τὰ διπλάσια τῶν ἡγουμένων, ἡ ἄρα διπλασία τῆς διαμέτρε τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τῦ επ, κύκλε διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τῆς νξ, περιφερείας διπλῆ πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν, ἡ δὲ τῆς νξ, περιφερείας διπλῆ πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν μείζω λόγον ἔχει ἤπερ ἡ βδ, περιφέρεια πρὸς τὴν θκ. ἡ γὰρ τῆς νξ, διπλῆ, μείζων ἐστὶ τῆς βδ. πολλῷ ἄρα ἡ διπλασίων τῆς διαμέτρε τῆς σφαίρας πρὸς τὴν τῦ επ, κύκλε διάμετρον, μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ βδ, περιφέρεια πρὸς τὴν θκ, περιφέρειαν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ΙΒ′: Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶσι μεγίστε τινὸς κύκλε πρὸς τοῖς μεγίστοις τῆς παραλλήλων, διὰ δὲ τῶν γινομένων σημείων γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι, ἢ διὰ τῶν πόλων τῶν παραλλήλων διερχόμενοι, ἢ τῦ αὐτῦ τῶν παραλλήλων ἐφαπτόμενοι, ἴσας ἀπολήψονται περιφερείας ἀπὸ τῦ μεγίστε τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι, οἱ αβ, γδ, μεγίστε τινὸς κύκλε τῦ αδ, περιφερείας τὰς αε, εδ, ἀφαιρήτωσαν ἴσας, πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ζεκ. καὶ διὰ τῶν α, ε, δ, μεγίστοι κύκλοι γεγράφθωσαν, οἱ ἄρα διὰ τῦ θ, πόλε διαβαίνουσιν, ἢ ἅπτονται τῦ κ, παραλλήλε. καὶ τετμήτωσαν τὸν μέγιστον παράλληλον ζεκ, καὶ τὰ λ, ε, μ, σημεῖα. Λέγω, ὅτι τὰ λε, εμ, τόξα ἴσα ἐστίν. Ἐπεὶ γὰρ τὰ αε, εδ, τόξα ἴσα ἐστί, παντὸς γε καὶ τὸν ις′: τῦ β′: τῦ παρόντος, οἱ αβ, γδ, παράλληλοι, ἴσοι εἰσί, καὶ καὶ τὸν ιζ′: τῦ αὐτῦ, τὰ λα, βμ, δμ, λγ, εν, εο, τόξα, ἴσα ἐστί, καὶ καὶ τὸν β′: τῦ παρόντ: αἱ αν, οδ, ἐπιζευγνύσαι τὰ εα, εν, εδ, εο, τόξα ἴσα, ἴσαι εἰσί, καὶ ἐπομένως καὶ τὸν κα: τῦ α′: τοίχ: τὰ οδ, αν, τόξα ἴσα ἐστί. ἀλλ' ἐπὶ μὲν τῦ α′: κύκλε, τὰ οδ, εμ, [illegible] καὶ τὸν θ′: τῦ β′: τῦ παρόντος, ὅμοιά εἰσιν, ἄρα καὶ τὰ [illegible] καὶ ἐπεί εἰσι τμήματα τῦ αὐτῦ κύκλε, παντὸς γέ εἰσι καὶ ἴσα. ἐπὶ δὲ τῶν β′: κύκλων, τὰ αν, λε, καὶ ἔτι τὰ οδ, εμ, τόξα ὅμοιά εἰσι καὶ τὸν ιβ′: τῦ αὐτῦ. ἄρα τὰ λε, εμ, τόξα ἴσα εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

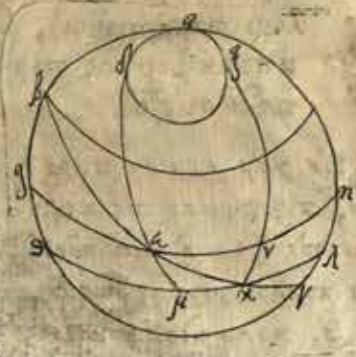

Theod. Sf. Lib. 3. Fig. 17.

Πρό

Πρότασις ΙΓ'. Θεώρημα.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφάπτηται, ἢ ὧν ὁ ἀφ' ἀρχῆς ἐφήπτετο, ἀνομοίας ἀπολήψονται περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονες, ἢ ὅμοιαι ἔσονται ἀεὶ, αἱ ἔγγιον ὁποτερουοῦν τῶν πόλων τῆς πορρώτερον.

Ἐν γὰρ σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ αβγ, κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ αδξ, ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ α, σημεῖον. ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ βεγ, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους μειζόνων ἐφαπτέσθω, ἢ ὧν ὁ αβγ, ἐφάπτεται. Λέγω, ὅτι ἀνομοίας ἀπολήψονται περιφερείας τῶν παραλλήλων τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονες, ἢ ὅμοιαι ἔσονται ἀεὶ αἱ ἔγγιον ὁποτέρου τῶν πόλων τῆς πορρώτερον. Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τοῦ βγ, λοξοῦ κύκλου δύο σημεῖα τυχόντα τὰ ε, κ, καὶ διὰ τῶν ε, κ, σημείων, γεγράφθωσαν κύκλοι παράλληλοι τῷ αδξ, οἱ ζεη, θκλ. Λέγω, ὅτι ἡ μὲν εη, περιφέρεια τῆς κλ, περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, ἡ δὲ θκ, περιφέρεια τῆς ζε, περιφερείας μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία. Γεγράφθωσαν γὰρ διὰ τῶν ε, κ, σημείων μέγιστοι κύκλοι, οἱ δεμ, ξνκ, ἐφαπτόμενοι τοῦ αδξ. ὥστε ἀσύμπτωτα εἶναι, τὸ μὲν ἀπὸ τοῦ δ, ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὸ μ, μέρη, τῷ ἀπὸ τοῦ α, ἡμικυκλίῳ, ὡς ἐπὶ τὸ θ, μέρη, τῷ δὲ ἀπὸ τοῦ ξ, ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὸ κ, μέρη, τῷ ἀπὸ τοῦ α, ἡμικυκλίῳ, ὡς ἐπὶ τὸ λ, μέρη. Ἐπεὶ οὖν ἀσύμπτωτά ἐστι τὰ αλ, ξκ, ἡμικύκλια, καὶ μεταξὺ αὐτῶν, κύκλων περιφέρειαί εἰσιν αἱ εη, κλ, ὅμοιον ἄρα ἐστὶν ἡ εη, περιφέρεια τῇ κλ, περιφερείᾳ καὶ τῶν ιβ'. τοῦ β'. τοῦ παρόντος, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ζε, τῇ θμ, ἐστὶν ὁμοία, καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ εη, περιφέρεια τῇ κλ, περιφερείᾳ, ἡ ἄρα εη, περιφέρεια, μείζων ἐστὶ τῆς κλ, περιφερείας, ἢ ὁμοία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ θκ, τῆς ζε, μείζων ἐστὶν, ἢ ὁμοία. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Theod: Sf: Lib. 3. Fig. 18.

Τέλος τοῦ Τρίτου τῶν κατὰ Θεοδόσιον Σφαιρικῶν.

ΚΑΙ ΠΡΩΤΟΥ ΤΟΜΟΥ.

ΕΓΜΕΝΗΣ ΑΝΑΓΝΩΣΤΑ.

ΟΡΑ, ΑΝΑΠΟΛΗΣΟΝ, ΚΑΙ ΣΥΓΓΝΩΘΙ.

Πέρας τὸ τυπῶσθαι τὸν παρόντα τόμον ἰδὼν, ἐπανέλαβον, καὶ ὡς οἷόν τε ἐπιμελῶς διεξιὼν, ἐνέτυχόν τισι παραδραμοῦσι περὶ τὴν διόρθωσιν, ἄτιμα, ὡς ὁρᾶς ὑπαυθοῖ τοῖς ἐπανορθωμένοις παρακείμενα, αὐτικρυς τῆς σελίδος καὶ ςίχου παρασεσημειωμένων, σταδαιότερον φέρει σύμβολον ἐπιμελείας δικαίου, ἢ ῥαθυμίας ἀκαίρου, ὅτε μὴν γραφίδος ἢ παρόψεως αἴτιον, ἀλλὰ κατὰ τὸν ἐπόντα, μᾶλλον Μήρκῳ ἔρδα.

Σελ.	ςίχ.	Ἐσφαλμ.	Ἐπανορθωμ.
xxxiii	κή.	μωνίαν	γωνίαν,
1	12	κηπορῷ	κηπυρῷ·
2	4	διθαλὴς	διθαλῆ,
2	30	κλεὶν,	κλεῖν·
10	9	ἐπιφανείας	ἐπιφανείας.
10	21	Ἐπίπεδος	ἐπίπεδος
11	12	ἐπίπεδων	ἐπιπέδων.
11	12	εἰσιν	εἰσιν,
11	15	ὑπο	ὑπὸ,
11	24	περιφαρῦς	περιφερῦς.
13	3	οἰκεῖα	οἰκεία.
13	16	πλειόντων	πλειόνων.
14	15	λαμβαμενὸς.	λαμβανομενὸς.
14	32	πρῶτόν φασὶ	πρῶτόν φασι,
15	7	τὴς	τῆς
15	20	μεῖξον	μεῖζον,
15	28	σφαίρα	σφαῖρα
15	33	ὑπό τε	ὑπό τε
16	11	προόδον	προόδῳ
16	12	ὠείσαντο	ὠείσαντο
16	22	τεθαπλῶν	τεθαπλῶρων,
16	23	κἀντοῖς	κἂν τοῖς
16	31	ὑπ'	ὑπ'
20	2	πραγματεύται	πραγματεύεται.
21	5	πεπερασμενὴς	πεπερασμενὴς
22	28	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
22	31	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
23	21	ἀξιώμα	ἀξίωμα,
24	3	ἀξιώμα	ἀξίωμα.

Σελ.	ςίχ.	Ἐσφαλμ.	Ἐπανορθωμ.
24	12	ἄλλαι δύο δι-θεῖαι ἴσαι	ἄλλας δύο δι-θείας ἴσας,
24	12	ἑκατέρα	ἑκατέρᾳ,
24	13	ἔχουσαι	ἐχούσας,
24	25	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
24	26	διθείαις	διθείας.
25	18	αὐωτέρῳ	αὐωτέρω.
27	18	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
27	33	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
28	2	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
28	13	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
30	7	ἀξιώμα	ἀξίωμα,
32	15	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
32	26	αὐωτέρῳ	αὐωτέρω
33	11	ἀξιώμα	ἀξίωμα,
35	6	μωνίαν τῇ	γωνίαν τῇ
35	21	εἶσαι	ἴσαι
35	21	ἴσα εἰσι	ἴσαι εἰσι
35	24	δειζα	δειξαι.
36	9	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
36	11	εἰσαί	ἴσαί
36	25	ἀξιώμα	ἀξίωμα
37	24	ἀξιώμα	ἀξίωμα
39	9	ἀξιώμα	ἀξίωμα.
39	13	ἀξιώμα	ἀξίωμα
41	20	διθείσει	διθείας
57		τὴν μ[illegible]τ[illegible] ρόντος	τὴν μ[illegible]: παρελ-θόντος.
60			

Σελ.	στίχ.	Ἐσφαλμ.	Ἐπανορθωμ.
71	3	λεφθῇ	ληφθῇ
71	28	δεῖξαις	δεῖξαι
71	34	περόντος	παρόντος
72	22	μάλλον	μᾶλλον
104	4	σὶ	φασὶ
113	31	ἐντῷ	ἐν τῷ
125	35	ὑποσαῦν	ὁποσαῦν.
126	29	δεύξερον	δεύτερον
130	28	τὸ γ.	τῷ γ.
164	26	περαλληλό-γραμμον.	παραλληλό-γραμμον.
165	27	γώμων	γνώμων·
165	31	γώμονι	γνώμονι,
166	29	γώμονι	γνώμονι.
179	16	ἀειθὸς ἀειθμῷ μέρη,	ἀειθμὸς ἀειθμῷ μέρος
179	17	πὲ αὐπὲ μέρη	τὸ αὐτὸ μέρος,
179	18	πὲ αὐπὲ μέρη ἔσαι, ἅπερ	τὸ αὐτὸ μέρος ἔσαι, ὅπερ
205	8	τὸν παρόντος	τὲ παρόντος.
240	2	σιωεσώ.	συνεσός.
244	4	τὲτο τὸ δὲ	τὲτο δὲ
250	7	ἀπτομεύαι	ἀπτόμεναι
250	7	πιεὶ	παρὰ
250	8	ἀπτόμεναις	ἀπτομεύας
250	12	πιεὶ	παρὰ
251	2	τέτμηται	τέμνηται,
257	4	αἱ αβ,	ἡ αβ,
267	22	παραλληλεπί-δε.	παραλληλεπί-πεδα.
270	22	ἔσωτων	ἔσωσαν,
279	30	τμήμπτα	τμήματα.
282	5	ἀπτομεύας	ἀπτομένας,
288	1	πυραμήδι	πυραμίδι,
291	26	ἥμισή ἐσι	ἡμίση ἐσὶ
335	20	τὸν παρὰ	τὸν πατέρα
336	7	τὶω βα,	τὶω βγ,
336	10	αἱ δγ, δζ,	αἱ δγ, γζ.
336	27	ξισκαδεκάτῳ,	ξισκαιδεκάτῳ,
339	25	ἐγγαγράφθω.	ἐγγεγράφθω,
354	25	τῷ κοῦβον	τῷ κούβων.
363	28	κοῦβ.	κούβον·
383	12	ἐναπολειπέ-να.	ἐναπολειπόμε-να.
387	11	μέρων	μερῶν.
398	28	πόεισμα	πόρισμα.
415	18	πὲπων	τὲτον